

Jeroen Spandaw

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TU Delft

j.g.spandaw@tudelft.nl

Vakantiecursus

Divergente divertimenti

Hoeveel is oneindig minus oneindig? Sinds 1946 organiseert het CWI in de zomer een vakantiecursus. Deze inspirerende en informatieve bijeenkomst over wiskunde wordt vanaf 2012 georganiseerd door het Platform Wiskunde Nederland. Het thema is ‘De exacte benadering’. Jeroen Spandaw houdt een lezing over divergente reeksen en integralen. Hij laat zien dat divergente reeksen verrassende eindige uitkomsten kunnen hebben.

In de vakantiecursus van 2012 mocht ik iets vertellen over divergente reeksen en integralen. Een dankbaar thema, want het begrip ‘oneindig’ intrigeert ook leerlingen. Bovendien zijn intuïtieve manipulaties van divergente reeksen en de daaruit resulterende paradoxen heel toegankelijk. Dat was niet alleen prettig voor mijn publiek, maar ook voor mij, want ik ben geen expert in de analyse. Vrijwel al mijn wiskundige en historische kennis over dit onderwerp heb ik uit het beroemde boek *Divergent Series* van Hardy.

Het ging me vooral om het plezier dat je aan divergente reeksen kunt beleven. Dat geldt ook in deze tekst. Voor meer diepgang verwijs ik naar [1]. In mijn wiskundestudie leerde ik divergente reeksen te herkennen en vervolgens te negeren. Later ontdekte ik echter dat natuurkundigen in staat zijn om zinnige informatie uit divergente reeksen te halen. “Just because something is infinite, doesn’t mean it is zero”, zeggen zulke natuurkundigen. Met twijfelachtige methoden boekten ze interessante resultaten, die soms zelfs experimenteel bevestigd werden. Hieronder zal ik hiervan twee voorbeelden geven.

Behalve vermaak probeerde ik ook enige lering te brengen. Twee punten zijn al genoemd. Allereerst zijn divergente reeksen niet nutteloos. Ten tweede kunnen natuurkundi-

gen met dubieuze methoden interessante resultaten boeken. De rechtvaardiging hiervoor ligt voor hen in het laboratorium, niet in vlekkeloze logica. Gelukkig zijn er ook keurige wiskundige sommatiemethoden voor divergente reeksen, waarvan enkele in dit artikel de revue passeren. Andere leerpunten zijn asymptotische ontwikkeling en het belang van definities.

Op de grens tussen con- en divergentie

Na een korte inleiding over de divergentie van $\sum_1^\infty n^{-1}$ en Eulers berekening van $\sum_1^\infty n^{-2}$ kwam de trompet van Toricelli ter sprake. Dit is het omwentelingslichaam van $y = x^{-1}$ om de x -as voor $x \geq 1$. De inhoud $\pi \int_1^\infty y^2 dx$ is eindig, maar de oppervlakte $2\pi \int_1^\infty y \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$ is oneindig! De eindige hoeveelheid verf die in de trompet past, is dus niet voldoende om de oneindige buitenkant te verven. Een interessante paradox voor leerlingen die aansluit op de schoolstof. De herschikingsstelling van Riemann is eveneens toegankelijk voor leerlingen, zeker als je haar aan de hand van een concreet voorbeeld zoals $\sum_1^\infty (-1)^n n^{-1}$ behandelt.

De noodzaak van definities

Na de milde divergentie in de vorige paragraaf bekijken we nu wat wildere reeksen. Neem

bijvoorbeeld de volgende redenering:

$$S_1 := 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - S_1,$$

dus $S_1 = \frac{1}{2}$. Mag dat (om het eens in leerlingentaal te formuleren)? Het voor leraren verrassende antwoord luidt: dat hangt van de interpretatie af. Als je de som van een reeks op de gebruikelijke manier definieert als de limiet van de deelsommen $1, 0, 1, 0, \dots$, dan is de bovenstaande ‘berekening’ natuurlijk niet correct. Maar er zijn andere mogelijkheden, zoals de sommatiemethoden van Cesàro en Abel. Volgens de sommatiemethode van Cesàro nemen we de limiet van de *gemiddelden* $1, \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}, \frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3}, \frac{1+0+1+0}{4} = \frac{1}{2}, \dots$ van de deelsommen. Die limiet bestaat wel en is inderdaad gelijk aan $\frac{1}{2}$. De sommatiemethode van Cesàro voldoet aan de axioma’s

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \dots &= L \\ \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots &= L - a_0 \end{aligned} \quad (1)$$

en

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \dots &= L \\ \Rightarrow (ka_0) + (ka_1) + (ka_2) + \dots &= kL. \end{aligned} \quad (2)$$

(De tweede eigenschap hebben we gebruikt voor $k = -1$.) Als we de berekening van S_1 bekijken en we interpreteren de reeks volgens de sommatiemethode van Cesàro, dan is de redenering correct zodra we weten dat de reeks ‘Cesàro-convergent’ is. Iedere som-

matiemethode die aan axioma's (1) en (2) voldoet en die aan $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ een eindige waarde toekent, moet dus $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$ opleveren.

