Jaap Korevaar
Korteweg-De Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
j.korevaar@uva.nl

Column De oplossing

Priemparen

‘De oplossing’ is een nieuwe rubriek over onlangs opgeloste vermoedens in de wiskunde die een raakvlak hebben met de Nederlandse wiskundepraktijk. Jaap Korevaar opent de rubriek met een verhaal over de verrassende oplossing van een beroemd probleem in de getaltheorie door de betrekkelijk onbekende wiskundige Yitang Zhang. Is er in uw onderzoeksgebied een belangrijke doorbraak te melden? Laat het ons weten!

Dat er aan de rij priemgetallen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

nooit een eind komt is natuurlijk al bekend sinds de oudheid. Maar er zijn nog veel open vragen over de priemgetallen. Een van de bekendste is of er in bovenstaande rij oneindig veel sprongen van lengte twee voorkomen. Met andere woorden, zijn er oneindig veel *priemtweelingen* $(p, p+2)$:

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), \ldots$$

Dit lijkt heel waarschijnlijk, omdat er steeds weer grotere priemtweelingen gevonden worden. Op Internet [11] wordt een tweeling vermeld uit 2011 waarbij p meer dan 200 duizend cijfers heeft.

Een algemenere vraag is of er voor *elk* even verschil d, oneindig veel *priemparen* $(p, p+d)$ zijn. Er lijken zelfs meer priemparen te zijn met verschil zes dan met verschil twee:

$$(5, 11), (7, 13), (11, 17), (13, 19), (17, 23), (23, 29), (31, 37), (37, 43), (41, 47), (47, 53), \ldots$$

Als men ver doortelt lijken het er ongeveer tweemaal zoveel te zijn.

Vermoedens

De beroemde priemgetalstelling van Hadamard en de la Vallée Poussin uit 1896 zegt dat voor grote x het aantal $\pi(x)$ van de priemgetallen $p \le x$ goed vergelijkbaar is met het quotiënt $x/\log x$. (Hier is $\log x$ de natuurlijke logaritme, en ‘goed vergelijkbaar’ betekent dat de verhouding van $\pi(x)$ tot $x/\log x$ limiet één heeft als x naar oneindig gaat.)

In een baanbrekend artikel uit 1923 maakten de Engelse wiskundigen Hardy en Littlewood [6] plausibel dat er een analoge asymptotische gelijkheid moet gelden voor priemtweelingen. Voor grote x zou het aantal $\pi_2(x)$ van die tweelingen $(p, p+2)$, met $p \le x$, goed vergelijkbaar moeten zijn met $K_2\, x/\log^2 x$, waarbij de constante K_2 in termen van de priemgetallen gegeven wordt door de formule

$$K_2 = 2 \prod_{p \text{ priem} p \ge 3} \left\{1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right\} = 1.320323\ldots$$

Yitang Zhang

Recente uitgebreide tellingen van priemtweelingen, door Nicely (Virginia) [8] en anderen, geven sterke ondersteuning voor het vermoeden.

Algemener formuleerden Hardy en Littlewood een vermoeden voor het aantal $\pi_d(x)$ van de priemparen $(p, p+d)$ met $p \le x$. Ook dat aantal zou goed vergelijkbaar moeten zijn met een uitdrukking $K_d\, x/\log^2 x$. De formule voor K_d laat in het bijzonder zien dat K_6 gelijk is aan $2K_2$! Tellingen door Fokko van de Bult [3] (destijds aan de UvA) voor alle verschillen $d \le 1000$ zijn in goede overeenstemming met het algemene vermoeden.

