

Henk Schuttelaars

Afdeling Toegepaste Wiskunde
TU Delft
h.m.schuttelaars@tudelft.nl

Huib de Swart

IMAU
Universiteit Utrecht
h.e.deswart@uu.nl

Dynamica van bodempatronen in ondiepe zeeën

Door de wisselwerking van stroming en sedimenttransport kunnen op de bodem van ondiepe zeeën allerlei patronen ontstaan. Voorbeelden zijn de zandribbels die zichtbaar zijn op het strand bij laag tij, zandbanken voor de kust, en het stelsel van geulen en platen in de Waddenzee. Henk Schuttelaars en Huib de Swart doen onderzoek naar de dynamica van dergelijke patronen aan de hand van geïdealiseerde modellen. In dit artikel leggen ze uit hoe zulke modellen geformuleerd zijn, en hoe de analyse van de modellen inzicht biedt in het ontstaan van bodempatronen.

Wanneer je vanaf de duintoppen zoals bij Egmond aan Zee, naar de overgang kijkt tussen zee en strand, dan blijkt de kustlijn vaak meer structuur te hebben dan je vermoedt. Zo vertoont de kustlijn tussen Hoek van Holland en Den Helder golvingen met golflengten tussen de 2 en 5 km. Soms word je ook verrast door veel kleinschaliger ruimtelijke patronen bij deze overgang, die wel eenvoudig zijn op te merken. Een mooi voorbeeld hiervan is te zien in Figuur 1. Deze bodemvormen worden 'beach cusps' genoemd,



Figuur 1 Een voorbeeld van beach cusps, overgenomen uit [1]

de lengte van deze cusps varieert van een aantal meter tot wel 60 meter. Als je nu van het duin afdaalt en richting zee loopt, is de kans groot dat je, als het laag water is, uitgestrekte velden met zogeheten zandribbels aantreft. Zandribbels zijn dikwijls georganiseerd in langgerekte golfpatronen met een hoogte van enkele centimeters en toppen die ongeveer 10 centimeter van elkaar afliggen (zie Figuur 2). Interessant is dat de golfpatronen ook 'defecten' vertonen, waar het patroon wezenlijk driedimensionaal is.

Andere veelvoorkomende bodempatronen zijn vaak moeilijker waarneembaar. Soms kunnen we deze patronen op een indirecte manier waarnemen. In de brandingszone bijvoorbeeld, zien we dat golven vaak op specifieke locaties breken. Het is bekend dat golven breken als de waterdiepte van dezelfde orde is als de amplitude van de golf. De intensiteit van brekende golven is dus gecorreleerd met de lokale waterdiepte, de precieze relatie tussen breking en waterdiepte wordt op dit moment onderzocht. Tegenwoordig zijn op verscheidene locaties langs de kust videosystemen geïnstalleerd die de brekende golven fotograferen. Dit geeft een

beeld van de dynamische veranderingen in de kustmorfologie, zie bijvoorbeeld de beelden op <http://argus-data.wldelft.nl/sites/egmond/2013>. Bestudering van deze beelden laat zien dat er verschillende patronen zijn waar te nemen. Soms is er alleen een kustuniforme brekerbank te zien. Op andere beelden zijn er duidelijke ruimtelijk-ritmische patronen te zien. Veranderingen in deze patronen doen zich voor op een tijdschaal van uren tot dagen.



Foto: A. Falgués

Figuur 2 Een voorbeeld van zandribbels



Figuur 3 Satellietfoto van het Friesche Zeegat (links) en het Pinkegat (rechts)

Andere bekende bodempatronen waarmee we allemaal wel bekend zijn van bijvoorbeeld het wadlopen of een overtocht per veerboot naar Ameland, zijn de geulplaatssystemen in de Waddenzee. In deze bekens zien we vaak een fractaal netwerk van geulen, met tussen de geulen ondiepten, de platen. Een voorbeeld zien we op een satellietfoto van het Friesche Zeegat en Pinkegat, zie Figuur 3. Aan de zeewaartse kant van het Friesche Zeegat is één breed kanaal te zien dat zich vervolgens in meerdere kanalen splitst. Het Pinkegat heeft twee geulen aan de zeewaartse kant, die zich vervolgens in meerdere geulen splitsen. Uit waarnemingen blijkt dat deze geulen niet stationair zijn, maar in de tijd min of meer periodiek gedrag vertonen met een typische tijdschaal van 20 jaar (elders 7 tot 100 jaar).

