

Brenny van Groesen

*Toegepaste Wiskunde, Universiteit Twente, Enschede
LabMath-Indonesia, Bandung, Indonesië
e.w.c.vangroesen@utwente.nl*

Frits van Beckum

*Ede
frits@vanbeckum.nl*

Watergolven

Brenny van Groesen en Frits van Beckum schetsen in deze bijdrage een variationele formulering voor de beweging van het wateroppervlak. De variationele formulering behoudt de Hamiltoniaanse structuur van de dynamische vergelijkingen voor het oppervlak, en is daarom heel geschikt voor het modelleren en simuleren van oppervlaktegolven. Ter illustratie behandelen de auteurs voorbeelden uit hun eigen onderzoek aan de Universiteit Twente dat sinds de negentiger jaren in nauwe samenwerking met Indonesische instituten en studenten is uitgevoerd.

De vijfde plaats van Nederland in de lijst van kenniseconomielanden is voor een deel te danken aan de maritieme industrie waarin we internationaal koploper zijn. Dit wordt mede mogelijk gemaakt door de goede infrastructuur, waardoor wetenschappelijke vragen en resultaten direct worden uitgewisseld met bedrijven/industrie. Het maritiem instituut MARIN in Wageningen vervult hierin als een spin in het web een belangrijke rol. De relevantie van maritieme kennis is begrijpelijk omdat circa 45 procent van de wereldbevolking op minder dan honderd kilometer van de kust woont; acht van de tien grootste steden met hun grote economische activiteit liggen aan de kust. Dit vereist een goede infrastructuur, zoals dijken, havens en offshore platforms, voor bescherming tegen het water, voor transport van grondstoffen en producten, en voor het delven van olie en gas en het winnen van windenergie.

Naast de praktische relevantie is ook de menselijke fascinatie voor waterbewegingen en golven in het verleden en heden een belangrijke drijfveer voor onderzoek van de meer wetenschappelijke kanten van watergolven. Wie is niet verbaasd over de zich nooit herhalende golven aan het strand, of de merk-

waardige golfpatronen in een rivier of van regenwater op een hellende straat. Ook in wetenschappelijk opzicht is Nederland zichtbaar: bekende vergelijkingen dragen de namen van Korteweg en de Vries en van Burgers; de ideeën van Huygens zijn net zo belangrijk in de theorie van watergolven als in die van licht. Heden ten dage worden numerieke codes die zijn ontwikkeld door 'Delft' dagelijks door duizenden over de hele wereld gebruikt. Software zoals 'SWAN' (Booij, Van Vledder e.a.) en 'Delft3D' (Guus Stelling e.a.) maakt dat Delft met de TU Delft en Deltares een tweede zwaartepunt is in het nationaal maritiem onderzoek.

Hieronder geven we in vogelvlucht een aantal ontwikkelingen in het begrijpen van vrije oppervlaktegolven. We beginnen met een korte samenvatting van de basisvergelijkingen die de beweging van het wateroppervlak beschrijven. Via Newton, Euler, Boussinesq en Zakharov arriveren we bij een variationale formulering die vooral voor modelleren en simuleren zeer bruikbaar blijkt. Daarna illustreren we verschillende verschijnselen en geven enkele toepassingen.

De behandelde voorbeelden zijn een keuze uit ons onderzoek van de laatste jaren op

de Universiteit Twente in samenwerking met het onderzoeksinstituut LabMath-Indonesia in Bandung.

Beschrijving van oppervlaktegolven

Klassieke mechanica

De klassieke mechanica voor wrijvingsloze puntmassa's begint bij Newton. We nemen een aantal puntmassa's, met gelijke constante massa m , die kunnen bewegen in een vlak, waar de posities op tijd t worden aangegeven met $q_k(t)$, samengevat in de vector $q(t)$. De bijbehorende impulsvector is gerelateerd aan de snelheid: $p = m\dot{q}$. Als de deeltjes een kracht op elkaar uitoefenen beschreven met een krachtveld F wordt de gehele dynamica samengevat als een stelsel van twee differentiaalvergelijkingen van eerste orde in de tijd:

$$\begin{cases} \dot{q} = p/m, \\ \dot{p} = F. \end{cases} \quad (1)$$

In geval F een conservatief krachtveld is, met potentiaal V , zodat $F(q) = -\nabla V(q)$, is het mogelijk de energie van het systeem te definiëren als de som van kinetische en potentiële energie, in dit geval gegeven door

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} |p|^2 + V(q). \quad (2)$$

Het is eenvoudig te verifiëren dat inderdaad $dH/dt = 0$ voor oplossingen van de dynami-

sche vergelijkingen. Maar, meer nog, de dynamische vergelijkingen kunnen nu in een canonicke vorm geschreven worden als

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial H / \partial p, \\ \dot{p} = -\partial H / \partial q. \end{cases} \quad (3)$$

Dit is de zogenaamde Hamiltoniaanse vorm, en H wordt de Hamiltoniaan genoemd, met q en p als canonicke geconjugeerde variabelen. Deze beschrijving geeft ook een directe relatie met het principe van stationaire actie in de klassieke mechanica, omdat de vergelijkingen precies de nodige voorwaarden zijn waaraan stationaire punten van de actiefunctionaal moeten voldoen, welke functionaal gegeven wordt door

$$\int [p\dot{q} - H(q, p)] dt. \quad (4)$$

De gebruikelijke Newtonse beschrijving wordt gevonden, na eliminatie van de impulsen, als een stelsel niet-lineair gekoppelde oscillatoren: $\dot{q} = -\partial V(q) / \partial q$.

