

Joke Zwarteveen

*Deltion Sprint Lyceum*

Zwolle

*jzwarteveen@deltion.nl*

Nellie Verhoef

*ELAN*

*Universiteit Twente*

*n.c.verhoef@utwente.nl*

## Onderwijs

# Veranderingen in het eindexamenprogramma?

**De commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) kwam in januari 2013 met het voorstel 'Denken & doen, wiskunde op havo en vwo per 2015'. Wat is er veranderd? Joke Zwarteveen, docent wiskunde op een Vavo (Voortgezet algemeen volwassenenonderwijs), gaat op zoek, vakdidacticus Nellie Verhoef kijkt mee.**

Het rapport beschrijft de nieuwe opzet voor wiskunde A, B, C en D op havo en vwo. De verschillen tussen A, B, C en D hebben te maken met de vervolgopleidingen. Wiskunde A bereidt voor op vervolgopleidingen in de sectoren economie, gezondheidszorg en landbouw & natuurlijke omgeving. Begrippen als standaardfuncties, formules en statistiek en de bijbehorende algebraïsche vaardigheden en rekenvaardigheden spelen een grote rol. Wiskunde B bereidt voor op bèta- en technische wetenschappen. Inhoudelijk ligt de nadruk op analyse en meetkunde, met ruime aandacht voor algebraïsche vaardigheden en de inzichtelijke toepassingen. Bij wiskunde C gaat het om gedragswetenschappen, de sectoren recht en taal & cultuur. Het programma richt zich op algemene wiskundige vorming en de historische en culturele plaats van wiskunde in wetenschap en maatschappij. Wiskunde D, dat in tegenstelling tot de andere wiskundevakken een keuzevak is, is verbredend en verdiepend, maar niet noodzakelijk (lees: verplicht) voor exacte vervolgstudies. Leerlingen met wiskunde D zijn beter voorbereid op een exacte vervolgstudie. De aantrekkingskracht van de wiskunde en de uitdaging die leerlingen ervaren is maatgevend voor wiskunde D.

### Een stukje voorgeschiedenis

In het door cTWO gepresenteerde rapport ontbreekt wiskunde C havo, wiskunde is dus niet

verplicht voor alle havoleerlingen. Er is echter een voorstel ingediend (november 2012) om (opnieuw) wiskunde voor iedereen in te voeren. Dat betekent dat er dan geen mogelijkheid meer is om na de derde klas havo te kiezen voor 'geen wiskunde'. Het nieuwe wiskunde C zal overigens ingevoerd worden zonder experimenten vooraf. Het voorstel heeft het niet gehaald, gelukkig maar. Met cTWO zou je eigenlijk medelijden moeten hebben na alle politieke commotie. Denk bijvoorbeeld terug aan de studentenactie 'Lieve Maria' (begin 2006). In die tijd ageerde de eerste lichter eindexamenkandidaten met wiskunde in hun pakket tegen een slechte aansluiting met de universiteit. De eerstejaarsstudenten gaven aan dat het beheersen van de knoppen van de grafische rekenmachine ten koste was gegaan van het beheersen van op de universiteit (als bekend veronderstelde) algebraïsche vaardigheden. Bijspijkeren was kennelijk nodig om alsnog de spoedig daarna ingevoerde instap- of aansluitingstoetsen te halen. Eisten de universiteiten te veel, of was de vooropleiding niet toereikend? Ook werd geconstateerd dat veel hbo's het wiskundeniveau verlaagden om nog te kunnen aansluiten bij de gebrekkige kennis van aankomende havoleerlingen. Al dat gedoe heeft programmamakers voorzichtig gemaakt. Kortom, cTWO had geen gemakkelijke start.