In de volgende paragraaf wordt kort geschetst hoe we deze patronen kunnen bestuderen met behulp van een gekoppeld stelsel niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen. Voor een voorbeeld wordt dit stelsel vergelijkingen expliciet uitgewerkt. Dit stelsel vergelijkingen wordt daarna in meer detail bestudeerd en in de laatste paragraaf bediscussieerd.

Morfodynamische Modelling

Het is intuïtief duidelijk dat, om bovengenoemde bodempatronen (en vele andere, niet genoemde bodenvormen zoals megaribbels, zandgolven, zandbanken, et cetera) met een

mathematisch-fysisch model te bestuderen, zo'n model de wisselwerking tussen de beweging van het water, het transport van sediment en de verandering van de bodem moet beschrijven. Deze interacties kunnen met behulp van een complex-numeriek model worden bestudeerd, waarin alle mogelijke fysische processen worden meegenomen en de meest geavanceerde formuleringen voor bijvoorbeeld zandtransport worden gebruikt. Het nadeel van dit type modellen is dat de modelresultaten vaak moeilijk zijn te analyseren, dominante processen moeilijk zijn te identificeren en parametergevoeligheden slechts in beperkte mate te onderzoeken (door lange rekentijden per numeriek experiment en het grote aantal parameters).

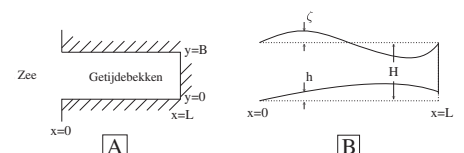
Een ander type modellen, de zogenaamde geïdealiseerde modellen, is juist ontwikkeld om de interacties en parametergevoeligheden in detail te bestuderen. Dit betekent wel dat alleen die processen in de mathematisch-fysische beschrijving worden meegenomen die essentieel zijn om specifieke bodenvormen te verklaren. Zo'n model kan dan ook niet direct worden toegepast op andere bodenvormen! Vaak kunnen we met dit type modellen ook alleen geïdealiseerde geometrieën bestuderen.

In deze bijdrage zullen we een model bespreken voor een getijdenbekken, zoals het Friesche Zeegat, dat is gepubliceerd in [4, 10]. De echte geometrie is vereenvoudigd tot een rechthoekig bekken, zie Figuur 4. In deze fi-

guur is L de lengte van het bekken ($\mathcal{O}(10)$ km), B de breedte ($\mathcal{O}(1)$ km) en H de diepte ($\mathcal{O}(10)$ m) aan de zeewaartse kant. De zeeniveau-uitwijking ten opzichte van gemiddeld niveau wordt gegeven door ζ ($\mathcal{O}(1)$ m), h geeft de bodemuitwijking ten opzichte van de diepte aan de zeewaartse kant van het bekken. Verder is x de coördinaat in de longitudinale richting, y in de laterale richting. De dominante forcering van de waterbeweging is het getij, andere mogelijke forceringen worden verwaarloosd (zoals windgolven, dichtheidsverschillen, windforcering). Aangezien we de geulplaatpatronen in dit bekken willen bestuderen, zijn we geïnteresseerd in bodenvormen die van de orde van de bekkenlengte zijn. Deze bodenvormen zijn veel groter dan de typische waterdiepte, zodat we ons kunnen beperken tot de ondiepwatervergelijkingen, een limiet van de Navier–Stokes vergelijkingen. Als we de vergelijkingen schalen door typische orde-grootten voor de verschillende variabelen te nemen, zien we dat de niet-lineaire interacties in leidende orde verwaarloosbaar zijn. Als we ook Coriolis-effecten verwaarlozen, wordt de waterbeweging beschreven door de volgende dimensieloze vergelijkingen:

$$\begin{aligned}\zeta_x &= 0, \\ \zeta_y &= 0, \\ \zeta_t + [(1-h)u]_x + [(H-h)v]_y &= 0, \\ v_{xt} - u_{yt} &= -F_{2x}^b + F_{1y}^b.\end{aligned}\quad (1)$$