Hamilton-consistent modelleren

De Hamiltoniaanse formulering heeft niet alleen een intrinsieke schoonheid, maar blijkt ook voor modelleren een grote waarde te hebben. De structuur garandeert onder andere energiebehoud: $\partial H(q, p) / \partial t = 0$. In het algemeen zal, wanneer we het stelsel via discretisatie, truncatie of anderszins door een benadering vervangen, een conservatieve kracht $F(q, p)$ niet vanzelf conservatief blijven, dus energiebehoud gaat verloren. Passen we echter de benadering toe op de potentiaal, of meer algemeen op de Hamiltoniaan, en leiden we dan het nieuwe stelsel af via de Hamiltoniaanse formulering, dan is er ook in het nieuwe stelsel behoud van energie. Deze laatste aanpak wordt Hamilton-consistent modelleren genoemd en is de basis waarop wij benaderingen, inclusief numerieke discretisaties, van de golfdynamica uitvoeren.

Continuïumdynamica

Voor de beschrijving van water heeft Euler de generalisatie gegeven van de wet van Newton. In die continuümtheorie zijn er oneindig veel 'deeltjes'. De snelheid, bijvoorbeeld, wordt dan gegeven door $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ als de snelheid van het deeltje dat ten tijde t op de plaats $\mathbf{x} = (x, y, z)$ is. Onsamendrukbaarheid van water (bij constante temperatuur), en de praktisch gesproken afwezigheid van viscositeit leiden tot aanzienlijke vereenvoudigin-

gen, in het bijzonder tot energiebehoud. Voor de beweging van een laag water moet ook de beschrijving van het bewegende oppervlak meegenomen worden. Die is gekoppeld aan de interne beweging als consequentie van de continuümaanname dat het vrije oppervlak, dat we beschrijven als $z = \eta(x, y, t)$, steeds uit dezelfde deeltjes bestaat (we sluiten brekende golven uit in het vervolg). Dan volgt daaruit de vergelijking $\partial_t \eta = N$, waarin ∂_t de partiële tijdafgeleide is, en N de normaalcomponent van de snelheid op het oppervlak. Deze kinematische relatie is de continuïteitsvergelijking.

In het onderzoek naar 'golven' in de daarop volgende eeuwen werd, tot op de dag van vandaag, meestal de extra aanname gemaakt dat de stroming rotatievrij is. Dat vereenvoudigt de situatie verder, omdat dan de snelheid gerelateerd is aan een vloeistofpotentiaal Φ volgens $\mathbf{u} = \nabla \Phi$. De inwendige vergelijkingen reduceren dan ten gevolge van de incompressibiliteit ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) tot het Laplaceprobleem $\Delta \Phi = 0$. Op het oppervlak komt een tweede, dynamische vergelijking, die krachten op het oppervlak, zoals bijvoorbeeld van de wind of een schip kan bevatten. Wij zullen alleen 'vrije' oppervlakken beschouwen zoals het geval is met een uniforme atmosfeer boven het water.

Maar zelfs met al deze aannamen zijn de vergelijkingen niet eenvoudig, omdat voor een niet-vlak wateroppervlak of bodemprofiel het Laplaceprobleem niet expliciet opgelost kan worden, en de twee vergelijkingen op het oppervlak niet-lineair zijn. Vele vereenvoudigde modellen werden in de negentiende eeuw opgesteld, steeds door een benadering te zoeken voor de oplossing van het Laplaceprobleem onder verschillende aannamen voor karakteristieke grootheden van de golven. Vergelijkingen die in alleen oppervlakegrootheden geschreven zijn, worden Boussinesq-achtige vergelijkingen genoemd.

Een speciaal geval daarvan is de Korteweg-de Vries-vergelijking (1895) voor eenrichtingsgolven. Bijzonder was dat die vergelijking aantoonde dat er een golfprofiel bestaat, later soliton genoemd, dat zich onvervormd en met constante snelheid voortplant. Daarmee werd een verklaring gegeven voor de observatie van Scott Russell van een golf met die eigenschap (1834). Dezelfde solitonoplossing, maar dan in de Maxwell-vergelijkingen, heeft ons later dankzij Hasegawa (1973) de mogelijkheid gegeven om signalen door glaskabels te transporteren, en heeft daarmee de moderne communicatie mogelijk gemaakt.

Variationele structuur

Het duurde tot 1968 voordat Zakharov [16], en later Broer [2], expliciet maakten dat ook oppervlaktegolven een variationele structuur hebben, en als een continu Hamiltons systeem geschreven kunnen worden. Miles [13] toonde iets later aan dat een herschrijven van een 'druk-principe' geformuleerd door Luke in 1967 precies tot een actieprincipe leidt zoals in de klassieke mechanica [12]. De canonicke variabelen zijn in dit geval de waterhoogte η , zoals te verwachten is, en de potentiaal $\varphi(x, y, t) = \Phi(x, y, z, t)$ voor $z = \eta(x, y, t)$ op het oppervlak (niet zomaar te verwachten). Overeenkomstig de klassieke systemen is de Hamiltoniaan H weer de totale energie: de som van potentiële energie P en kinetische energie K . Dan luiden de vergelijkingen:

$$\begin{cases} \partial_t \eta = \delta_\varphi H, \\ \partial_t \varphi = -\delta_\eta H. \end{cases} \quad (5)$$

Hierin is $\delta_\varphi H$ de partiële variatieafgeleide met betrekking tot φ , dat is (voor een dichtheidsfunctionaal H) die functie die via het L_2 -inproduct de linearisatie van de functionaal oplevert. (Analoog aan de gradiënt van een scalaire functie, die via het \mathbb{R}^n -inproduct de richtingsafgeleide van de functie oplevert.)