Op de homepage <http://staff.science.uva.nl/~craats/TweeBewogenJaren.pdf> van Jan van de Craats vindt u een handig overzicht van de ontwikkelingen vanaf 2008. In dat jaar maakte staatssecretaris Marja van Bijsterveldt-Vliegthart van OCW haar beslissingen bekend over de voorgestelde examenprogramma's wiskunde havo en vwo. In dat besluit wordt de schoolwiskunde gezien als een concentrisch opgebouwd geheel: (1) een harde kern van traditionele algebraïsche vaardigheden met wat elementaire meetkunde en 'functies en grafieken'; daarbuiten (2) onderdelen van hoger niveau voortbouwend op de kern; daaromheen (3) onderdelen die op een langere termijn gezien minder belangrijk zijn in schoolwiskunde; uitmondend in (4) onderdelen waarin de wiskunde grenst aan contexten en maatschappelijke en natuurwetenschappelijke toepassingen. Deze visie viel zware kritiek ten deel met het oog op de plaats van de diverse onderdelen van de schoolwiskunde. Desondanks kreeg cTWO de opdracht om voorstellen voor vernieuwde examenprogramma's te formuleren, rekening houdend met deze visie. In het eindrapport leest u hoe omzichtig cTWO te werk is gegaan (p. 3): "Met de presentatie van de programma's is de ontwikkeling nog niet afgesloten, want er zijn nog diverse stappen te nemen in het implementatietraject. Alle bij het wiskundeonderwijs betrokken partijen zullen daarvoor hun bijdrage moeten leveren. Het onderwijs en de wiskunde ontwikkelen zich in een geleidelijk en voortdurend proces. Er is binnen het wiskundeonderwijs daarom behoefte aan een continue, reflectieve heroverweging. Daartoe

lijkt ons een breed samengestelde permanente curriculumcommissie een belangrijk instrument.” Hoe breed zal deze commissie moeten zijn samengesteld om overeenstemming te vinden?

### Veranderingen

Welke zijn de in het oog lopende veranderingen in de voorstellen? We zullen deze veranderingen bekijken en van opmerkingen voorzien aan de hand van het persbericht waarin cTWO de veranderingen kort en krachtig samenvat:

1. Een andere behandeling van statistiek die beter voorbereidt op de wijze waarop in de vervolgoopleidingen statistiek wordt gebruikt.
2. De vergaande vernieuwing van wiskunde C op het vwo, toegesneden op leerlingen met interesse voor cultuur en maatschappij.
3. Wiskunde B havo dat beter past in het beperkte aantal studielasturen.
4. Een grotere rol voor analytische meetkunde bij wiskunde B, waardoor het programma coherenter wordt en de algebraïsche vaardigheden worden versterkt.
5. Bijgestelde programma's voor wiskunde D, het aanvullende wiskundekeuzevak voor bètaleerlingen, op grond van ervaringen die sinds de invoering in 2007 zijn opgedaan.
6. Wiskundige denkactiviteiten als een rode draad door alle wiskundevakken.

*Ad 1. Een andere aanpak van statistiek.* Waarom is dat nodig? Wel, in het moderne wetenschappelijke onderzoek wordt met grote datasets gewerkt die vervolgens statistisch bewerkt worden om er conclusies uit te kunnen trekken. Het is daarbij belangrijk te beseffen dat deze conclusies geen harde uitspraken zijn, maar een mate van waarschijnlijkheid hebben. Daarom moeten leerlingen niet alleen leren omgaan met computerprogramma's die grote datasets statistisch kunnen bewerken, maar ook leren kritisch te kijken naar de conclusies die worden getrokken. Er doemen wel problemen en vragen op, want hoe toets je het praktisch kunnen omgaan met grote datasets? Dat kan niet op het centraal schriftelijke examen omdat je dan een computer nodig hebt. Dat kan dus alleen in het schoolonderzoek aan de orde komen. Hoe toets je vervolgens de kritische houding ten opzichte van de getrokken conclusies? En: hoe onderwijs je dat? Het begrip significant(ie) is voor een havoleerling best moeilijk, zo schatten we in. Kunnen havoleerlingen

met wiskunde A het begrip betrouwbaarheid begrijpen zoals het omschreven staat (p. 158): “De kandidaat kan een betrouwbaarheidsinterval opstellen (...) met behulp van de vuistregel steekproefgemiddelde  $\pm 2S/\sqrt{n}$  (waarbij  $S$  de steekproefstandaardafwijking is).”? Leidt dat tot het aanleren van trucs? De wortel  $n$ -wet is voor vwo-leerlingen al niet eenvoudig te begrijpen, laat staan voor havoleerlingen. Kortom, bij deze nieuwe aanpak zal de docent hard nodig zijn om leerlingen te begeleiden.