Hierin zijn t de met de getijfrequentie ($\sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$) geschaalde tijd, en x en y de met L geschaalde ruimtelijke coördinaten. Subscripts geven partiële afgeleiden aan. De grootheden u en v representeren geschaalde snelheden in respectievelijk de x - en y -richting, de vector F^b representeert de bodemwrijvingseffecten. Deze effecten parameteriseren we als $F^b = (F_1^b, F_2^b) = r\tilde{u}(1+h)$, de bodemwrijving is dus evenredig met de dieptegemiddelde snelheid en neemt toe als de waterdiepte afneemt (h toeneemt). Als randvoorwaarden schrijven we de getij-uitwijking aan de open rand voor, in deze bijdrage beperken we ons tot één getijcomponent (het dubbeldagse getij, met een periode van 12,5



Figuur 4 Bovenaanzicht (A) en zijaanzicht (B) van het gemodelleerde bekken

uur). Verder eisen we dat er geen flux van water door de vaste wanden is.

Het transport van sediment in het water wordt beschreven met een advection-diffusievergelijking. Uit schalingsargumenten volgt dat transport ten gevolge van advection-processen in een kort bekken verwaarloosbaar is ten opzichte van diffusieve sediment-fluxen. Dit resulteert in de volgende dimensioneloze concentratievergelijking:

$$aC_t = (u^2 + v^2) - C + a\mu[C_{xx} + C_{yy}], \quad (2)$$

waarbij C de dieptegeïntegreerde concentratie is, a (~ 0.01) de verhouding van de typische tijdschaal voor een deeltje om naar de bodem te zakken en de getijdetijdschaal en μ ($\sim 10^{-3}$) de dimensioneloze horizontale diffusiecoëfficiënt. Het sediment wordt opgewerveld door de schuifspanningen aan de bodem, deze *erosieterm* is evenredig met $u^2 + v^2$. Ten gevolge van de zwaartekracht zinkt het sediment weer naar de bodem, deze *depositieterm* is evenredig met $-C$. Als randvoorwaarden leggen we op dat erosie en depositie in balans zijn op de open rand, en dat er geen diffusief sedimenttransport is door de gesloten randen.

Het bodemniveau zelf verandert natuurlijk ten gevolge van erosie en depositie van sediment: waar sediment wordt geërodeerd zal het bodemniveau h afnemen, ten gevolge van depositie zal h toenemen. De typische tijdschaal waarop het geul-plaatsysteem zich ontwikkelt (maanden tot een jaar), is veel langer dan de getijperiode. Door deze observatie kunnen we de middelingsmethode toepassen: we kijken niet naar de bodemveranderingen tijdens een getijcyclus, maar naar de bodemverandering gemiddeld over een getijcyclus (zie bijvoorbeeld [8]). Als we nu getijmiddeling aangeven met $\langle \cdot \rangle$, volgt uit de behoudswet voor sediment dat de bodemevolutie wordt beschreven door de volgende vergelijking:

$$h_\tau = - \langle (u^2 + v^2) - C \rangle + \lambda \langle \nabla^2 h \rangle, \quad (3)$$

waarbij $\tau = \delta t$, met δ de verhouding van de hydrodynamische en morfodynamische tijdschaal. Merk op dat de bodemdiepte h toeneemt ten gevolge van depositie en afneemt ten gevolge van erosie. Verder modelleert de laatste term aan de rechterkant van (3) het transport ten gevolge van bodemhellingstermen: sediment rolt makkelijker van een hel-

ling af dan er tegenop. De randvoorwaarden voor dit systeem worden gegeven door de eis dat de bodemdiepte aan de zeewaartse kant niet verandert, en dat er geen sedimenttransport is ten gevolge van de bodemhellingstermen door de gesloten wanden.