De totale potentiële energie is eenvoudig te vinden uit de potentiële energie $\rho g z$ van een eenheidsvolume op hoogte z : de integraal over het ruimtelijk gebied levert (met weglating van een constante term)

$$P(\eta) = \frac{1}{2} \rho g \int \eta^2 dx dy. \quad (6)$$

De kinetische energie is — als gebruikelijk in de klassieke mechanica — de helft van de massa maal de snelheid in het kwadraat, nu geïntegreerd over het watervolume. Uitgedrukt in de snelheidspotentiaal is dat de Dirichlet-integraal behorende bij het Laplaceprobleem, dus

$$K(\varphi, \eta) = \frac{1}{2} \rho \int \int_{-D}^{\eta} |\nabla \Phi|^2 dz dx dy. \quad (7)$$

Merk op dat K nu ook van η afhangt omdat Φ moet voldoen aan de Laplace-vergelijking met randvoorwaarde $\Phi = \varphi$ op $z = \eta(x, y, t)$. Aan de bodem, $z = -D$, moet de normaalafgeleide nul zijn.

Omdat K een kwadratische functionaal is in φ , kan de Dirichlet-integraal geschreven worden als $K(\varphi, \eta) = \frac{1}{2} \rho \int \varphi N(\eta) \varphi dx dy$. Hierin is $N(\eta) \varphi$ de normaalafgeleide op het

oppervlak, lineair in φ met de zogenaamde Dirichlet-to-Neumann (D-to-N) operator $N(\eta)$ die van η afhangt. Daarmee vinden we meteen dat $\delta_\varphi H = \delta_\varphi K = N(\eta)\varphi$ en daarmee de kinematische voorwaarde op het oppervlak. Voor de dynamische vergelijking moet bij het nemen van de partiële variatieafgeleide naar η bedacht worden dat de potentiaal $\Phi = \varphi$ ook op het gevarieerde oppervlak moet gelden.

Voor het speciale geval van infinitesimale golfhoogte worden de niet-lineaire termen verwaarloosd. Boven een vlakke bodem is het Laplace-probleem dan oplosbaar met Fouriertheorie. De lineaire vergelijkingen worden dan

$$\begin{cases} \partial_t \eta = N_0 \varphi, \\ \partial_t \varphi = -g\eta. \end{cases} \quad (8)$$

Hierin is $N_0 = N(\eta = 0)$ de ruimtelijke (pseudo-differentiaal) operator die in de spectrale ruimte werkt als een vermenigvuldiging: $\widehat{N_0 \varphi}(k) = \Omega(k)^2 \widehat{\varphi}(k)/g$ met $\Omega(k)^2 = gk \tanh(kD)$ waarin k het golfgetal, of in 2D de lengte van de golfvector, is. De vergelijkingen leiden dan (na eliminatie van φ) tot het resultaat dat tijdharmonische oplossingen met frequentie ω aan de zogenaamde dispersierelatie moeten voldoen:

$$\omega^2 = \Omega(k)^2. \quad (9)$$

Variationele Boussinesq-modellen

De variationele beschrijving hebben we op vele manieren uitgebuit voor het vinden van Hamilton-consistente benaderingen. Dit garandeert energiebehoud, hetgeen bij klassieke Boussinesq-vergelijkingen vaak niet eenvoudig te controleren is. Ter onderscheiding spreken we van variationele Boussinesq-modellen. In de laatste jaren hebben we een tweetal consistente benaderingen ontwikkeld.

Een klasse van zogenaamde AB-vergelijkingen [4–6, 14] ontstaat door een ontwikkeling van de D-to-N operator $N(\eta)$ in willekeurige orde in η . Deze benadering is geldig voor alle golf lengten. Daardoor kan met een spectrale implementatie aan de niet-rationale dispersierelatie exact worden voldaan boven een vlakke bodem. Voor variërende bodem nemen we een quasi-homogene benadering. Daarmee vervalt een van de grootste beperkingen van klassieke Boussinesq-vergelijkingen, die namelijk slechts geldig zijn voor voldoende grote golf lengten. Als gevolg hiervan kunnen wij nu ook de lange golven

die uit de diepe oceaan naar de kust toe korter worden, goed berekenen. Ook bekende nadelen van spectrale implementaties (de periodiciteit van de rekengebieden, het toevoegen van harde wanden et cetera.) zijn inmiddels overwonnen door al deze effecten te bewerkstelligen via brontermen in de Hamiltoniaanse vergelijkingen. De simulaties zijn uiterst efficiënt, op een laptop normaliter minder dan 10 procent van de fysische tijd.

In een andere klasse van variationele Boussinesq-modellen [4], met een *Finite Element*-implementatie, gebruiken we een extra optimaliteitscriterium voor het modelleren van de kinetische energie [1, 5]. Dat is gebaseerd op het principe van Dirichlet, namelijk dat de potentiaal die de minimale waarde van de kinetische energie geeft precies de oplossing is van het Laplace-probleem. Dit leidt tot effectieve benaderingen voor de kinetische energie door voor de potentiaal in de Dirichlet-functionaal slechts een combinatie van enkele geoptimaliseerde verticale profielen te nemen. Voor elke geometrie en gegeven binnenkomende golven wordt dan a priori de beste dispersierelatie bepaald. Dit model wordt in het bijzonder gebruikt voor gecompliceerde havengeometrieën boven sterk veranderende bodemdiepten.