De statistieksituatie bij wiskunde D is weer anders. De onderwerpen hypothesetoetsen en correlatie en regressie horen er helemaal bij. Dat is nieuw. Dit zijn ‘talige’ onderwerpen waar bètaleerlingen, en dan vooral havoleerlingen, moeite mee hebben. Ze vinden de formuleringen van de opgaven al lastig, laat staan het onder woorden brengen van eigen gedachten. Jammer eigenlijk dat deze onderwerpen niet voorkomen in wiskunde A en/of C. Maar er is hoop. In de specificaties van wiskunde A en C lezen we (p. 181, 207): “De kandidaat kan (...) bij een relatie tussen twee variabelen de data uitbeelden in een kruistabel en in een grafiek.” Deze zinsnede biedt ruimte om puntenwolken en daarmee het begrip correlatie en regressie toch aan de orde te stellen. Bovendien kunnen docenten dan het nut van hypothesetoetsen duidelijk maken door een aantal opgaven aan te passen.

*Ad 2. De vernieuwing van het wiskunde C-programma op het vwo.* Wat betekent de vernieuwing voor vwo-leerlingen met wiskunde C? In ‘Denken & doen’ lezen we (p. 119): “Het programma richt zich op algemene wiskundige en statistische vorming, in samenhang met de historische en culturele plaats van wiskunde in wetenschap en maatschappij. Daarnaast heeft dit vak een algemeen vormende waarde doordat het leerlingen voorbereidt op de (informatie)maatschappij en hen leert in verschillende situaties wiskundige aspecten te herkennen, te interpreteren en te gebruiken.” Dat is een mond vol! Leerlingen met wiskunde C zijn niet zomaar te karakteriseren. Waren ze allemaal maar cultuurgeïnteresseerd! Er zitten ook leerlingen bij die gewoon niks met wiskunde hebben, en een ingebakken angst voor getallen koesteren. Zijn dat cultuur liefhebbers? Niet zonder meer... Voor de groep angsthazen zou het kunnen helpen over de getallenangst heen te komen door op een creatieve wijze met ‘Algebra en tellen’, ‘Verbanden’ en ‘Veranderingen’ om te leren gaan. Toch zijn er twijfels. Waarom moeten deze leerlingen rijen leren? Prak-

tische toepassingen van rijen vind je vooral bij het berekenen van annuïteiten, geschikt voor leerlingen met wiskunde A. Een ander voorbeeld, het veranderingsgedrag van functies, is aanleiding tot differentiëren met technische toepassingen en een enkele economische toepassing: dus prima passend bij wiskunde A, B en D. Waarom dit onderwerp voor leerlingen met wiskunde C?

Dan zijn er nog twee nieuwe domeinen toegevoegd: ‘Vorm en ruimte’ en ‘Logisch redeneren’. cTWO zegt daarover (p. 120): “In Vorm en ruimte vinden meetkundige principes hun plaats in toepassingen in de maatschappij en de beeldende kunst.” Bedoelt cTWO hier het berekenen van de hoeveelheid verf die nodig is om de dokwerker in Amsterdam met een 1 mm dikke verflaag te bedekken? Helemaal niet. Zo blijkt dat de leerlingen vooral moeten leren om figuren in puntperspectief te tekenen, en moeten kunnen rekenen aan eenvoudige meetkundige figuren. Maar gaat het dan om de maatschappij en beeldende kunst vraag je je af. Het gaat hier eigenlijk om basiswiskunde, en dat is nuttig.

Wat het domein logica betreft, dit komt toch ook aan de orde bij de vakken filosofie en Nederlands? Onlangs vertelde een vwo-leerling mij dat zelfs bij het schrijven van een essay voor Engels wordt gelet op een correcte logische redenering. Het enige verschil met de talen is dat bij wiskunde gebruik gemaakt wordt van tabellen en diagrammen. Lijkt uitdagend! Hoe zullen wiskunde C-leerlingen de omgang met tabellen en diagrammen oppakken? Een combinatie met Nederlands lijkt geen gek idee.

