

Christoph Köhn

CWI, Amsterdam
c.koehn@cw.nl

Margreet Nool

CWI, Amsterdam
margreet.nool@cw.nl

Ute Ebert

CWI, Amsterdam
Faculteit Technische Natuurkunde, TU Eindhoven
ute.ebert@cw.nl

Onweer: een bron van broeikasgassen en antimaterie

Bliksemschichten zijn indrukwekkende en wonderbaarlijke natuurverschijnselen. Ze zijn niet alleen gevaarlijk, maar ook een belangrijke bron van stikstofoxiden in de atmosfeer, een sterk broeikasgas. Sinds 1990 is bekend dat er naast bliksemschichten tussen en binnen wolken en naar de grond toe ook nog allerlei ontladingsvormen boven de wolken zijn, zoals sprites, elves en jets. Verder is waargenomen dat onweer flitsen van gammastraling kan uitzenden, en daarmee zelfs antimaterie kan produceren. Door hun toevallige optreden zijn rechtstreekse metingen aan bliksemschichten moeilijk uit te voeren. Ook kunnen ze maar zeer gedeeltelijk in het laboratorium nagebootst worden. Vandaar dat de wiskundige modellering van onweersverschijnselen uiterst belangrijk is. Christoph Köhn, Margreet Nool en Ute Ebert leggen uit hoe zij ontladingen simuleren met behulp van verschillende modellen waarin een dichtheidsbenadering en een deeltjesbeschrijving voor elektronen gecombineerd kunnen worden.

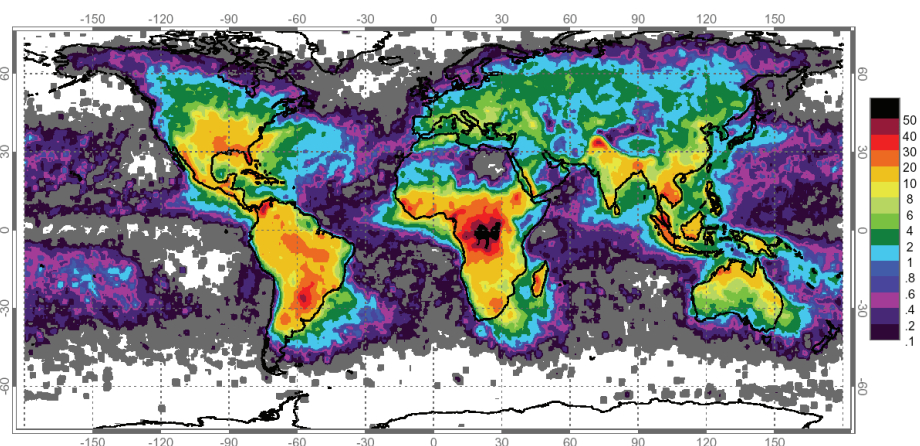
In 2010 werden door de NASA-satelliet Fermi [2] bundels van elektronen en positronen (hun antideeltjes) waargenomen boven Egypte. Hun bron was in tijd en ruimte gecorreleerd met een bliksemschicht boven Zambia, want geladen deeltjes volgen buiten de atmosfeer de lijnen van het aardmagnetisch veld. Het duidelijke positronensignaal op de satelliet was een opzienbarende ontdekking, omdat de rustenergie van een elektron of een positron 511 keV bedraagt en dientengevolge de productie van zulke paren een energie van meer dan 1 MeV vereist. Ter vergelijking: een elektron dat tussen twee plaalectroden wordt versneld met een spanning van 1 Volt, krijgt ten hoogste een energie van een elektronvolt (1 eV). Typische energiewaarden van elektronen in ontladingen zijn enkele eV, omdat de energie die nodig is om een molecuul in lucht te ioniseren — dat is de energie om een elektron uit de elektronenschil te stoten — tenminste 12 eV bedraagt voor zuurstof en tenminste 15 eV voor stikstof.