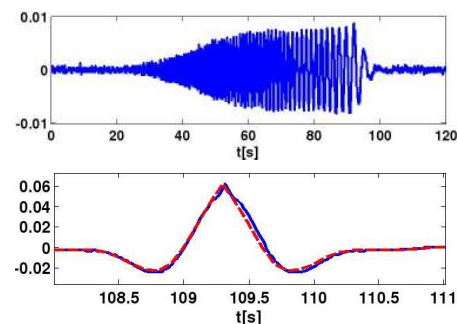
Onregelmatige golven en freak waves

Karakteristieke golfgrootheden

Bij het waarnemen van golven zien we voornamelijk een golfprofiel, een momentopname; of een zogenaamd tijdsignaal: de op en neer gaande beweging van het wateroppervlak op een vaste plaats. Grootheden als golf lengte L , periode T van het tijdsignaal en de golfvoortplantingssnelheid c kunnen alleen precies gedefinieerd worden voor harmonische golven in één horizontale dimensie. Met $k = 2\pi/L$ het golfgetal en $\omega = 2\pi/T$ de frequentie wordt een harmonische golf beschreven door $\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \psi)$, waarin A de amplitude van de golf is (de helft van de golfhoogte) en ψ een fasefactor. De snelheid c is dan $c = L/T$. Om in de limiet voor kleine amplitude te voldoen aan de lineaire vergelijkingen, moet er een relatie bestaan tussen k en ω , de dispersierelatie $\omega^2 = \Omega(k)^2$ zoals hierboven genoemd. Omdat $\Omega(k)$ voor positieve k een concave functie is, volgt hieruit dat de fasesnelheid $c = \omega/k$ op zodanige manier afhangt van k dat lange golven een grotere snelheid hebben dan kortere golven.

Focuserende golf

Een mooi voorbeeld om het effect van lineaire

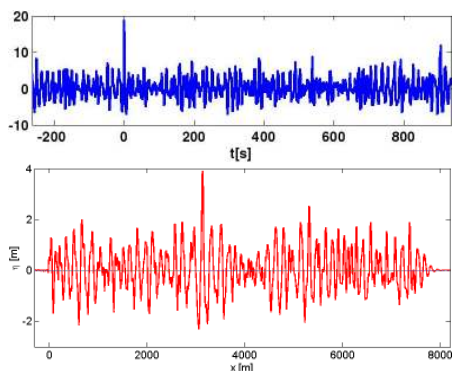


Figuur 1 Boven: Het gemeten tijdsignaal op positie 10 m in de golftank (MARIN-experiment 202002); horizontaal de tijd in secondes, verticaal de waterhoogte in meter. Lange en snellere golven volgen de langzamere korte golven. Onder: Superpositie van alle golven op een plaats doordat de snelle golven de langzame hebben ingehaald. Constructieve interferentie leidt tot een grote golfhoogte. Het gemeten tijdsignaal (blauw) vergeleken met het berekende (rood) tijdsignaal op positie 50,2 m. De simulatie is uitgevoerd met de tweede-orde AB-vergelijking met exacte dispersierelatie [11].

dispersie te illustreren is het geval van een zogenaamde focuserende golf, een van de methoden om hoge golven op te wekken in een golftank (tank is vaktiaal voor proefbassin), zie Figuur 1. Aan één zijde van de tank wordt een rij van golven opgewekt. Opeenvolgende golven krijgen langere golf lengte en iets hogere amplitude. De langere golven hebben grotere snelheid en halen de kortere golven in. Als alles mooi afgestemd wordt, komen op één plaats en tijd alle golven samen tot een golf met een grote amplitude die de som is van de amplitudes van de afzonderlijke golven als ter plaatse alle fases nul zijn. Vanwege symmetrie vervalt daarna die hoge golf weer in de afzonderlijke golfcomponenten, nu met de langste golven vooruitlopend op de langzamere korte golven. Het verspreiden van de golven die op zee worden opgewekt gedurende een storm laat eenzelfde patroon zien. Aan de kust worden de langste golven (die verstoringen tijdens de lange reis het best kunnen weerstaan) als deining waargenomen.

Onregelmatige golven

Superpositie van verschillende harmonische golven, zoals in het voorbeeld van de focuserende golf, kan leiden tot zeer verschillende golfprofielen, zoals bekend uit de Fouriertheorie. Golven opgewekt door de wind hebben ook verschillende frequenties, en iedere frequentie (band) kan met een verschillende energie vertegenwoordigd zijn, hetgeen weer te geven is in een energiespectrum. Maar windgolven hebben bovendien een stochastisch karakter doordat ook de fase per frequentie verschillend zal zijn, hetgeen gemiddeld wordt als random keuze met uniforme verdeling over het interval $[0, 2\pi)$. We spreken dan over onregelmatige golven.



Figuur 2 Boven: Met horizontaal de tijd en verticaal de waterhoogte in meter toont dit tijdsignaal de zogenaamde Draupner freak wave op $t=0$ gemeten vanaf het Draupnerplatform op 1 januari 1995. De tophoogte is 18,5 m in de omringende golven met gemiddelde tophoogte van ongeveer 4 m. (Data van Dr. Sverre Haver, Statoil.) Onder: Profiel van een onregelmatige golf met horizontaal de afstand in meters. Deze berekening komt overeen met een experiment (# 103001) in een golf tank van MARIN, geschaald met een factor 50. Op $x=0$ wordt de golf opgewekt overeenkomstig de waterhoogte op een meetpositie in de tank. De naar rechts lopende golven worden in de simulatie aan het einde van het interval kunstmatig gedempt. De golf heeft een significante golfhoogte van $H_s=3,2$ m. Maar rond positie 3000 is een 'toevallige' freak wave te zien, met een golfhoogte op die plaats van 6,8 m. In een simulatie blijkt dat die hoge golf voor lange tijd een zeer grote hoogte behoudt door constructieve interferentie [6].