*Ad 3. Een beter passend programma Wiskunde B havo.* Tot onze verbijstering besloot de minister in 2007 de studielast voor wiskunde B havo te beperken: een nare, ongefundeerde miskennis van het vak wiskunde B. Deze inperking maakt het voor de havoleerlingen die voor techniek kiezen noodzakelijk om wiskunde D erbij te nemen. Terwijl bekend is dat technische hbo-opleidingen zelfs het vak wiskunde B veelal niet in de toelatingseisen hebben opgenomen! Havoleerlingen hebben op het hbo problemen met wiskunde, als zij op de havo geen wiskunde B én D hebben gevolgd (of erger nog: als zij vanuit het mbo komen, maar dit terzijde). cTWO constateert dit (p. 14, 18 en 25): “Verhoog het voorgeschreven aantal studielasturen voor wiskunde B havo, teneinde dit vak voor een grotere groep leerlingen studeerbaar te maken”, “Versterk de positie van wiskunde D en zorg dat de verbreding, de verdieping en de gelegenheid tot

talentontwikkeling die wiskunde D biedt, behouden blijft” en “Overweeg op termijn de invoering van twee robuuste wiskundevakken, wiskunde  $\alpha$  voor de maatschappijprofielen en wiskunde  $\beta$  voor de natuurprofielen, door wiskunde A en C respectievelijk B en D samen te voegen in vakken met een kerncurriculum en een bescheiden differentiatie”. Waarbij cTWO bij het robuuste vak wiskunde  $\beta$  ook vast en zeker denkt aan een substantiële uitbreiding van het aantal studielasturen. Hier zijn we het hartgrondig mee eens.

*Ad 4. Een grotere rol voor analytische meetkunde in de meetkundedomeinen.* Er zijn docenten die het betreuren dat analytische meetkunde een grotere rol gaat spelen in de meetkundedomeinen van wiskunde B. Het klopt inderdaad dat hiermee het wiskunde-programma coherenter wordt en dat de algebraïsche vaardigheden worden versterkt. Een grotere rol van algebraïsche vaardigheden impliceert echter een verschraving van de transfer van synthetische naar analytische meetkunde en omgekeerd [3]. Er zijn ook docenten die er blij mee zijn dat de leerlingen meetkundige problemen kunnen oplossen door eraan te rekenen. Voor een substantieel deel van de leerlingen is meetkunde echt een struikelblok.

*Ad 5. De bijgestelde programma's voor wiskunde D.* De domeinnamen bij het vwo-programma zijn (vrijwel) gelijk, maar pas op! In de specificaties zijn opvallende veranderingen te bespeuren. Het onderscheid tussen school- en samenwerkingsmodel is losgelaten en een enkel onderwerp is naar wiskunde B verplaatst. In het samenwerkingsmodel werd expliciet samengewerkt met een universiteit. Als er geen samenwerking mogelijk was, moest het schoolmodel worden gekozen, waarin de onderdelen complexe getallen en een voortzetting van dynamische modellen aangeboden worden.

In het bijgestelde programma zijn complexe getallen verplichte kost voor iedereen. En gelukkig (dat is nieuw) wordt de relatie met de vlakke meetkunde genoemd. Het onderwerp voortzetting van dynamische modellen vervalt. Met het oog op een technische universitaire vervolgopleiding is dit jammer. Zo is het zelf modelleren van veranderingsverschijnselen zinvol [4]. En het oplossen van sommige tweede-orde-differentiaalvergelijkingen met complexe getallen is nuttig om bijvoorbeeld de relatie met natuurkunde te ervaren. Daarbij is het, vinden wij, een prachtige toepassing van com-

plexe getallen, die je wiskunde D-leerlingen niet mag onthouden. Overigens zullen vindingrijke docenten vast weer mogelijkheden vinden!

In het wiskunde D-programma voor de havo zijn eveneens flinke veranderingen aangebracht. Ook hier is het onderscheid tussen school- en samenwerkingsmodel losgelaten. Het onderwerp exponentiële, logaritmische en goniometrische functies, inclusief de afgeleide ervan, is vervallen. Slechts een klein onderdeel (evenredigheden en de goniometrische functie, zonder de afgeleide) is verplaatst naar wiskunde B. De reden voor deze keuze is niet duidelijk. Het toepassen van de kettingregel op samengestelde machtsfuncties van alleen lineaire uitdrukkingen, zoals bijvoorbeeld  $f(x) = \sqrt{2x - 3}$ , is wel erg eenvoudig, en weinig uitdagend.