Oplosmethode

De vergelijkingen en randvoorwaarden uit de vorige sectie vormen, gegeven een initiële conditie, een zogenaamd morfodynamisch model. Dit model wordt vaak met behulp van tijdsintegratie opgelost: gegeven een bodemniveau kunnen we de bijbehorende snelheden uitrekenen. Deze snelheden resulteren in erosie van sediment, dat door diffusieve processen wordt getransporteerd en vervolgens door de zwaartekracht weer naar de bodem zinkt. Hierdoor verandert de bodem, waarna we weer vooraan in de loop beginnen. Dit gaat net zolang door totdat de bodem getijgemiddeld niet meer verandert.

Breedtegemiddelde evenwichtsooplossing

In plaats van zo'n morfodynamische integraal te doorlopen, kunnen we ook direct op zoek gaan naar evenwichtsooplossingen. Als eerste stap proberen we een oplossing van vergelijkingen (1)–(3) te vinden, zodanig dat de waterbeweging, sedimentconcentraties en bodem niet meer veranderen. Zo'n oplossing is redelijk eenvoudig te vinden als we het systeem middelen over de breedte. Dit betekent dat de laterale snelheid v nul is en de andere grootheden niet van de laterale coördinaat y afhangen. Als we het transport ten gevolge van bodemhellingstermen verwaarlozen (door $\lambda = 0$ te kiezen), dan reduceert het stelsel vergelijkingen tot

$$\begin{aligned} \zeta_t + [(1-h)u]_x &= 0, \\ \zeta_x &= 0, \\ aC_t - a\mu C_{xx} &= u^2 - C, \\ h_\tau &= - \langle u^2 - C \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

met als randvoorwaarden dat $\zeta = \cos t$, $h = 0$ op de zeewaartse rand ($x = 0$) en $(1-h)u = 0$, $\mu \langle C_x \rangle = 0$ op de gesloten rand ($x = 1$). Verder willen we geen diffusieve grenslagen voor het tijdsvariërende deel van de sedimentconcentratie C op $x = 0$ en $x = 1$. Uit de tweede vergelijking in (4) volgt nu dat $\zeta = \cos t$ voor alle $x \in [0, 1]$, ofwel een ruimtelijk uniform getij. Het horizontale snelheidsveld wordt dan gegeven door $u(x, t) = \frac{(x-1)}{1-h} \sin t$. Door op te merken dat $a \ll 1$ kan de bijbehorende sedimentconcentratie C worden opgelost,

wat resulteert in de volgende bodemevolutievergelijking:

$$h_\tau = \frac{a\mu}{2} \left(\frac{x-1}{1-h} \right)_{xx}^2. \quad (5)$$

Voor een evenwichtsooplossing h_{eq} eisen we dat $h_\tau = 0$. Hieruit volgt dat $h_{eq} = x$, ofwel dat de evenwichtsbodem een constant hellende bodem is. Dit resultaat blijkt behoorlijk goed te kloppen met waarnemingen van breedte-gemiddelde bodemprofielen in de Waddenzee, zie bijvoorbeeld [2], waarin ook een uitgebreide versie van dit model wordt geanalyseerd. In [7] wordt de dynamische ontwikkeling van zo'n bekken onder de invloed van relatieve zeespiegelstijging bestudeerd, volgens dit model kan er voldoende sediment geïmporteerd worden om de huidige zeespiegelstijging bij te houden. Een snellere zeespiegelstijging resulteert in het verdwijnen van de ondiepe delen, zie ook [6].