Figuur 2 toont een zeer speciaal golfveld op zee, en onregelmatige golven in een golf-tank. Deze laatste worden opgewekt om het gedrag van schepen te kunnen testen in zo realistisch mogelijke zee-situaties. Overigens: de schaling van laboratorium naar de werkelijke situatie is mogelijk omdat in beide gevallen de gravitatie (dimensie m/s^2) de onderliggende processen bepaalt: schaling van tijd gaat dan met de wortel uit de schaling van afstanden.

Met de randomfase-aanname kunnen uit de energieverdeling statistische grootheden gedefinieerd worden voor onregelmatige golven. Een belangrijke grootheid is de significante golfhoogte H_s . Oorspronkelijk bedoeld als de 'gemiddelde' golfhoogte zoals die geschat zou worden door een ervaren waarnemer, blijkt die waarde in feite dichter bij vier maal de standaarddeviatie van het spectrum te liggen. Daaruit volgt dan (omdat de golfhoogten aan een Gaussische verdeling voldoen) dat H_s ongeveer de gemiddelde hoogte is van de verzameling van de 33 procent hoogste golven. Blijkbaar baseert de 'waarnemer' zijn schatting vooral op de meest zichtbare golven.

Niet-lineariteit

De niet-lineaire termen in de vergelijkingen leiden in samengestelde golven tot een herverdeling van energie tussen de golven: de niet-lineariteit verandert het spectrum. Dat is temeer zo als het spectrum zeer nauw is, dat

wil zeggen als begonnen wordt met een energieverdeling in een smal interval. Het effect van niet-lineariteit kan geïllustreerd worden aan de hierboven genoemde (KdV) soliton. Het bestaan van deze golfvorm is een subtiële balans tussen dispersie, die de golfvorm breder zou maken, en niet-lineariteit die de vorm steiler zou maken. Vanuit een theoretisch gezichtspunt is het aardig op te merken dat een soliton ook oplossing is van een *constrained minimum*-principe voor de energie, onder de voorwaarde van gegeven horizontale impuls (een relatief evenwicht in de Hamiltoniaanse beschrijving omdat de impuls een van de Hamiltoniaan onafhankelijke bewegingsgrootheden is).

Freak waves

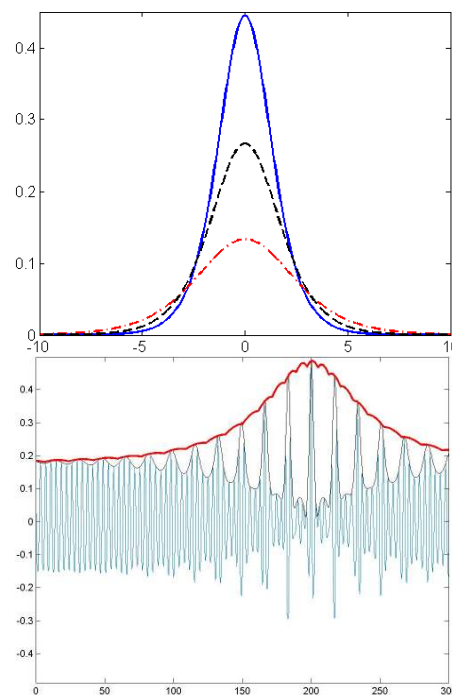
Zogenaamde 'freak' of 'rogue' waves of monstergolven zijn uitzonderlijk hoge golven (in vergelijking met omringende golven) die zonder aanwijsbare oorzaak plotseling optreden. Van oudsher waren verhalen bekend van zeevarenden over onverwachte monstergolven, maar die werden meestal afgedaan als visserslatijn. Naast aanwijsbare schade aan schepen, en veel schepen die op onverklaarbare wijze zijn vergaan, werd het meest overtuigende bewijs van het bestaan van monstergolven gegeven door videowaarnemingen op het Draupner-platform in de Noordzee gedurende een storm op nieuwjaarsdag 1995. De video registreerde het passeren van een golf met een tophoogte van 18,5 meter, in een omringende zee met significante golfhoogte van 12 meter. Schade aan een dek hoog boven het wateroppervlak gaf extra bevestiging. De hoge top van bijna drie maal de gemiddelde tophoogte is uitzonderlijk. In Figuur 2 is het tijdsignaal van de geregistreerde Draupner-golf te zien.

Sinds die tijd is er veel onderzoek gedaan naar freak waves. Maar veel vragen over het ontstaan, en het voorspellen van dit soort golven zijn nog steeds niet beantwoord, zelfs niet voor langkammige (1D-) golven. Twee gezichtspunten komen naar voren, overeenkomend met de twee karakteristieke effecten in golven.

Een onderzoeksrichting concentreert zich op niet-lineaire effecten, het uitwisselen van energie tussen golven. Dit is al zichtbaar voor een gemoduleerde harmonische golf. Als de modulatielengte voldoende groot is, vindt energie-uitwisseling plaats waardoor de hoogste golven groter worden ten koste van de anderen, bekend als de Benjamin-Feir-instabiliteit. Later werd gevonden dat deze instabiliteit een aanzet is tot een niet-lineaire

golfreus, waarvan de omhullende een niet-bewegend solitonprofiel heeft. De naam daarvoor, *soliton on finite background*, verwijst naar de KdV-solitonvorm, maar met het verschil dat de limietwaarden niet nul zijn maar naderen naar een achtergrond van harmonische golven, zie Figuur 3. Als dit mogelijk is voor een harmonische golf als drager en basis van de instabiliteit, is dat misschien ook mogelijk met een onregelmatige golf als drager. De instabiliteit treedt alleen op voor voldoende nauw spectrum, gekarakteriseerd door een voldoende grote waarde van de zogenaamde BF-index. Voor scheepvaart over de oceaan worden tegenwoordig veiligheids-waarschuwingen gegeven voor gebieden waar de BF-index hoog is.