Ruimtmeetkunde wordt net als wiskunde en technologie nu verplicht, in tegenstelling tot het huidige programma.

*Ad 6. Wiskundige denkactiviteiten als een rode draad door alle wiskundevakken.* En nu komt dan het heikele punt: wiskundige denkactiviteiten. Menigeen heeft zich afgevraagd wat daarmee precies wordt bedoeld. Wat is een denkactiviteit en wat is een wiskundige denkactiviteit? cTWO probeert dat uit te

leggen door de vinger te leggen op verschillende typen wiskundige kennis en vaardigheden, procedureel en conceptueel. Vervolgens worden er zes voorbeelden van denkactiviteiten ten tonele gevoerd die een balans tussen de twee typen dienen te waarborgen (p. 30): modelleren en algebraïseren (Mo-Al), ordenen en structureren (Or-St), analytisch denken en probleemoplossen (An-Pr), formules manipuleren (Fo), abstraheren (Ab) en logisch redeneren en bewijzen (Lo-Be). In het eindrapport schrijft cTWO daarover (p. 31): “Hoevel deze denkactiviteiten door wiskundigen herkend worden als karakteristieke elementen in de uitvoering van het vak, zijn ze in curricula, schoolmethoden en wiskundelessen veelal niet goed zichtbaar of slechts impliciet aanwezig (...). Denkactiviteiten zijn onverbreekelijk verbonden met de inhoudelijke subdomeinen en zullen dus nooit los getoetst worden (...).” cTWO heeft het idee van wiskundige denkactiviteiten geoperationaliseerd door in een kruisjeslijst aan te geven welke denkactiviteiten er bij welk domein aan de orde (moeten) komen. In Figuur 1 een voorbeeld van wiskunde B vwo (p. 111).

Het College voor Examens, dat van overheidswege de opdracht heeft de examenstof in syllabi te beschrijven, heeft een poging gedaan deze denkactiviteiten zichtbaar te ma-

		Mo - Al	Or - St	An - Pr	Fo	Ab	Lo - Be
B1	Formules en functies	x			x	x	
B2	Standaardfuncties		x		x		
B3	Functies en grafieken	x	x		x	x	x
B4	Inverse functies			x		x	
B5	Vergelijkingen en ongelijkheden	x	x	x	x	x	x
B6	Asymptoten en limietgedrag van functies				x	x	x
C1	Afgeleide functies				x	x	x
C2	Technieken voor differentiëren		x		x		
C3	Integraalrekening			x	x		
D1	Goniometrische functies en vergelijkingen	x			x		x
E1	Meetkundige vaardigheden	x			x		x
E2	Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde	x	x	x	x	x	x
E3	Vectoren en inproduct	x	x	x			x
E4	Toepassingen		x		x		x

Figuur 1 Een kruisjeslijst voor wiskunde B vwo

**Subdomein B1 Formules en functies**

4 De kandidaat kan formules interpreteren en bewerken, bij een verband tussen twee variabelen een grafiek tekenen in een assenstelsel en bepalen of een gegeven formule herschreven kan worden als functievoorschrift.

*Parate kennis.* De kandidaat kent: de voorwaarden waaronder een verband een functie is.

*Reproductie.* De kandidaat kan:

- 4.1 de structuur van een formule analyseren;
- 4.2 een formule herschrijven tot een gelijkwaardige formule;
- 4.3 een formule — indien mogelijk — herleiden tot een functievoorschrift;
- 4.4 bij een verband tussen twee variabelen een grafiek tekenen.

*Productie.* De kandidaat kan:

- 4.5 formules combineren tot een nieuwe formule;
- 4.6 bij een verband, afhankelijk van de probleemstelling, bepalen welke variabele als onafhankelijk en welke als afhankelijk beschouwd wordt;
- 4.7 aan de hand van een formule uitspraken doen over de bijbehorende probleemsituatie.