Om paren van elektronen en positronen te genereren, moeten fotonen (dat zijn licht-

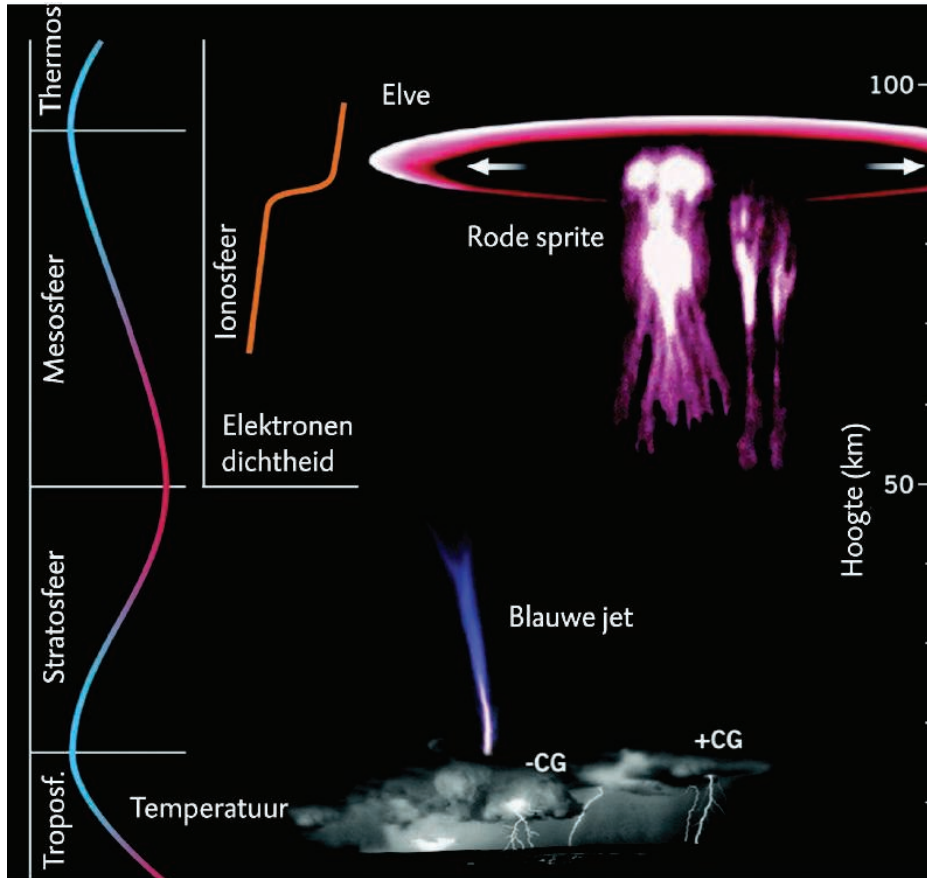
deeltjes oftewel quantumpakketjes van elektromagnetische straling) met energieën van enkele MeV met luchtmoleculen botsen. Fotonen in gammastralingsflitsen uit onweerswolken kunnen inderdaad zulke hoge en zelfs hogere energieën bereiken, zoals we sinds 1994 uit studies van *terrestrial gamma-ray flashes* (TGFs) [6] uit onweerswolken geleerd hebben.

Onweer is een belangrijk verschijnsel op onze aardbol. Daarvan kunnen we ons in Nederland geen goed beeld vormen, want dichterbij de evenaar kan de bliksemintensiteit wel meer dan honderd keer zo groot zijn als in ons land, zie Figuur 1. Ten eerste vormt onweer in tropische gebieden een sterke bron van stikstofoxide, dat een belangrijk broeikasgas is [12]. Ten tweede kunnen bliksemschichten schade aanrichten aan gebouwen, windmolens of vliegtuigen, en aan onze elektrische en elektronische apparatuur. Daarnaast kunnen zij zelfs dodelijk zijn.

Naast bliksems zijn er ook ontladingen, zoals *sprites* (reuzenbliksems, die uit de ionosfeer omlaag schieten), *elves* (uitdijende gloeiende ringen aan de onderkant van de ionosfeer) en *jets* (bliksems, die uit een wolk omhoog schieten), zie Figuur 2. Deze vormen van ontladingen zijn naar figuren uit *Een mid-*



Figuur 1 De verdeling van bliksems op aarde gemiddeld over een jaar. De zwarte gebieden langs de evenaar zijn gebieden waar bijzonder vaak bliksems worden gemeten [13].