Een andere mogelijke reden voor een hoge golf is constructieve interferentie, zoals we al zagen bij de focuserende golf. In feite is het statistisch gezien al zo dat op grond van de Gaussische verdeling van golfhoogten (als een gevolg van de centrale limietstelling) een golfhoogte van twee maal H_s eens in de duizend golven voorkomt. In een storm van bijvoorbeeld drie uur, met golven met periode van negen seconden, zal dat dus statistisch



Figuur 3 Boven: Enkele karakteristieke KdV-solitonprofielen, gegeven in dimensieloze met de diepe geschaalde grootheden door $\eta(x)=\alpha \operatorname{sech}^2(\beta x)$ met $\alpha=4\beta^2/3$, die onvervormd voortbewegen met constante snelheid $V=1+\alpha/2$. Onder: 'Soliton on finite background': de modulatie van de naar rechts lopende gemoduleerde harmonische golf wordt van links naar de extreme positie steeds groter ten gevolge van niet-lineaire effecten, waarna op symmetrische wijze een afname plaatsvindt. De 'soliton' is nu de stilstaande rode omhullende waaronder dit modulatieproces zich afspeelt: het is de rand van het natte deel van de wand van de golf tank waarin dit proces zich voltrekt [3].

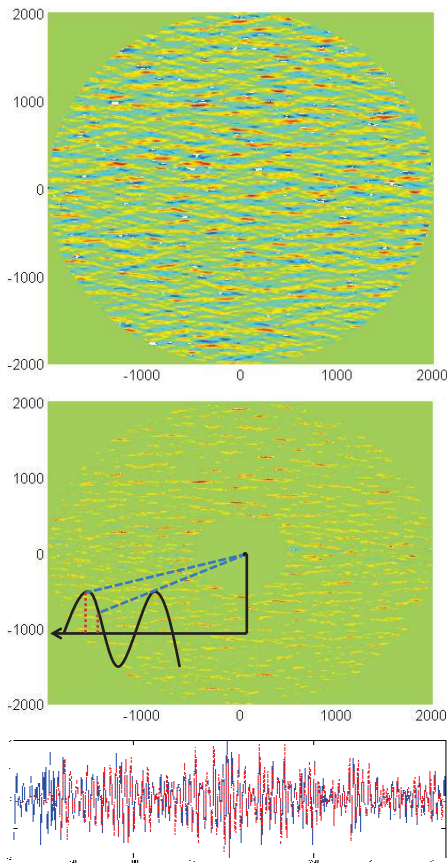
een keer voorkomen, op elke plaats in het stormgebied. In lange tijdreeksen van experimenten bij MARIN met onregelmatige golven hebben wij inderdaad verschillende freak waves aangetroffen, zie Figuur 2. Nadere analyse leerde dat de BF-index te klein was, net zoals bij de Draupner-golf, om die hoge golven te verklaren ten gevolge van niet-lineaire effecten. Numerieke simulatie met lineaire en niet-lineaire codes bevestigde dat. In deze onderzochte gevallen is de hoge golf een direct effect van de lineaire constructieve interferentie van enkele naburige hoge golven, daarmee

andere soortgelijke observaties bevestigend [15]. Dat geeft tenminste een aanwijzing dat ook in onregelmatige golven (met een breed spectrum) zoals die in windzeeën, lineaire interferentie tot hoge, freak-achtige golven kan leiden.

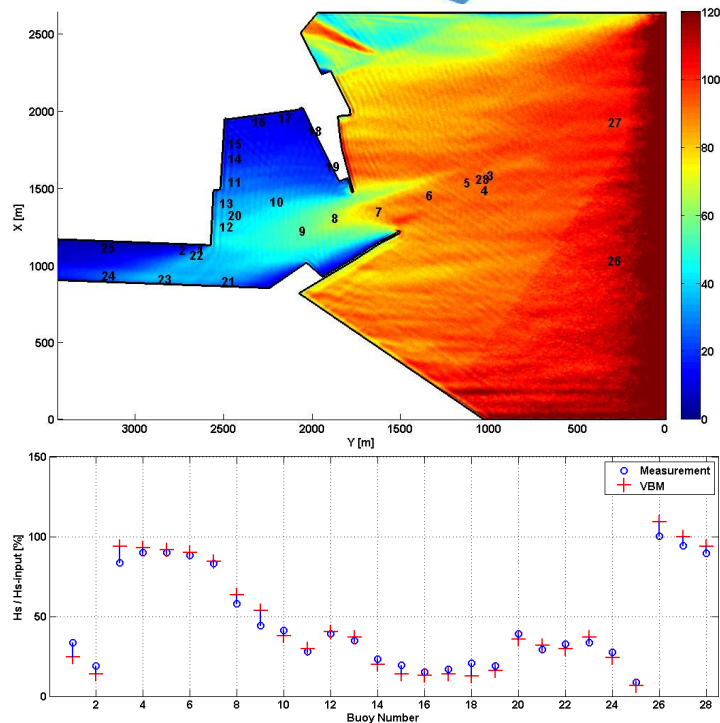
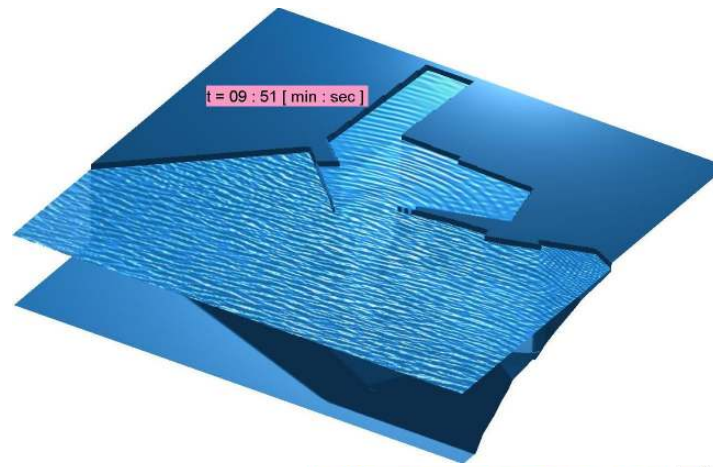
Golfvoorspelling uit radarbeelden