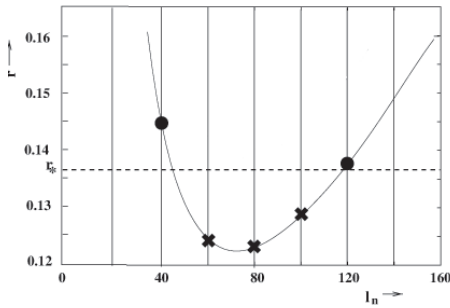
Lineaire stabiliteitsanalyse

Deze evenwichtsooplossing blijkt stabiel te zijn voor kleine verstoringen. Dit volgt uit een *lineaire stabiliteitsanalyse*, waarbij de evenwichtsbodem een klein beetje verstoord wordt:

$$h(x, \tau) = h_{eq} + \Re \{ h'(x) e^{\omega \tau} \}. \quad (6)$$

Substitueer deze uitdrukking in (5) en lineariiseer de gevonden uitdrukking, dat wil zeggen dat alleen termen lineair in h' niet worden verwaarloosd. Het resulterende eigenwaardeprobleem kan expliciet opgelost worden, alle eigenwaarden ω zijn reëel en negatief, zie [9] voor details.

Om het ontstaan van geul-plaatpatronen te kunnen modelleren, kunnen we ons natuurlijk niet beperken tot het breedte-gemiddelde systeem van vergelijkingen. Bovenstaande analyse is niettemin essentieel omdat de breedte-gemiddelde evenwichtsooplossing ook een evenwichtsooplossing is van het tweedimensionale systeem van vergelijkingen (1) (merk op dat er een zeer kleine correctie in het bodemprofiel is ten gevolge van de bodemhellingsterm in vergelijking (3), zie [2] voor details). De constant hellende bodem blijkt *niet* meer lineair stabiel te zijn als we verstoringen met een structuur in de laterale richting toelaten. Om dit te laten zien verstoren we de breedte-gemiddelde evenwichtsbodem met kleine verstoringen die een laterale structuur hebben. Deze laterale structuur wordt volledig bepaald door de randvoor-



Figuur 5 Neutrale stabiliteitscurves voor de eerste (getrokken lijn) en tweede (gestippelde lijn) longitudinale eigenmodus. Voor $r < r_c$ zijn alle bodemverstoringen stabiel ($\omega < 0$). Voor $r = r_c$ zien we dat drie eigenmodi lineair instabiel zijn (aangegeven met een kruis), de andere eigenmodi (waarvan er een aantal zijn aangegeven met een gevulde cirkel), zijn stabiel. De parameter $l_n = \pi L/B = 40$.

waarden, de toegestane bodemverstoringen zijn te schrijven als

$$h'(x, y, \tau) = \Re \{ h_n(x) \cos(l_n y) e^{\omega_n \tau} \},$$

met het lateraal golfgetal $l_n = n\pi L/B$ voor $n = 0, 1, 2, \dots$; voor de structuur van de snelheids- en concentratieverstoringen, zie [10]. Substitueer de perturbaties in de niet-lineaire vergelijkingen, en lineariseer deze vergelijkingen. Het resulterende gegeneraliseerde eigenwaardeprobleem moet numeriek opgelost worden, en resulteert in de eigenwaarden ω_n (die hier altijd reëel blijken te zijn) en eigenfuncties $h_n(x)$ (er zijn bij elk golfgetal n natuurlijk oneindig veel longitudinale eigenmodi).

Figuur 5 laat op een compacte manier de stabiliteit van de verschillende verstoringen zien: kies een verstoring met een toegestaan lateraal golfgetal l_n (de variabele op de horizontale as), deze zijn aangegeven door de verticale lijnen in de figuur. Voor kleine waar-