Figuur 2 Verschillende soorten ontladingen boven onweerswolken tot een hoogte van 100 km: blauwe jets, rode sprites en als hoogste elves. Tot ongeveer 16 km komen de gewone bliksemontladingen (CG = cloud to ground = van wolk naar aarde) voor, die zowel positieve als negatieve ladingen van een wolk naar de aarde transporteren [11].

zomernachtsdroom van William Shakespeare genoemd. Dit type ontladingen vindt echter niet tussen een wolk en de aarde plaats, maar boven de wolken. Op een hoogte tussen 20

en 40 km kunnen blauwe jets worden geobserveerd. Tot een hoogte van 80 of 90 km komen er rode sprites voor en daarboven de zogenaamde elves. Niet alleen worden deze op een veel grotere hoogte dan bliksems waargenomen, zij zijn ook veel langer. Zo kan een sprite een lengte van 40 km hebben. Dit komt doordat de intrinsieke lengteschaal van een ontlading bepaald wordt door de afstand die een elektron kan afleggen tussen botsingen met luchtmoleculen, en die is ordes van grootte hoger in de zeer ijle lucht onder de ionosfeer. Sprites zijn in feite de eerste atmosferische ontladingen die gedeeltelijk door simulaties verklaard kunnen worden [5, 10].

De beweging van elektronen in lucht

Om een ontlading zoals een bliksem tot stand te brengen en in beweging te houden, moet er aan verschillende fysische omstandigheden voldaan zijn. Ten eerste zijn er vrije elektronen nodig die zich door een achtergrondgas voortplanten. In het geval van bliksem is dat lucht, maar in een laboratorium kunnen ook andere gassen worden gebruikt. Ook kennen we bliksems op andere planeten [3], bijvoorbeeld op Jupiter of Saturnus waar de atmosfeer uit waterstof en helium bestaat. Verder is

er een elektrisch veld nodig waarin de elektronen worden versneld. Figuur 3 demonstreert de beweging van elektronen in lucht, die afwisselend vrij bewegen en met luchtmoleculen botsen.

Tussen twee botsingen volgen vrije elektronen de bewegingsvergelijkingen in een elektrisch veld:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}(\vec{r}), \quad \vec{p} = \frac{m_e \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1)$$

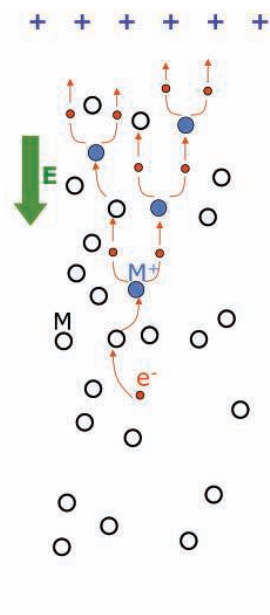
waar \vec{p} de relativistische impuls, \vec{v} de snelheid, m_e de massa en e de lading van een elektron zijn. $\vec{E}(\vec{r})$ is het elektrische veld waarin de elektronen worden versneld en c is de lichtsnelheid.

Botsingen zijn toevallige processen waarvan de waarschijnlijkheid wordt gegeven door