Voor meerdere offshore-activiteiten zou het zeer wenselijk zijn een voorspelling te hebben van de te verwachten aankomende golven. Denk bijvoorbeeld aan het plaatsen van windmolens, of het landen van een helikop-

ter op een scheepsdek. In beide gevallen is een relatief korte periode van kalme golven voldoende om zo'n actie uit te voeren, hetgeen met een goede voorspelling dan ook zou kunnen in overigens tamelijk ruwe zeeën. Een x-band radar die op veel schepen aanwezig is kan de golven waarnemen in een ringvormig gebied tussen 500 en 2000 meter van de radarpositie. Momenteel kan uit de (sterk vertekende) beelden slechts een statistische grootheid, zoals de piekperiode (of de daaraan gerelateerde piekgolflengte) bepaald worden, maar bijvoorbeeld niet de ab-



Figuur 4 Boven: Momentopname van een synthetisch gemaakte windzee in een schijf met straal van 2000 m met de radarpositie in de oorsprong. De golven komen uit het noorden naar de radarpositie, met een spreiding van ongeveer 600 naar beide kanten. De significante golfhoogte is $H_s=3$ m, en de piekperiode $T_p=9$ s. Met een bodemdiepte van 50 m zoals hier genomen is de piekgolflengte ongeveer 125 m. Midden: Een geïdealiseerde versie van een radarbeeld van de windzee. Met de radar op een hoogte van 30 m boven het wateroppervlak in het midden van het typisch ringvormige gebied van radarbereik zijn de golven berekend die zichtbaar zijn voor de radar. Het schaduw effect wordt geïllustreerd in het plaatje als inzet. De kleurschakering van een echt radarbeeld is gerelateerd aan de signaalreflectie. De afname van de zichtbaarheid met de afstand maakt het mogelijk de werkelijke golfhoogten te bepalen. Onder: Het tijdsignaal van de waterhoogte van de windzee op de radarpositie (blauw) vergeleken met een voorlopig resultaat van de berekende simulatiewaarden (rood), over een interval van 12 min. Het verschil in het begin tussen de signalen geeft een indicatie van de tijd die nodig is, ongeveer 90 s, om op de radarpositie de volledige informatie te krijgen van de golven buiten de binnenring met een straal van 500 m.



Figuur 5 Simulaties met het geoptimaliseerde variationale Boussinesq-model met een *Finite Element*-implementatie voor de haven van Limassol, Cyprus. In de 3D-figuur is ook de bodem zichtbaar. De fijnheid van het onregelmatige numerieke grid hangt af van de diepte, zodat de nauwkeurigheid gelijk blijft bij veranderende golflengte. Van belang voor de kwaliteit van de haven is het 'verstoringprofiel'. Dat is op elke plaats het quotiënt van de significante golfhoogte en de golfhoogte van de binnenkomende golven. In het 2D-bovenaanzicht is dit quotiënt aangegeven door kleurschakering, van rood (100%) tot blauw (0%). Met numerieke simulaties kunnen verschillende golven, uit verschillende richtingen worden behandeld, meer dan in laboratoriumproeven. Enkele simulatieresultaten zijn vergeleken met die van laboratoriummetingen zoals getoond.

solute golfhoogten, noch de zich voortplantende golven en dus ook niet de waterhoogte op de radarpositie. Lopend onderzoek in onze groep heeft als doel een deterministische voorspelling te geven van de waterhoogte op de radarpositie en verloopt ruwweg langs de volgende lijnen.

Een zee zal in veel gevallen bestaan uit een groot aantal kortkammige golven die opgewekt zijn door een nabije sterke wind. Karakteristieke getallen zijn piekperioden tussen 5 en 12 seconden en golfhoogten tussen 1 en 4 meter, voornamelijk afhankelijk van de windsterkte en de duur daarvan. De kortkammigheid (ter onderscheiding van de langkammige (1D-) golven) is een gevolg van fluctuaties van de windsterkte en -richting tijdens het generatieproces. Een voorbeeld van een (synthetisch gemaakte) zee met $T_p = 9$ s en $H_s = 3$ m is te zien in Figuur 4 (boven). De kleurschakering correspondeert met de waterhoogte. In veel gevallen zal naast een windzee ook deining uit een andere richting aanwezig zijn: veel langere, en minder gespreide golven, afkomstig van een storm op een verre locatie. Tezamen geeft zo'n multimodaal golfveld een nog gecompliceerder beeld.