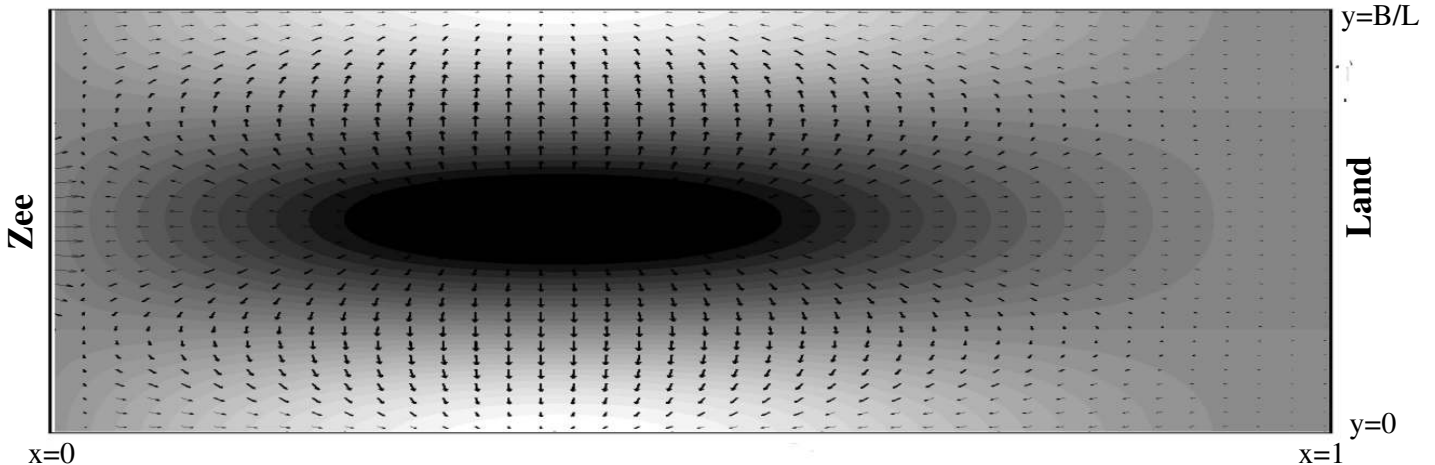
den van de wrijvingsparameter r (de variabele op de verticale as) neemt de amplitude van de verstoring af ($\omega < 0$). Als we r laten toenemen, verandert de groeisnelheid ω van teken, dit betekent dat verstoring niet meer uitdempt maar exponentieel gaat groeien. Wanneer dat het geval is, geldt dat de breedte-gemiddelde evenwichtsbodem lineair instabiel is. De getrokken lijn in Figuur 5, de *neutrale curve*, geeft de overgang aan tussen het parametergebied waarin oplossingen stabiel en instabiel zijn. De kleinste wrijvingswaarde waarvoor de constant hellende bodem instabiel wordt, wordt de *kritische* wrijvingswaarde genoemd, het bijbehorende golfgetal het kritische golfgetal. De ruimtelijke structuur van de bijbehorende bodemverstoring, getoond in Figuur 6, blijkt een duidelijk geulplaatpatroon te zijn.