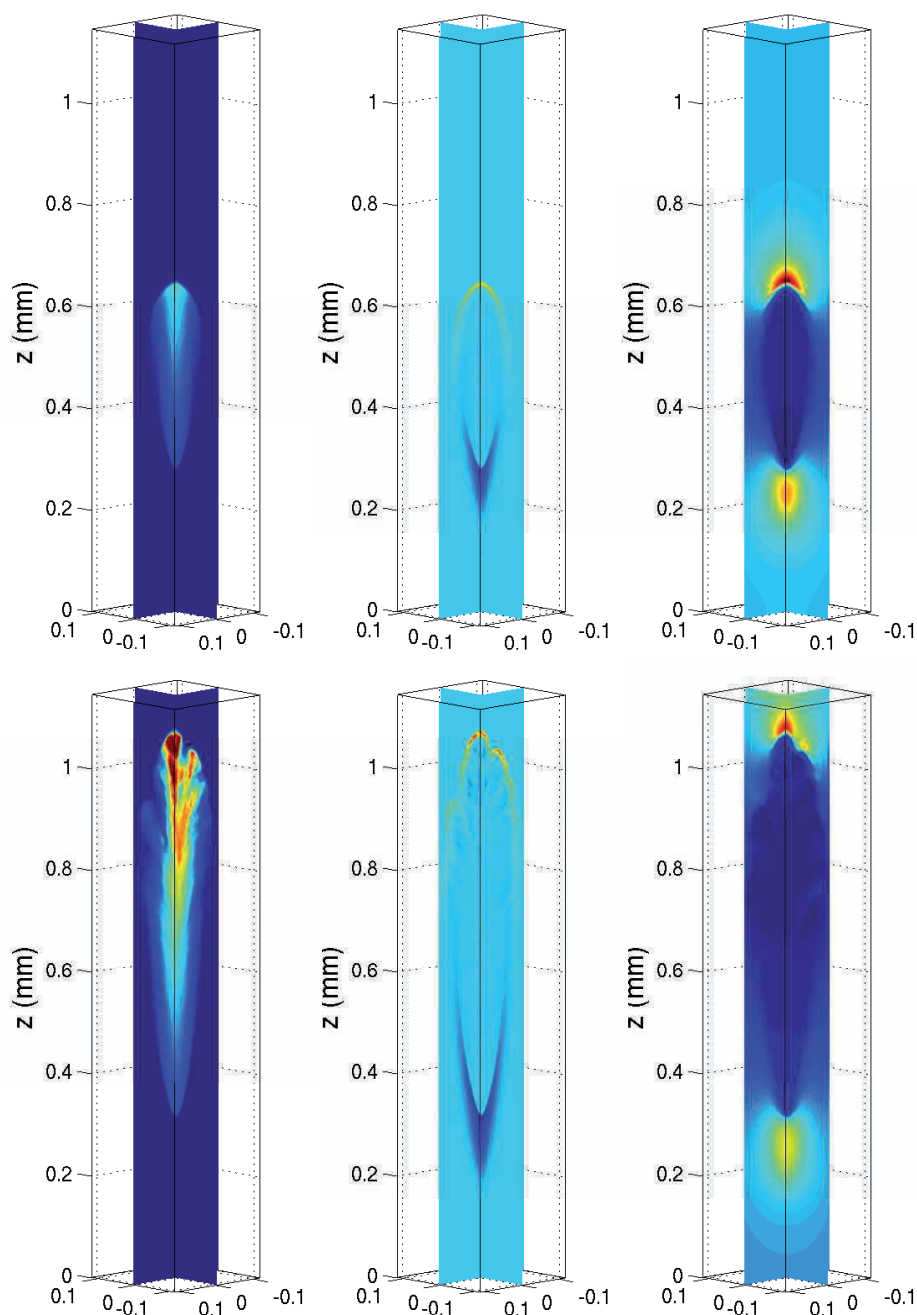
$$P = 1 - \exp(-\sigma_n(|\vec{v}|) \cdot |\vec{v}| \cdot n_B(z) \cdot \Delta t) \approx \sigma_n(|\vec{v}|) \cdot |\vec{v}| \cdot n_B(z) \cdot \Delta t. \quad (2)$$

Hierbij is $n_B(z)$ de dichtheid van het achtergrondgas op hoogte z en Δt het tijdsinterval waarbinnen de beweging van een elektron wordt bekeken. $\sigma_n(|\vec{v}|)$ is de werkzame doorsnede (*cross section*), dat is het botsingsoppervlak van twee deeltjes dat van de snelheid \vec{v} van het elektron afhangt. n is een index voor de verschillende types botsingen die kunnen plaatsvinden. Een botsing kan volledig elastisch zijn, of het molecuul kan in verschillende toestanden aangeslagen worden, toestanden waarbij het molecuul trilt of roept, of waarbij een elektron in een molecuul op een hogere energetische schil zit dan normaal. Hierdoor verliest het botsende elektron energie. Een heel belangrijk soort botsing is de ionisatie, waarbij een elektron door een inkomend elektron uit de elektronenschil van een molecuul naar buiten gestoten wordt en een positief ion achterlaat. Op deze manier groeit de hoeveelheid vrije elektronen. Daar staat een verliesmechanisme tegenover, waar een elektron aan een zuurstofmolecuul vast plakt. Als het elektrische veld hoog genoeg is (meer dan 3,2 MV/m in lucht op zeeniveau), neemt het aantal elektronen met de tijd toe en ontstaat er een elektronenwolk die zich door de lucht beweegt.

Deze beweging van elektronen door de lucht kan het beste door een Monte Carlo-deeltjesmodel worden beschreven. Dit model volgt vrije elektronen volgens (1), die aselekt botsen met de luchtmoleculen die als toevallige achtergrond gemodelleerd worden.



Figuur 3 Als een elektron door gas beweegt, botst het vaak met de moleculen. Afhankelijk van de elektronenenergie vinden verschillende elastische, inelastische en ioniserende botsingen plaats.