Een tweede sommatiemethode is die van Abel. Gegeven een rij $\{a_n\}$ bekijk je de machtreeks $f(x) = \sum a_n x^n$. Als de convergentiestraal van deze machtreeks minstens 1 is en $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ bestaat, dan is deze limiet per definitie de Abel-som van de reeks $\sum a_n$. (Abel heeft bewezen dat een convergente reeks ook convergeert in deze zin en wel met dezelfde limiet. Vanwege deze stelling heeft Hardy deze methode naar Abel genoemd. Abel veroordeelde overigens het gebruik van divergente reeksen, die hij een uitvinding van de duivel noemde.) Je rekent gemakkelijk na dat de methode van Abel eveneens $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$ levert. Dit volgt ook uit de theorie. Cesàro-convergente reeksen zijn namelijk convergent in de zin van Abel met dezelfde som. Bovendien voldoet de methode van Abel aan axioma's (1) en (2), dus is $S_1 = \frac{1}{2}$ het enige mogelijke antwoord.

Hardy maakt hierover in zijn boek een interessante opmerking. Voor ons is vanzelfsprekend dat je over $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ pas uitspraken kunt doen als je gedefinieerd hebt wat je met die uitdrukking bedoelt. Volgens Hardy is dit een ontwikkeling uit de negentiende eeuw. Voor Cauchy ging men er in de regel van uit dat de som bestond; het ging er alleen om hoe je die som kon uitrekenen. Vermoedelijk denken leerlingen (onbewust) ook zo. Ik denk dat het goed is om je dat als docent te realiseren.

Semper crescendo

De reeks $S_2 := 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ is nog wilder dan $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. De methode van Cesàro faalt, maar als we het idee van Cesàro om te middelen nog een keer toepassen, dan vinden we $S_2 = \frac{1}{4}$. De methode van Abel geeft eveneens $\frac{1}{4}$. Dit voorbeeld toont aan dat de methode van Abel sterker is dan die van Cesàro. Hier is nog een argument voor $S_2 = \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) \\ &\quad - (1 - 2 + 3 - 4 + \dots) \\ &= 1 - S_1 - S_2 = 1 - \frac{1}{2} - S_2. \end{aligned}$$

Dit argument werkt voor iedere sommatiemethode waarvoor S_1 en S_2 convergeren en die niet alleen aan de axioma's (1) en (2) voldoen, maar ook aan

$$\begin{aligned} \sum a_n &= s \quad \text{en} \quad \sum b_n = t \\ \Rightarrow \sum (a_n + b_n) &= s + t. \end{aligned} \quad (3)$$



De methoden van Cesàro en Abel voldoen beide aan de drie axioma's. Toch geldt niet $S_2 = \frac{1}{4}$ volgens Cesàro, want S_2 is niet Cesàro-sommeerbaar.

Nog divergentier dan S_2 is $S_3 := 1 - 2 + 4 - 8 + \dots$. De methode van Abel werkt niet (en Cesàro dus ook niet), omdat de bijbehorende machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n = (1 + 2x)^{-1}$ convergentiestraal $\frac{1}{2}$ heeft. Toch ligt het voor de hand om S_3 te definiëren als $(1 + 2)^{-1} = \frac{1}{3}$. Deze methode (gebaseerd op analytische voortzetting) noemen we de methode van Euler. Deze sommatiemethode voldoet net als de methoden van Cesàro en Abel aan de axioma's (1), (2) en (3). Iedere sommatiemethode die aan die axioma's voldoet en aan S_3 een eindige waarde toekent moet $S_3 = \frac{1}{3}$ geven, want die waarde voldoet aan $1 - 2S_3 = S_3$. Nauw verwant met S_3 is $S_4 := 1 + 2 + 4 + \dots$. Eulers methode geeft $S_4 = -1$. Interessant dat louter positieve termen een negatieve 'som' hebben!