Niet-lineaire evenwichtsooplossingen

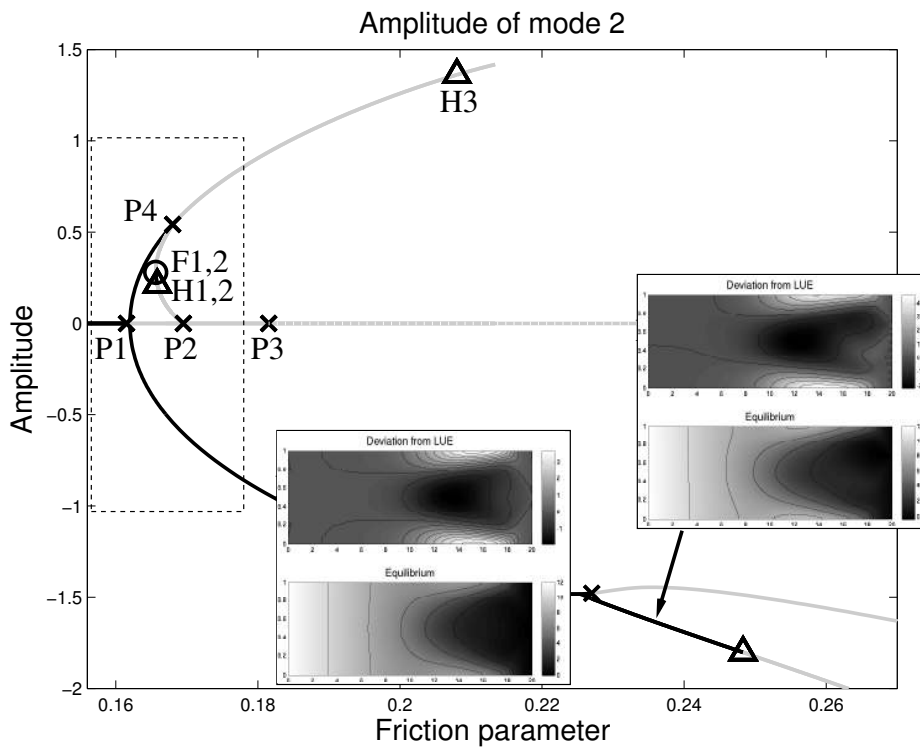
Uit de vorige paragraaf volgt dat, als de wrijvingsparameter groter is dan een kritische waarde r_c , de amplituden van sommige verstoringen gaan groeien. Niet-lineaire interacties zijn dan niet meer verwaarloosbaar, en het oorspronkelijke niet-lineaire stelsel van vergelijkingen moet worden geanalyseerd. We verwachten dat er voor deze waarden van de wrijvingsparameter niet-triviale evenwichten zullen bestaan. Dit zijn evenwichten met een structuur in de laterale richting. Deze evenwichten kunnen worden gevonden door een bekend evenwicht te *continueren* door de waarde(n) van modelparameter(s) langzaam te veranderen (zie [4] voor een gedetailleerde beschrijving). In dit geval zullen we de sterkte van de bodemwrijving r als continueringsparameter gebruiken. We starten met een wrijvingsparameter $r < r_c$, het evenwicht is dan bekend (de constant hel-

lende bodem). We gaan nu langzaam r groter maken, tot het bekende evenwicht instabiel wordt. Bij die waarde van r waarbij het reële deel van ten minste één van de eigenwaarden door nul gaat, treedt een *bifurcatie* op: het aantal evenwichten kan toe- of afnemen, de stabiliteit van de evenwichten kan veranderen, en (quasi-)periodieke oplossingen kunnen ontstaan of verdwijnen. Eventuele nieuwe evenwichten en/of periodieke oplossingen kunnen vervolgens ook weer worden gecontinueerd. Op deze manier vinden we een *bifurcatiediagram*, een voorbeeld is gegeven in Figuur 7. Zwarte lijnen in dit diagram geven aan dat evenwichten stabiel zijn, grijze lijnen duiden instabiele evenwichten aan. In deze figuur zien we dat voor kleine r de amplitude van de verstoring nul is, en dat het constant hellende bodemprofiel stabiel is. Als $r \sim 0,163$ verliest dit breedte-gemiddelde profiel zijn stabiliteit en zien we dat er twee nieuwe stabiele evenwichten ontstaan. Dit type bifurcatie wordt een *pitchfork bifurcatie* genoemd, hier aangegeven met *P1*. Als we deze nieuwe evenwichten volgen door r te variëren, treden er nieuwe bifurcaties op (zoals andere pitchfork bifurcaties, aangegeven met een *P*, folds (*F*) en Hopf-bifurcaties (*H*)). Bij Hopf-bifurcaties ontstaan of verdwijnen periodieke oplossingen. Het bifurcatiediagram laat zien dat er bij dezelfde parameterwaarden meerdere (stabiele) evenwichten mogelijk zijn. Verder kunnen we ook periodieke oplossingen verwachten, welke in dit model te interpreteren zijn als migrerende geulen en platen.