Figuur 4 De linkerkolom toont de elektronendichtheid, de middelste kolom de negatieve ruimtelading en de rechterkolom het elektrische veld op de tijdstippen 0,72 ns en 0,90 ns. De resultaten zijn alle verkregen met het hybride model, een combinatie van het deeltjes- en dichtheidsmodel. Na ongeveer 0,46 ns is namelijk het aantal elektronen meer dan 2×10^7 en dan treedt het dichtheidsmodel in werking binnen de streamer. Aan de randen blijven de elektronen gevolgd worden met het deeltjesmodel [9].

Dit kan echter meer elektronen opleveren dan vandaag de dag gesimuleerd kunnen worden. Hoe hiermee om te gaan, bespreken we verderop.

Een belangrijk mechanisme is dat overal evenveel positieve als negatieve deeltjes ontstaan op grond van het behoud van lading, maar dat ze — voornamelijk door de beweging van de snelle en lichte elektronen — in een uitwendig elektrisch veld van elkaar gescheiden worden. Daardoor ontstaat er een ladingsver-

deling $\rho(\vec{r}, t)$, die het elektrostatische veld \vec{E} verandert volgens de Poisson-vergelijking

$$\Delta\phi(\vec{r}, t) = -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}, \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t). \quad (3)$$

Streamers: de solitonen van de ontlading

Door de combinatie van de ionisatiereactie in het uitwendige veld en de Poisson-vergelijking ontstaan er onmiddellijk niet-lineaire structuren in een ontlading, die ook

wel *streamers* genoemd worden. Net als een soliton bewegen deze door de ruimte zonder dat hun ruimtelijke structuur veel verandert. Figuur 4 toont streamers die met behulp van een hybride model zijn gesimuleerd (zie verderop).

Streamers worden voortgestuwd door een uitwendig elektrisch veld, maar dat veld kan wel onder de kritische waarde van 3,2 MV/m liggen. Omdat het binnenste van de streamer voldoende sterk geïoniseerd is, schermt deze zich af van het uitwendige elektrische veld. Dit wordt veroorzaakt door een dunne schil van ruimtelading aan de buitenkant, die het veld voor de streamerkop sterk verhoogt. Hier krijgt het veld waarden tot hoog boven het kritische veld, en vindt botsingsionisatie plaats, waardoor de streamer groeit. Hier worden ook de moleculen aangeslagen, waardoor uiteindelijk broeikasgassen ontstaan zoals eerder genoemd.

Streamers vormen de allereerste stap van een gepulste ontlading, en ze effenen de weg voor een latere bliksemschicht.

Veelschalige ruimtelijke structuur

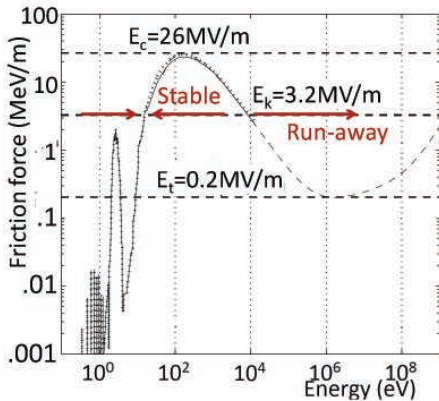
Een enkele streamer heeft al een veelschalige inwendige structuur, en vaak treden streamers in sterk vertakte boomstructuren op. We bespreken hier nog niet de strategie hoe de boomstructuur aan te pakken, maar beperken ons tot rekenmodellen voor enkele streamers.

Het hierboven besproken *deeltjesmodel* bootst direct de boven besproken elektrodynamica in lucht na. Wordt het aantal deeltjes echter te groot voor het computergeheugen, dan worden *superdeeltjes* geïntroduceerd, die uit meer dan één deeltje bestaan. Het rekenen met deze superdeeltjes kan echter tot gevolg hebben dat zich niet-fysische verschijnselen voordoen in de oplossing.

De traditionele aanpak van berekeningen bestaat uit een dichtheidsbenadering voor de elektronen, die echter fluctuaties van dichtheden en energieën van elektronen niet goed kan weergeven. Om de rekenaars efficiëntie van de dichtheidsbenadering te combineren met een deeltjesaanpak, hebben we een *hybride-in-ruimte*-model ontwikkeld.

