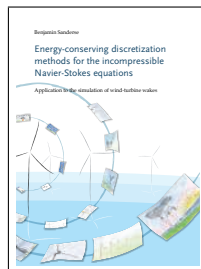


In de verdediging

| In defence



Energy-conserving discretization methods for the incompressible Navier–Stokes equations

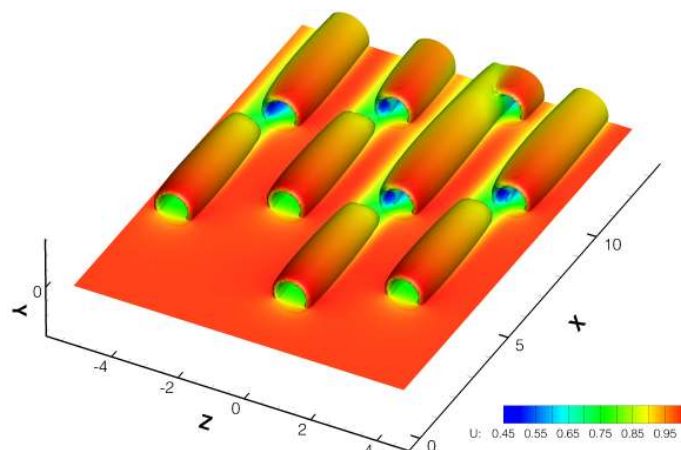
Benjamin Sanderse

“Onderzoek doen aan de Navier–Stokes-vergelijkingen is extra spannend zolang de existentie en uniciteit van hun oplossingen niet bewezen is.” Zo luidt de volgens hemzelf mooiste stelling bij het proefschrift van Benjamin Sanderse, die op 19 maart cum laude promoveerde aan de Technische Universiteit Eindhoven. Op het eerste gezicht een verrassend ‘zuiver wiskundige’ stelling voor iemand die werkte aan windmolenparksimulaties voor het Energieonderzoek Centrum Nederland (ECN) in Petten. Een groot deel van zijn onderzoek en zijn belangrijkste resultaten waren echter heel fundamenteel numeriek wiskundig van aard. “Het werk aan de Navier–Stokes-vergelijkingen, ook al is dat heel bescheiden en met behulp van numerieke methoden, is juist zo interessant omdat je een kleine bijdrage kan leveren aan het begrip van het totale probleem. Misschien vinden we met nauwkeurige numerieke simulaties wel hints die het wiskundige bewijs kunnen helpen”, aldus Sanderse.

Sanderse schreef zijn proefschrift *Energy-conserving discretization methods for the incompressible Navier–Stokes equations; Application to the simulation of wind-turbine wakes* onder begeleiding van prof.dr.ir. Barry Koren en deed een groot deel van het onderzoek aan het Centrum Wiskunde & Informatica. Hij ontwikkelde numerieke methoden voor de simulatie van turbulente stromingen, beschreven door de incompressibele Navier–Stokes-vergelijkingen, en gebruikte deze methoden om de stroming van lucht in windmolenparken uit te rekenen.

Windmolenparken en numerieke simulaties

In windmolenparken op zee staan grote aantallen windmolens dichtbij elkaar opgesteld. Nadeel daarvan is dat de windmolens de luchtstro-



Simulatie van een park met negen turbines. Achterliggende turbines hebben duidelijk een langer zog en de stromingssnelheid neemt er af tot onder de 50% van de vrije-veldwindsnelheid.

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht. Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd? Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland

verdediging@nieuwarchief.nl

mingen deels voor elkaar verstoren. De afname in stromingsnelheid leidt tot een vermogensverlies van gemiddeld zo'n tien procent, vergeleken met individueel opgestelde windmolens, en de toename in turbulente wervelingen zorgt voor een verhoogde belasting op de turbinebladen.

Met kennis over de luchtstromingen in een windmolenpark zouden het ontwerp van de turbines en de opstelling van windmolens in parken verbeterd kunnen worden. Simulaties van luchtstromingen aan de hand van rekenmodellen komen echter niet altijd goed overeen met de werkelijkheid. Turbulente stromingen worden gemodelleerd door de Navier–Stokes-vergelijkingen, partiële differentiaalvergelijkingen die de stroming van lucht en vloeistoffen beschrijven. Om numerieke simulaties te doen, worden deze continue vergelijkingen gediscretiseerd. Dit brengt echter vaak fouten met zich mee, omdat de oplossing van een gediscretiseerd probleem in het algemeen niet precies overeenkomt met de oplossing van het continue probleem. Als een eenmaal ontstane fout niet te hard groeit gedurende de berekening, wordt een numeriek algoritme stabiel genoemd.

In het geval van de Navier–Stokes-vergelijkingen introduceren veel standaard discretisatiemethoden kunstmatige diffusie om de oplossing stabiel te houden. Zulke 'numerieke' diffusie kan turbulente stromingsfenomenen echter uitdempen. Omdat juist die fenomenen belangrijk zijn voor het begrip van de aërodynamica, bestudeerde Sanderse in zijn proefschrift methoden die bepaalde invarianten van de continue vergelijkingen behouden wanneer oplossingen worden benaderd. Dit zorgt voor stabiele simulaties en voor fysisch realistische oplossingen. Specifieker, 'zijn' methodes introduceren geen kunstmatige diffusie, maar zijn toch stabiel doordat ze de totale kinetische energie van de stroming in het niet-viskeuze geval behouden. De kinetische energie van de stroming is in dit geval een (kwadratische) invariant die een bovengrens aan de oplossing stelt. Als de discretisatie die energie behoudt, is de oplossing dus ook begrensd, waardoor stabiliteit verzekerd is.