Het bovenste figuur in de linker inzet in Figuur 7 laat de niet-triviale evenwichtsbodem zien voor $r \sim 0,2$, de onderste figuur in deze inzet het verschil ten opzichte van de constant hellende bodem: door de interne dynamica



Figuur 6 Meest instabiele bodemverstoring ($n=2$), behorend bij de neutrale stabiliteitscurve in Figuur 5. Donkere (lichte) tinten geven negatieve (positieve) bodemverstoringen weer, pijltjes laten de richting van het getijgemiddeld sedimenttransport zien.



Figuur 7 Bifurcatie diagram voor een bekken met een lengte van 20 km en een breedte van 1 km

organiseert het systeem zich in een kanaal in het midden van het bekken met aan weerszijde een plaat. Voor $r = 0,23$, rechter inzet, zien we dat het kanaal zich nogmaals splitst: voor $x < 14$ km is er één kanaal, verder ach-

terin het bekken zijn er twee kanalen te zien, gescheiden door een plaat.

Discussie en conclusies

Een systematische analyse van een sys-

teem gekoppelde niet-lineaire differentiaalvergelijkingen resulteert in ruimtelijke patronen die kwalitatief het waargenomen geul-plaatstelsel in bijvoorbeeld Waddengebieden reproduceren. Deze ruimtelijke patronen zijn een voorbeeld van morfodynamische zelforganisatie [5], dat wil zeggen dat de positieve terugkoppelingen binnen het model zelf resulteren in de waargenomen patronen. Ook veel van de in de inleiding genoemde observaties kunnen worden beschreven met behulp van morfodynamische terugkoppelingen. Het is dan wel zaak om de voor die observaties relevante processen in het mathematische model correct mee te nemen.

Er zijn nog vele uitdagingen om deze terugkoppelingen correct te representeren binnen een geïdealiseerd mathematisch model, denk hierbij bijvoorbeeld aan de invloed van klimaatverandering op de geul-plaatpatronen, de interactie tussen verschillende getijdcomponenten, extreme gebeurtenissen en de interacties tussen sediment met verschillende korrelgroottes. Het is van belang om deze processen op een systematische manier te kunnen analyseren, inzicht in het bestaan van meervoudige evenwichten en hun domein van attractie is essentieel in het nemen van optimale beslissingen met betrekking tot bijvoorbeeld gaswinning in de Waddenzee.

Referenties

- 1 R. Almar, G. Coco, K.R. Bryan, D.A. Huntley, A.D. Short en N. Senechal, Video observations of beach cusp morphodynamics, *Marine Geology* 254 (2008), 216–223.
- 2 M.C. ter Brake en H.M. Schuttelaars, Modeling equilibrium bed profiles of short tidal. On the effect of the vertical distribution of suspended sediment and the influence of the boundary conditions, *Ocean Dynamics* 60 (2009), 183–204.
- 3 M.C. ter Brake en H.M. Schuttelaars, Channel and shoal development in a short tidal embayment; an idealized model study, *J. Fluid Mech.* 677 (2011), 503–529.
- 4 M.C. ter Brake, Tidal embayments: modelling and understanding their morphodynamics, Proefschrift, TU Delft, 2011.
- 5 G. Coco en A.B. Murray, Patterns in the sand: From forcing templates to self-organization, *Geomorphology* 91 (2007), 271–290.
- 6 D.M.P.K. Dissanayake, R. Ranasinghe en J. A. Roelvink, The morphological response of large tidal inlet/basin systems to relative sea level rise, *Climatic Change* 113 (2012), 253–276.
- 7 S.M. van Leeuwen, Tidal inlet systems: bottom pattern formation and outer delta development. Proefschrift, Universiteit Utrecht, 2012.
- 8 J.A. Sanders en F. Verhulst, (1985). Averaging methods in nonlinear dynamical systems. Springer, New York.
- 9 H.M. Schuttelaars en H.E. de Swart, An idealized long-term morphodynamic model of a tidal embayment., *Eur. J. Mech., B/Fluids* 15 (1996), 55–80.
- 10 H.M. Schuttelaars en H.E. de Swart, Initial formation of channels and shoals in a short tidal embayment, *J. Fluid Mech.* 386 (1999) 15–42.