Dichtheidsmodel

Dit model is een benadering van het deeltjesmodel, maar veel details zoals fluctuaties kunnen niet goed in dit model opgenomen worden. Het is bekend dat in een constant elektrisch veld de elektronenenergie varieert binnen de elektronenzwerm. Aan de voorkant



Figuur 5 De wrijvingskracht in lucht als functie van de elektronenenergie.

van de zwerm hebben de elektronen een hogere energie en zullen eerder ioniseren dan de elektronen aan de achterkant van de zwerm. Bovendien hebben deze laatste ook een lagere snelheid. De klassieke dichtheidsmodellen houden hier geen rekening mee en zullen minder nauwkeurige resultaten leveren. Vandaar dat wij het klassieke dichtheidsmodel hebben uitgebreid. Door de eerste term van de gradiëntexplosie in de elektronendichtheid op te nemen in de botsingsionisatiesnelheid, worden zowel de locatie van de deeltjeszwerm als de planaire ionisatie aan de voorzijde van de streamer goed benaderd.

Verder wordt gebruik gemaakt van adaptieve roosterverfijning, zodat in die gebieden waar de oplossing snel fluctueert, zoals aan de kop van de streamer, op een fijn numeriek rooster de simulatie berekend wordt, terwijl elders waar de oplossing glad is, op een veel grover rooster gerekend kan worden. Dit reduceert zowel de simulatietijd als het geheugengebruik ten opzichte van een fijn rooster in het gehele gebied.

In de nabije toekomst zullen de resultaten van onze collega's Dujko e.a. [4], die een hogere-orde-model voor streamers afgeleid hebben, toegepast gaan worden. Gebruikmakend van de impulsoverdrachtstheorie, worden de dichtheidsvergelijkingen verkregen als snelheidsmomenten van de Boltzmannvergelijkingen. In het oude model worden twee behoudsvergelijkingen opgelost, namelijk die van de deeltjes- en de stroomdichtheid. In [4] wordt dit systeem uitgebreid naar vier vergelijkingen, namelijk met die voor energie en energiestroomdichtheid. Als de Boltzmann-theorie zonder benaderingen toegepast zou worden, dan zijn er oneindig veel vergelijkingen nodig. Hier beperkt men zich tot vier vergelijkingen, die een veel nauwkeurigere oplossing bieden ten opzichte van het oude model met slechts twee vergelijkingen.

Hybride model

Dit model koppelt het deeltjesmodel aan het dichtheidsmodel door middel van een (mee)bewegende modelinterface. Bij een streamerontlading bevinden de meeste elektronen zich juist in gebieden waar het elektrisch veld laag is, in het binnenste van de streamer. Dit gebied laat zich goed beschrijven door een dichtheidsmodel.

Relatief weinig elektronen bevinden zich aan de voorkant van de streamer of buiten de streamer. Precies deze elektronen moeten afzonderlijk gevolgd worden en niet samen genomen worden in superdeeltjes, zoals in de deeltjesmethode. Dit *hybride-in-ruimte*-model, in plaats van een willekeurige hybride methode, maakt gebruik van een bufferzone, een overgangsgedebied tussen deeltjes en dichtheden.

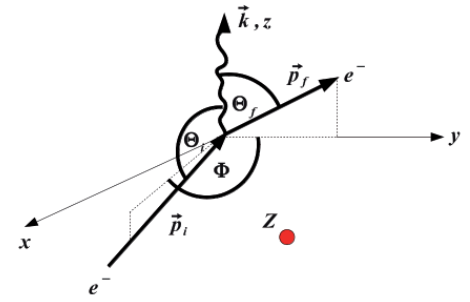
Wanneer de elektronenstroom over de interface tussen deeltjes- en dichtheidsmodel wordt berekend, moet dit fysisch consistent zijn. Daarom moeten aan beide kanten van de interface dezelfde *coëfficiënten* gebruikt worden. Gebeurt dit niet, dan kan er op de interface een discontinuïteit optreden in de elektronendichtheid. Een belangrijk voordeel van dit *hybride-in-ruimte*-model is dat het de beweeglijke deeltjes alleen volgt in de dynamisch meest interessante gebieden. De noodzaak om over te gaan tot superdeeltjes speelt dus veel later in de simulatie een rol.

Gamma- en antimaterieflitsen

In 1994 werden de eerste gammaflitsen gemeten vanuit een satelliet [6]. Volgens recente metingen kan de energie van enkele lichtdeeltjes in deze *Terrestrial Gamma-ray Flashes* (TGFs) tot 40 MeV of mogelijk zelf tot 100 MeV oplopen. Veel aardse gammaflitsen zijn gecorreleerd met sterke negatieve ontladingen, die binnen de wolk naar boven gaan. Zoals eerder vermeld, zijn twee jaar geleden ook bundels van positronen gemeten. De verklaring van deze verschijnselen moet gezocht worden in een uitbreiding van ontladingsmodellen naar hoge energieën. We bespreken nu belangrijke elementen ervan.