De paradox van milde divergentie

Euler schreef: "Ich glaube, dass jedes series einen bestimmten Wert haben müsse." (Voor wiskundige begrippen gebruikte hij Latijnse termen.) Toch bestaan er reeksen die we er nog steeds niet onder hebben gekregen. Een eenvoudig voorbeeld is $S_5 := 1 + 1 + 1 + \dots$. Geen enkele sommatiemethode die voldoet aan axioma (1) kan aan S_5 een eindige waarde toekennen, want die waarde zou een oplossing zijn van $S_5 = 1 + S_5$.

Een interessanter voorbeeld is de mild divergente harmonische reeks $\sum n^{-1}$. Ook hier-

over maakt Hardy een interessante opmerking. Mild divergente reeksen zijn in zekere zin moeilijker te temmen dan wild divergente reeksen. De harmonische reeks $\sum n^{-1}$ is niet convergent in de zin van Abel, terwijl Abel de wildere reeks $\sum (-1)^n n$ wel aankan. Dit fenomeen is een gevolg van de Tauberstellingen. Deze stellingen gaan over reeksen $\sum a_n$ waarvan de termen voldoende snel naar 0 convergeren, bijvoorbeeld $a_n = O(n^{-1})$. Als zo'n reeks convergent in de zin van Abel is, dan is de reeks convergent in de traditionele zin (en met dezelfde limiet). Een mild divergente reeks krijgen we met Abels methode dus niet in het gareel.

De reeks $1 + 2 + 3 + \dots$

Een divergent divertimento dat niet mag ontbreken in zo'n feestelijke vakantie cursus is

$$S_6 := 1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}.$$

Deze opmerkelijke 'identiteit' wordt gebruikt in de natuurkunde, bijvoorbeeld in de berekening van het aantal dimensies van het universum in de bosonische snaartheorie en in de berekening van een zekere minuscule kracht tussen twee metalen platen. Deze kracht is voorspeld door en vernoemd naar de Nederlandse natuurkundige Hendrik Casimir (1909–2000). Later is deze kracht in laboratoria ook daadwerkelijk gemeten.

Behalve deze natuurkundig-experimentele onderbouwing is er ook een wiskundig argument, dat teruggaat op Euler. "Though $\sum n = -\frac{1}{12}$ be madness, yet there is a method in it!" We bekijken de reeks

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

De reeks divergeert voor $s \leq 1$. Toch kunnen we iets zinvol zeggen over $\zeta(-1)$ door het domein van ζ uit te breiden naar de complexe getallen. De reeks convergeert in het halfvlak $\text{Re}(s) > 1$ en definieert daar een complex analytische functie. Die functie heeft een unieke analytische voortzetting naar $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, de beroemde *Riemann-zètafunctie*. Deze functie neemt in $s = -1$ de waarde $-\frac{1}{12}$ aan. Dit is de reden voor de drieste bewering $\sum n = -\frac{1}{12}$.

In de vorige paragraaf bekeken we $S_5 := 1 + 1 + 1 + \dots$. Met de zètafunctie vinden we $S_5 = \zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Kunt u dit rijmen met de vergelijking $S_5 = 1 + S_5$?

Asymptotische ontwikkeling

Kunnen we de beweringen als $1 + 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2}$ en $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ nog overtreffen?

Jawel! In de werken van Euler vinden we de spectaculaire bewering

$$0! - 1! + 2! - 3! + \dots = 0.596347 \dots$$

Dit is het bijbehorende argument:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t} dt &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty (-t)^n e^{-t} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty (-t)^n e^{-t} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n n!. \end{aligned}$$

Bij een tentamen analyse zou deze regel vrij veel puntenaftrek opleveren. Mogen we bijvoorbeeld som en integraal wel verwisselen? Erger nog: de reeks $\sum (-t)^n$ in de integrand is divergent op een groot gedeelte van het integratie-interval $[0, \infty)$. Aan de positieve kant: $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$ is correct en de $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t} dt$ is inderdaad eindig en gelijk aan 0.596347...

Laten we in de geest van Euler en de zomercursus een vrijzinnig standpunt innemen en de 'waarde' van de wilddivergente reeks rechtsonder *definiëren* als de eindige integraal links. We kunnen dit eenvoudig generaliseren naar

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n n! x^n = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt} dt.$$

De convergentiestraal van de reeks links is 0. Toch kunnen we de eindige deelsommenreeks $\sum_{n=0}^m (-1)^n n! x^n$ gebruiken om de integraal rechts te benaderen voor bijvoorbeeld $x = \frac{1}{10}$. Als je dit doet met Maple vind je het beste resultaat voor $m = 9$ met een relatieve fout van 2×10^{-4} . Voor grotere m loopt de fout al snel astronomisch op: bij $m = 20$ is de fout al bijna honderd keer zo groot en bij $m = 30$ meer dan een miljoen keer. De integraal is ongeveer 1, de deelsom voor $m = 100$

is ongeveer 10^{57} !