Een lastig en groot probleem

In een windmolenpark is er een wisselwerking tussen de lokale stroming rondom individuele turbinebladen en het grote zog dat achter iedere turbine ontstaat en de stroming rond achterliggende molens beïnvloedt. Het gedetailleerd uitrekenen van de stroming rondom de turbinebladen vraagt om rekencellen met een typische afmeting in de orde van millimeters, terwijl de belangrijke zogeffecten over afstanden van honderden meters tot kilometers plaatsvinden. Het is daarom zelfs met enorm krachtige (parallele) computers onmogelijk om beide effecten nauwkeurig uit te rekenen. Voor turbinebladsimulaties wordt daarom het zog versimpeld of maar beperkt uitgerekend. Een standaardaanpak voor zogsimulaties is om niet het turbineblad zelf te modelleren maar wel hun effect: het turbineblad wordt versimpeld door gebruik te maken van zogenaamde *actuator disks* (trekkende schijven) met voorgeschreven krachten op de plek van de turbine. Voor het implementeren van deze krachten, met hun resulterende discontinuïteiten in de stromingsvariabelen, heeft Sanderse een nieuwe, scherpe en niet-diffusieve methode voorgesteld.

Energiebehoud en nauwkeurighedsanalyses

Voor het zover was construeerde hij eerst energiebehoudende discretisatiemethoden van het continue probleem, in het bijzonder tweede en vierde-orde nauwkeurige eindige volumemethoden op zogenaamde

staggered cartesische roosters. De variabelen worden hierbij niet alle op dezelfde roosterpunten gekozen, maar om en om, met als resultaat een discretisatie die massa, impuls, energie en vorticeit behoudt. Sanderse heeft nieuwe randvoorwaarden voor deze methoden afgeleid, die zodanig zijn dat de bijdragen van de rand aan de discrete energievergelijking de bijdragen van de continue energievergelijking nabootsen. Hij analyseerde bovendien de bijdrage van de rand op de nauwkeurigheid van de methoden.

Als de (incompressibele) Navier–Stokes-vergelijkingen eenmaal ruimtelijk gediscretiseerd zijn, komt de tijdsintegratie aan bod. Hiervoor worden standaard Runge–Kutta-methoden (RK-methoden) gebruikt, maar waarom die precies werken voor de Navier–Stokes-vergelijkingen was nog onbekend. RK-methoden zijn ontworpen voor gewone differentiaalvergelijkingen $\frac{du}{dt} = f(u, t)$, maar eenmaal gediscretiseerd in de ruimte zijn de Navier–Stokes-vergelijkingen geen systeem van gewone differentiaalvergelijkingen, maar een systeem van differentiaal-algebraïsche vergelijkingen. Het belangrijkste resultaat in het proefschrift van Sanderse is zijn nauwkeurighedsanalyse van de RK-methoden, toegepast op de Navier–Stokes-vergelijkingen. Er bestond al wel theorie over hoe RK-methoden op differentiaal-algebraïsche vergelijkingen kunnen worden toegepast, maar dat was nog niet eerder voor Navier–Stokes gedaan. Door die theorie te gebruiken kon Sanderse heel veel bestaande methoden in een bredere context plaatsen en werd duidelijk waarom deze bestaande methoden werken.

Fundamentele wiskunde voor praktische doeleinden

De vraag rijst hoe Sanderses fundamentele werk te rijmen is met het feit dat zijn onderzoek volledig door ECN werd gefinancierd. "Het mooie is, dat mijn resultaat wel direct toegepast kan worden voor het uitrekenen van praktische problemen. Ik heb het ook in mijn code gestopt voor het simuleren van stromingsproblemen en het was in die zin dus ook meteen nuttig voor ECN", aldus Sanderse. Hij roemt de combinatie van het werken bij het CWI en ECN. Op het CWI heerst een fantastische onderzoekssfeer, een ideale plek voor concentratie en rust, maar er was ook altijd wat te doen naast het werk. De absolute onderzoeksvrijheid (met dank aan Barry Koren) vond hij een enorm voorrecht. Op het ECN werd hij altijd bewust gemaakt van de noodzaak om wiskundige modellen naar de praktijk te brengen en zijn onderzoek toe te passen op windenergie-problemen.

Sanderse bracht ook twee maanden door bij het National Renewable Energy Laboratory (NREL) in het Amerikaanse Boulder, Colorado. Een buitenkans voor Sanderse, die heel erg van wielrennen houdt. Niet alleen kon hij volledig ongestoord aan zijn onderzoek werken, hij kon het werk ook afwisselen met wielrennen en wandelen in de Rocky Mountains.

Ten tijde van het interview combineerde hij wielrennen met zwemmen en hardlopen om te trainen voor een halve triatlon, die hij inmiddels heeft voltooid. Na zijn promotie is hij bij Shell in Amsterdam aan de slag gegaan. Hij werkt daar aan numerieke methoden voor de simulatie van meergefase-stromingen (gas, olie en water). Ook hiervoor worden de Navier–Stokes-vergelijkingen gebruikt. Of hij de diepgang en de langetermijnprojecten van het academische onderzoek gaat missen of niet zal moeten blijken. Voorlopig vindt Sanderse het vooral interessant om te zien hoe er in het bedrijfsleven wordt gewerkt, en dat wiskundige methoden niet alleen in artikelen voortleven, maar echt worden gebruikt voor het oplossen van praktische problemen. ←