Weglopende elektronen

Door inelastische en ioniserende botsingen verliezen de elektronen voortdurend energie. De gemiddelde impulsverliezen kunnen door een wrijvingskracht $\vec{F}_w(\mathcal{E}, \vec{r})$ benaderd worden, die van de positie \vec{r} en de energie \mathcal{E} van de elektronen afhangt. De gemiddelde beweging van een elektron met een gemiddelde energie \mathcal{E} wordt dan door de niet-lineaire



Figuur 6 Een elektron met een impuls \vec{p}_i botst met een molecuul met atoomnummer Z en emitteert een foton met een impuls $\hbar\vec{k}$ zodat het elektron hierna een impuls \vec{p}_f heeft. De hoeken Θ_i , Θ_f en Φ beschrijven de volledige geometrie van dit proces [8].

vergelijking

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}(\vec{r}) - \vec{F}_w(\mathcal{E}, \vec{r}) \quad (4)$$

benaderd, waar $e\vec{E}(\vec{r})$ de gemiddelde versnellingskracht in het elektrische veld is. Figuur 5 toont de wrijvingskracht in lucht als functie van de elektronenenergie [7]. Ook is de versnellingskracht in een veld van 3,2 MV/m als horizontale lijn aangeduid.

Bij elektronenenergieën onder 0,01 eV komen alleen elastische botsingen voor; dan is er geen wrijving en de elektronen kunnen alleen maar versneld worden. Boven 0,1 eV neemt de wrijving snel toe door de verschillende types inelastische botsingen, tot aan een maximum bij 200 eV. Als de elektronenenergie verder groeit, nemen de botsingsdoorsnedes en dus de wrijving af (want de elektronen zijn bij wijze van spreken te snel voor een intensieve wisselwerking). De wrijving stijgt weer boven 1 MeV, waar relativistische effecten belangrijk worden, zoals de emissie van gammastralen.

Als de elektronen tegelijkertijd versneld worden door een veld van 3,2 MV/m, dan is de totale kracht (4) positief voor elektronen met energieën $\mathcal{E} < 10$ eV en $\mathcal{E} > 10$ keV en negatief daartussen. Dit betekent dat elektronen met $\mathcal{E} < 10$ eV gemiddeld versneld worden en dat elektronen met $10 \text{ eV} < \mathcal{E} < 10 \text{ keV}$ gemiddeld 10 eV bereikt hebben. Elektronen met een energie groter dan 10 keV daarentegen worden verder en verder versneld en lopen weg. Ze heten daarom *run-away* elektronen.

Ontladingsmodellen proberen dus te ontzorgen of elektronen tot in het wegloopgebied versneld kunnen worden en welke elektronen welke energieën kunnen bereiken.

Remstraling, gammaflitsen en antimaterie

De weglopende energetische elektronen zijn

ook nu weer de oorzaak van de gammaflitsen. Als de elektronen met moleculen botsen, kunnen ze een deel van hun energie uitstralen, de zogenaamde remstraling. Remstraling bestaat uit fotonen, en als de elektronen energieën boven 1 MeV hebben, kunnen enkele fotonen zich ook binnen het energiegebied van gammastraling bevinden.

De effectieve doorsnede voor remstraling in lucht werd in 1934 berekend door Bethe en Heitler [1]. Zij leidden een uitdrukking af voor

$$\mathcal{H} := \frac{d^4\sigma}{d\omega d\Omega_i d\Omega_f d\phi}(E_{kin,i}, \omega, \Theta_i, \Theta_f, \phi), \quad (5)$$

die zowel van de energie van het inkomende elektron en van het uitlopende foton alsmede van de volledige geometrie afhangt (Figuur 6), waar de ruimtehoeken gedefinieerd worden door $d\Omega_{i,f} = \sin\Theta_{i,f} d\Theta_{i,f}$. De volledige expressie is echter te lang om hier uit te schrijven.