Dit verschijnsel heet *asymptotische ontwikkeling*. In plaats van een formele behandeling (zie bijvoorbeeld [1]) geef ik liever nog twee mooie voorbeelden van dit verschijnsel. Het eerste voorbeeld komt uit de natuurkunde. Het betreft een indrukwekkend succes uit de theoretische en experimentele natuurkunde: de voorspelling en meting van het zogenaamde magnetische dipoolmoment μ van een elektron. U kunt zich μ voorstellen als een maat voor de 'magneetsterkte' van een elektron. Voor het vervolg doet de natuurkundige interpretatie er niet toe: μ is een getal dat theoretisch berekend en experimenteel gemeten kan worden. Een buitengewoon ingewikkelde berekening levert de eerste coëfficiënten c_n van een machtreeks $\sum c_n x^n$ op. Vervolgens wordt in een deelsom van die reeks voor x de fijnstructuurconstante $\alpha = 0.00729735257 \dots$ ingevuld. Het resultaat is een theoretische voorspelling voor μ , die in deeltjesversnellers met adembenemende nauwkeurigheid (ongeveer tien decimalen) is bevestigd. Natuurkundigen zijn terecht zeer trots op dit resultaat. Ze vertellen er echter meestal niet bij dat de reeks $\sum c_n x^n$ waarschijnlijk convergentiestraal 0 heeft. (Dit volgt uit een natuurkundig argument van de theoretische natuurkundige Dyson.) Meer termen in $\sum c_n \alpha^n$ leiden dus niet tot steeds betere voorspellingen van μ .

Tot slot een wiskundig voorbeeld van asymptotische ontwikkeling. We starten voor de verandering eens met een convergente reeks. De Taylorreeksontwikkeling van $\arctan(x)$ geeft

$$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) = \pi.$$

Deze reeks convergeert tergend langzaam. Als we bijvoorbeeld doorrekenen tot $1/1\,000\,000$, dan vinden we

$$\begin{aligned} S &:= 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{999\,999} \right) \\ &= 3.141590 \dots, \end{aligned}$$

terwijl $\pi = 3.141592 \dots$. De zesde decimaal is dus al fout. Dat is niet verwonderlijk, want we verwachtten dat de fout ongeveer $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ is.

Maar nu komt het. We kijken naar de decimalen na de foutieve zesde decimaal:

$$\begin{aligned} S &= 3.14159 \underline{0}6535 \, 89793 \, 24 \underline{0}46 \\ &\quad 26433 \, 83269 \, 50288 \, 4197 \dots \end{aligned}$$

Vergelijk dit met

$$\begin{aligned} \pi &= 3.14159 \, 26535 \, 89793 \, 23846 \\ &\quad 26433 \, 83279 \, 50288 \, 4197 \dots \end{aligned}$$

We zien dat na de foutieve zesde decimaal weer tien correcte decimalen volgen! Daarna komen twee foutieve decimalen, dan weer tien correcte, een foute en weer (minstens) tien correcte decimalen. Wat is hier aan de hand?

Voor n deelbaar door 4, bijvoorbeeld voor $n = 1\,000\,000$, definiëren we $R_n := \pi - 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{n-1} \right)$. Borwein, Borwein en Dilcher hebben in [2] de asymptotische ontwikkeling

$$R_n = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} + \frac{10}{n^5} - \frac{122}{n^7} + \dots$$

afgeleid. Vullen we $n = 10^6$ in, dan vinden we $R_{1\,000\,000} = 2 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot 10^{-18} + 1 \cdot 10^{-29} - 1.22 \cdot 10^{-40} + \dots$. Dit verduidelijkt waarom de benadering $S_{1\,000\,000}$ in de eerste 39 decimalen klopte, behalve bij decimalen nummer 6, 17, 18 en 29.

De bovenstaande reeksontwikkeling voor R_n is asymptotisch. De beste benadering van R_n krijg je door ongeveer n termen te nemen. Om het vreemde verschijnsel van de vele correcte decimalen te begrijpen, is een handjevol termen gelukkig al voldoende. ζ

Referenties

- 1 G.H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, 1949.
- 2 J.M. Borwein, P.B. Borwein en K. Dilcher, Pi, Euler numbers, and asymptotic expansions, *Amer-*

ican Mathematical Monthly 96 (1989), 681–687.