Het vertekende beeld dat een radar geeft van zo'n golfveld lijkt enigszins op dat in Figuur 4 (midden). In die figuur is het schaduwgolfveld te zien (in het typische ringvormige bereik van de radar). Dat is het gevolg van het geometrisch effect dat een dichter bij de radar zijnde golf het radarsignaal afdekt voor een deel van de daaropvolgende golf. Daarnaast is de kleurschakering nu een maat van de intensiteit van het teruggekaatste deel van

het uitgezonden signaal en niet van de waterhoogte. Omdat de terugkaatsing bepaald wordt door de interactie van het radarsignaal met de rimpels op de golven (korte capillaire golfjes), is er geen eenvoudige schaling van de intensiteit naar de werkelijke waterhoogte. Ons onderzoek heeft geleerd dat de (geometrische) zichtbaarheid als functie van de afstand tot de radar een karakteristieke functie is van de twee dimensieloze grootheden die dit geometrisch effect bewerkstelligen; en daaruit kan dan wel, bij benadering, een waarde voor de golfhoogte worden berekend uit alleen de radarbeelden. Om de waterhoogte op de radarpositie te bepalen uit de (synthetische) radarbeelden, verbeteren we eerst de beelden door het opvullen van de schaduwgebieden met zo realistisch mogelijke golfpatronen; voorlopig is dat meer een kunst dan kunde, vooral als de gebieden groot zijn, zoals het geval is achter een hoge, freak-achtige, golf. Met de verbeterde beelden construeren we een dynamisch middellingsproces. Door assimilatie krijgen we dan een evolutie die het radargat van 500 meter kan overbruggen en een benadering geeft van de waterhoogte op de radarpositie. Voor een zee van windgolven blijkt de reconstructie opmerkelijk goed te gaan (althans voor de lineaire golfvelden en propagatie die we tot nu toe uitgevoerd hebben), leidend tot een benadering met een correlatie van meer dan 90 procent, zie Figuur 4c [7]. Het blijkt dat we in feite de windgolven nauwkeurig genoeg bepalen vanaf een afstand van ongeveer 1000 meter vanaf de radar, waaruit de lengte van de voorspellingshorizon berekend kan worden.

Havengolven

Ook voor het ontwerpen van groot- en kleinschalige waterbouwkundige constructies is het begrijpen en nauwkeurig simuleren van golven van belang. De golven in een haven, bijvoorbeeld, moeten zo kalm mogelijk zijn, ook als de golven daarbuiten hoog zijn, terwijl het gewenst is dat de toegang tot de haven toch zo ruim mogelijk is. Terugkaatsing van golven aan de kadewanden kan leiden tot resonante staande golven (seiches) die het laden en lossen onmogelijk maken. Numerieke simulaties moeten daarom vooral in staat zijn (gedeeltelijk) reflecterende wanden, voor veel verschillende binnenkomende golfvelden, te modelleren. Een tweede eis is dat de kunstmatige numerieke rand op zee, waar de golfvelden worden opgewekt, doorlaatbaar is voor de teruggekaatste, weer naar buiten lopende golven. Ter illustratie is in Figuur 5 een resultaat te zien van golven in een haven waarvoor meetgegevens (op laboratoriumschaal) van Deltares beschikbaar zijn.

Dankwoord

De boven beschreven onderwerpen zijn de laatste jaren onderzocht door een aantal PhD-studenten werkzaam op UT en LabMath-Indonesia, Bandung, gefinancierd door projecten van NWO, STW, KNAW en IOP-Promised. We danken Andonowati, Gert Klopman en Onno Bokhove voor de mede begeleiding van enkele van die studenten: Arnida Latifah, Wenny Kristina, Lie She Liam, Ivan Lakhturov, Natanael Karjanto, Didit Adytia en Andreas Parama Wijaya. MARIN en Deltares worden bedankt voor het beschikbaar stellen van de experimentele data. ◀

Referenties

- 1 D. Adytia en E. van Groesen, Optimized Variational 1D Boussinesq modelling of coastal waves propagating over a slope, *Journal Coastal Engineering* 64 (2012), 139–150.
- 2 L.J.F. Broer, On the Hamiltonian theory of surface waves, *Appl. Sci. Res.* 30 (1974), 430–446.
- 3 E. van Groesen, Andonowati en N. Karjanto, Displaced Phase-Amplitude variables for Waves on Finite Background, *Phys. Lett. A* 354 (2006), 312–319.
- 4 E. van Groesen en Andonowati, Variational derivation of KdV-type of models for surface water waves, *Phys. Lett. A* 366 (2007), 195–201.
- 5 E. van Groesen, Andonowati, L. She Liam en I. Lakhturov, Accurate modelling of unidirectional surface waves, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234 (2010), 1747–1756.
- 6 E. van Groesen en I. van der Kroon, Fully dispersive dynamic models for surface water waves above varying bottom, Part 2: Hybrid spatial-spectral implementations, *Wave Motion* 49 (2012), 198–211.
- 7 E. van Groesen, A.P. Wijaya en Andonowati, Spatial evolution scenario from synthetic radar images to sea states near the radar, 2013
- 8 N. Karjanto en E. van Groesen, Qualitative comparisons of experimental results on deterministic freak wave generation based on modulational instability, *Journal of Hydro-environment Research* 3 (2010), 186–192.
- 9 G. Klopman, E. van Groesen en M.W. Dingemans, A variational approach to Boussinesq modelling of fully non-linear water waves, *J. Fluid Mech.* 657 (2010), 36–63.
- 10 I. Lakhturov, D. Adytia en E. van Groesen, Optimized Variational 1D Boussinesq modelling for broad-band waves over flat bottom, *Wave Motion* 49 (2012), 309–322.
- 11 A.L. Latifah en E. van Groesen, Coherence and Predictability of Extreme Events in Irregular Waves, *Nonlin. Processes Geophys.* 19 (2012), 199–213.
- 12 J.C. Luke, A variational principle for a fluid with a free surface, *J. Fluid Mech.* 27 (1967), 395–397.
- 13 J.W. Miles, On Hamilton's principle for surface waves, *J. Fluid Mech.* 83 (1977), 153–158.
- 14 L. She Liam en E. van Groesen, Variational derivation of KP-type equations, *Phys. Lett. A* 374 (2010), 411–415.
- 15 A. Slunyaev, E. Pelinovsky en C.G. Soares, Modeling freak waves from the North Sea, *Applied Ocean Research* 27(1) (2005), 12–22.
- 16 V.E. Zakharov, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2 (1968), 190–194.