Door \mathcal{H} te integreren over de hoeken die het uitlopende elektron parametriseren,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega_i}(E_{kin,i}, \omega, \Theta_i) \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\Theta_f=0}^{\pi} \mathcal{H} d\Omega_f d\phi, \end{aligned} \quad (6)$$


hebben wij een uitdrukking afgeleid die slechts afhangt van de energiewaarden en de hoek tussen de richting van het inkomende elektron en van het uitgezonden foton [8]. De integratie kan volledig analytisch in twee stappen worden uitgevoerd: De integralen over ϕ hebben de vorm $\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi a_{nm} \cos^{m-1} \phi / (\alpha \cos \phi + \beta)^n$, met $n, m \in \{1, 2\}$, waar de waarden van a_{nm} niet van ϕ afhangen. Dit soort integralen kan met behulp van de residustelling worden berekend. De resulterende integraal, die slechts van Θ_f afhangt, kan dan eenvoudig worden berekend uit de primitieve functie met de bijbehorende grenzen.

De integratie levert twee voordelen op: in de Monte Carlo-procedure zijn minder toevalsgetallen nodig, en we krijgen meer inzicht in de richting van de uitgezonden fotonen [8]. Zullen ze als een bundel een sa-

telliet bereiken of vanuit de wolk alle kanten op gaan? Onze analyse laat duidelijk zien dat elektronen met een energie boven 500 keV, fotonen overwegend in de voorwaartse richting uitzenden. Daaronder wordt de straling gelijkmatiger in alle richtingen geëmitteerd.

Als de ontlading naar boven loopt, zullen de zeer energetische remstraling-fotonen ook naar boven lopen. Onderweg kunnen ze weer een wisselwerking hebben met de lucht-moleculen. Fotonen met energieën boven 1 MeV kunnen daarbij een elektron-positron-paar genereren. Deze bundels van materie-antimaterie zijn in 2011 door de Fermi-satelliet waargenomen.

De vergelijkingen die de paarproductie beschrijven, tonen een fysische symmetrie met de vergelijkingen voor remstraling. Daarom konden we de analyse en integratie voor remstraling overdragen op paarproductie.

Hiermee hebben we enkele belangrijke fysische processen in ontladingen besproken. Er is echter nog veel werk nodig om een meer gedetailleerd beeld van de verschijnselen te ontwikkelen. 

Referenties

- H.A. Bethe en W. Heitler, On the stopping of fast particles and on the creation of positive electrons, *Proc. Phys. Soc. London* 146 (1934), pp. 83–112.
- M.S. Briggs et al., Electron-positron beams from terrestrial lightning observed with Fermi GBM, *Geophys. Res. Lett.* 38 (2011), L02808.
- D. Dubrovin et al., Sprite discharges on Venus and Jupiter-like planets: a laboratory investigation, *J. Geophys. Res.*, 115 (2010), A00E34.
- S. Dujko, A.H. Markosyan, R.D. White en U. Ebert, 2013. High order fluid model for streamer discharges: I. Derivation of model and transport data, submitted to *J. Phys. D: Appl. Phys.*, preprint: <http://arxiv.org/abs/1302.4115>.
- U. Ebert, De bliksem op het spoor, *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde*, augustus 2009, pp. 300–305.
- G.J. Fishman et al., Discovery of intense gamma-ray flashes of atmospheric origin, *Science* 264 (1994), pp. 1313–1316.
- A.V. Gurevich, On the theory of runaway electrons. *Sov. Phys. JETP-USSR* 12 (1961), pp. 904–912.
- C. Köhn en U. Ebert, 2012. Angular distribution of Bremsstrahlung photons and of positrons for calculations of terrestrial gamma-ray flashes and positron beams, te verschijnen in: *Atmospheric Research*, ATMOS 2874, preprint: arxiv.org/abs/1202.4879.
- Chao Li, Jannis Teunissen, Margreet Nool, Willem Hundsdorfer en Ute Ebert, A comparison of 3D particle, fluid and hybrid simulations for negative streamers, *Plasma Sources Sci. Technol.* 21 (2012), 055019(14pp).
- A. Luque en U. Ebert, Emergence of sprite streamers from screening-ionization waves in the lower ionosphere, *Nature Geoscience* 2 (2009), pp. 757–760, Published online: 25 October 2009, doi:10.1038/ngeo662.
- T. Neubert, On Sprites and their Exotic Kin, *Science* 300 (2003), pp. 741–749.
- Vladimir A. Rakov en Martin A. Uman, *Lightning: Physics and Effects*, Cambridge University Press, 2007.
- www.nasa.gov/vision/earth/lookingatearth/lightning_safety2005.html.