**Figuur 2** Citaat uit de conceptsyllabus voor wiskunde B

ken, door parate kennis, reproductie (routine) en productie (met inzicht) van elkaar te onderscheiden. Het is een moedige poging, maar de indeling in reproductie en productie — of zo u wilt in procedureel en conceptueel, of welke termen men er ook voor bedacht heeft — is niet sterk afgebakend [2]. Ter illustratie in Figuur 2 een citaat uit de conceptsyllabus voor wiskunde B vwo (p. 11). De definitie “een verband is een functie dan en slechts dan als aan iedere element uit het domein precies één element uit het bereik wordt toegevoegd” moet inderdaad gewoon uit het hoofd geleerd worden, en daarmee paraat zijn. Echter, de leerling heeft aan deze parate kennis niets als de specificatie 4.6 niet wordt beheerst. Dit vraagt inzicht en staat daarom onder het kopje Productie. Pa-

rate kennis over welk verband een functie is heeft geen zin als de leerling niet weet wat een domein en een onafhankelijke variabele is. Ook productie en reproductie lopen door elkaar. Zo kan de specificatie 4.2, die onder reproductie valt, dus een wiskundige routine is, slechts volledig beheerst worden als er ook inzicht in de vorm van formules (ook wel *symbol sense* genoemd) is. Productie dus. Misschien dat daarom ook specificatie 4.5, die erg op 4.2 lijkt is opgenomen in Productie?

De implementatie van denkactiviteiten in het onderwijs is een nieuw fenomeen. cTWO ziet dit dan ook als een punt van zorg (p. 96). In verband daarmee verwijst zij naar aanbeveling 2 en 3 (p. 14, 15): “Geef een vervolg aan de vernieuwingen die zijn ingezet rondom wiskundige denkactiviteiten (...)” en “Zorg voor

professionaliseringsactiviteiten ten behoeve van het wetslagen van enkele centrale aspecten van de vakvernieuwing in 2015. Het betreft met name (...) wiskundige denkactiviteiten.”

Waarom zouden deze denkactiviteiten nu expliciet in de curricula, schoolmethoden en wiskundelessen aan de orde moeten komen? We veronderstellen dat de (terechte) zorg van cTWO is dat veel van deze denkactiviteiten weinig of niet in schoolboeken voorkomen. We wezen bij het punt over wiskunde D al op het feit dat leerlingen bij het onderwerp differentiaalvergelijkingen zelf geen differentiaalvergelijking hoeven op te stellen, wat juist een unieke kans is om leerlingen nu eens echt te laten modelleren, structureren, analyseren en formules manipuleren. Vreemd eigenlijk dat we nergens iets tegenkomen over het opstellen van een differentiaalvergelijking.

In de schoolboeken zal er een accentverschuiving plaatsvinden. Minder aandacht voor reproductie (voordoen — nadoen), meer gelegenheid scheppen voor de leerlingen om zelfstandig na te denken. Hier liggen kansen voor docenten om materiaal te ontwerpen dat recht doet aan denkactiviteiten. Natuurlijk bedoelen we niet dat parate kennis en routine overbodig zijn. Elke docent weet dat aan begrip basiskennis ten grondslag ligt, en dat routinematige handelingen het werkgeheugen ontlasten om ruimte te kunnen maken voor denkactiviteiten. En dat daarom niet naar ‘inzichtopgaven’ moet worden overgestapt voordat de daarvoor benodigde kennis en vaardigheden worden beheerst. Helaas maken de meest gebruikte schoolboeken op dit moment deze overstap amper.

Wij hopen dat er meer contacttijd voor wiskundedocenten kan worden vrijgemaakt zodat zij in staat zijn eigen onderwijs te ontwerpen en met elkaar te delen. ←

**Referenties**

- 1 cTWO, *Denken & doen, wiskunde op havo en vwo per 2015*, Eindrapport van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO, december 2012, <http://www.fisme.science.uu.nl/ctwo/publicaties/docs/CTWO-Eindrapport.pdf>
- 2 R. Skemp, Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics Teaching* 77 (1976), 20–26.
- 3 M. Timmer en N.C. Verhoef, Increasing insightful thinking in analytic geometry, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/13(3) (2012), 217–219.
- 4 N.C. Verhoef, J.A. Zwarteveen-Roosenbrand, W.R. van Joolingen en J.M. Pieters, Wiskundig begrip bij het modelleren van veranderingsprocessen met differentiaalvergelijkingen, *Pedagogische Studiën* 90(1) (2013), 33–46.