Recente artikelen

Na de oorlog is er door veel onderzoekers aan de priempaarvermoedens gewerkt. Tal van wiskundigen, waaronder Pólya (Stanford) in 1959 [10], hebben redeneringen bedacht die de vermoedens ondersteunen. Met name de wiskundige Goldston (San José) heeft jarenlang aan de problemen bijgedragen. Tenslotte kon hij omstreeks 2006, samen met Pintz (Boedapest) en Yıldırım (Istanbul), het volgende frappante resultaat bewijzen [5]. Er bestaat een verschil $d \le 16$ zodanig dat er oneindig veel priemparen $(p, p+d)$ zijn. Jammer genoeg moesten Goldston, Pintz en Yıldırım gebruik maken van een onbewezen vermoeden van Elliott (Colorado) en Halberstam (Illinois) [4]. Dat vermoeden zegt dat, met geschikte normalisatie, alle rekenkundige rijen positieve gehele getallen van de vorm $a + kq$ met ggd$(a, q) = 1$, in een bepaalde sterke zin evenveel priemgetallen bevatten. Het vermoeden is een verscherping van een wel bewezen resultaat in die richting van Bombieri (Princeton) [1] en Vinogradov (Moskou) [12], en het is aanzienlijk sterker dan het Riemann-vermoeden. Tot zover de stand van zaken begin 2013; voor meer informatie verwijzen wij de geïnteresseerde lezer naar het artikel [7].

Doorbraak

In januari van dit jaar kwam er een verrassende doorbraak. De betrekkelijk onbekende wiskundige Yitang Zhang (New Hampshire) bewees, *zonder* gebruik van enig onbewezen vermoeden, dat er oneindig veel priemparen $(p, p+d)$ moeten zijn voor een of ander verschil d kleiner dan 70 miljoen. Voor zijn bewijs heeft hij de methode van Goldston, Pintz en Yıldırım verfijnd; hij kon het Elliott–Halberstam-vermoeden omzeilen door slim gebruik te maken van werk van Bombieri, Friedlander (Toronto) en Iwaniec (Rutgers) [2] over aantallen priemgetallen in rekenkundige rijen. Zijn artikel 'Bounded gaps between primes' is geaccepteerd door de *Annals of Mathematics* [13].

Na de aankondiging van Zhangs artikel is er een ware industrie ontstaan met het doel de bovengrens van 70 miljoen omlaag te brengen. Door successieve verfijningen van de methode is reeds een bovengrens tussen vier- en vijfduizend verkregen; zie de website 'Bounded gaps between primes' [9] onderhouden door Michael Nielsen. Volgens Goldston is het echter twijfelachtig of men zonder nieuwe ideeën de grens tot twee zal kunnen verlagen.

Referenties

1 E. Bombieri, On the large sieve, *Mathematika* 12 (1965), 201–225.

2 E. Bombieri, J.B. Friedlander en H. Iwaniec, Primes in arithmetic progressions to large moduli, *Acta Math.* 156 (1986), 203–251; II, *Math. Ann.* 277 (1987), 361–393; III, *J. Amer. Math. Soc.* 2 (1989), 215–224.

3 F.J. van de Bult, Counts of prime pairs, persoonlijke communicatie, februari 2007.

4 P.D.T.A. Elliott en H. Halberstam, A conjecture in prime number theory, *Symposia Mathematica*, Vol. 4 (INDAM, Rome, 1968/69), Academic Press, London, pp. 59–72.

5 D. Goldston, J. Pintz en C.Y. Yıldırım, Primes in tuples. I, *Ann. of Math. (2)* 170 (2009), 819–862.

6 G.H. Hardy en J.E. Littlewood, Some problems of 'partitio numerorum'. III: On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.* 44 (1923), 1–70.

7 J. Korevaar, Hoe springen de priemgetallen, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/11 (2010), 244–249.

8 T.R. Nicely, Enumeration of the twin-prime pairs to 2.10^{16}, www.trnicely.net, maart 2010.

9 M. Nielsen, Bounded gaps between primes, michaelnielsen.org/polymath1, 2013.

10 G. Pólya, Heuristic reasoning in the theory of numbers, *Amer. Math. Monthly* 66 (1959), 375–384.

11 Twin prime in Wikipedia 2013; en.wikipedia.org/wiki/Twin prime#Largest known twin prime pair, 15 september 2013.

12 A.I. Vinogradov, The density hypothesis for Dirichlet L-series, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 29 (1965), 903–934.

13 Y. Zhang, Bounded gaps between primes. To appear in *Ann. of Math*