Jan van Mill
Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit Amsterdam
j.van.mill@vu.nl

Afscheidsrede

Brouwers dimensionsgrad:

Op 12 oktober 2012 nam Jan van Mill, een van de meest vooraanstaande onderzoekers op het gebied van de topologie, afscheid als hoogleraar zuivere wiskunde aan de Faculteit der Exacte Wetenschappen van de Vrije Universiteit Amsterdam. In zijn afscheidsrede blikt hij terug op 44 jaar 'studeren' aan de VU. Hij stelt ons voor aan drie hoofdrolspelers die voor hem van grote invloed waren. Na zijn afscheidsrede ontving Van Mill een koninklijke onderscheiding, hij werd benoemd tot Officier in de Orde van Oranje-Nassau.

Bij het nadenken over mijn afscheidsrede, gingen mijn gedachten uiteraard terug naar hoe het begon, wat mijn dromen waren toen ik indertijd mijn oratie uitsprak. Al lezend in het belegen geschrift getiteld 'Over het verschuiven van problemen naar het oneindige door middel van kleine bewegingen', zag ik dat ik in elk geval twee belangwekkende mededelingen deed. Allereerst biechtte ik op dat ik eigenlijk helemaal geen zin had in de intreerede. Het was dan ook te danken aan 'een zeer overredende figuur binnen de Subfaculteit Wiskunde en Informatica van de Vrije Universiteit' dat het, enkele jaren na mijn benoeming, er toch van was gekomen.

Maarten Maurice (1934–1996)

Die zeer overredende figuur was de te vroeg overleden Maarten Maurice, over wie ik het later nog uitvoeriger zal hebben. In de tijd dat ik decaan was, moest ik vaak denken aan mijn eigen onwil indertijd, als ik nieuwbenoemde hoogleraren geestdriftig aanspoorde om toch vooral een intreerede uit te spreken. Wie denkt dat wijsheid met de jaren komt, vergist zich. Aanvankelijk had ik ook helemaal geen zin om een afscheidsrede te houden. Het is dan ook te danken aan niet één maar zelfs twee 'zeer overredende' figuren dat ik dit probleem niet naar het oneindige heb verschoven. Het betreft de rector magnificus van de Vrije Universiteit Lex Bouter en collega Rien Kaashoek. Wie in handen van dit zeer overredende duo valt, heeft niets in te brengen, dat kan ik u verzekeren.

De tweede belangwekkende mededeling die ik deed, was hoe ik bij de VU terecht kwam. Ik wilde mij oorspronkelijk in 1968 bij de Universiteit van Amsterdam laten inschrijven, maar dat werd op hardhandige wijze verhinderd door mijn toenmalige wiskundelerares juffrouw Dengerink, die mij gedecideerd naar de VU verwees. Ik liet dit maar over mij heen komen omdat er al de nodige onenigheid thuis was geweest. Vooral mijn moeder zag mijn keus voor de wiskunde in het geheel niet zitten, zij had een studie medicijnen voor mij in gedachte. Maar ik hield koppig vol, het moest en zou wiskunde worden. (In het boek *De onvergetelijke leraar* [3] wijdt Andries Knevel een heel hoofdstuk aan juffrouw Dengerink. Hij schrijft dat zij een geboren docente was die gedreven en met flair hem en zijn klasgenoten door de impopulaire en moeilijke stof heen loodste. Het eerste kan ik volmondig beamen, maar dat zij 'impopulaire en moeilijke stof doceerde' is een uitspraak die ik niet graag voor mijn rekening zou willen nemen.)

En zo kwam ik in 1968 op zestienjarige leeftijd naar de VU. Het was in de tijd van de nieuwbouw, ik heb het hoofdgebouw uit de grond zien verrijzen. De VU was in 1968 een

Lex Bouter en Rien Kaashoek


Jan van Mill

controverse en verwarring

grote bouwput, gestamp en gedreun was aan de orde van de dag, ongestoord onderwijs volgen was bijna onmogelijk. Maar voor mij was de VU het paradijs op aarde. Ik hoop u in deze afscheidsrede een idee te geven van wat dit paradijs mij heeft gebracht in de afgelopen 44 jaar, zowel qua wetenschap als anderszins.

De studie wiskunde

In die tijd was de studie wiskunde geheel anders opgebouwd dan nu. Eigenlijk studeerde je in het eerste jaar zowel wis- als natuurkunde. Erg veel specialisatie was er niet in de latere jaren. Ik had maattheorie, meetkunde, kansrekening, statistiek en informatica in mijn pakket. De meeste studenten hadden dat. Aan het befaamde natuurkundepracticum in het eerste jaar bewaar ik mooie herinneringen. Dat werd in mijn tijd gerund door assistenten en de baas was een zogenaamde hoofdassistent. “Hoe lang bent u al aan de VU?”, vroeg ik op een keer. “Ik ben dertiendejaars”, was het antwoord. Dat maakte op mij een verpletterende indruk. Wat moest die man knap zijn, hij studeerde al dertien jaar aan de VU! Dit vertel ik natuuurlijk alleen maar om indruk op u te maken, ik studeer al ruim 44 jaar aan de VU, hoe knap moet ik dan wel niet zijn? Het leukste deel van de studie kwam op het laatst, dat betrof de zogenaamde werkgroepen. Onder leiding van docenten werd een stukje literatuur bestudeerd. De twee werkgroepen die ik volgde waren ‘automatentheorie’ en ‘geschakelde systemen’, beide onder leiding van Cor Baayen en Evert Wattel. De werkgroep ‘geschakelde systemen’ ging over het proefschrift van Albert Verbeek (1946–1990), de laatste promovendus van de jong overleden UvA-hoogleraar Johannes de Groot. (Albert Verbeek was naast topoloog ook statisticus. De combinatie stochastiek en topologie komt vaker voor. Het bekendste Nederlandse voorbeeld is David van Dantzig (1900–1959).)

Een *geschakeld systeem* is een collectie verzamelingen waarvan de elementen een paarsgewijze niet-lege doorsnijding hebben. In die tijd dacht men dat de geschakelde systemen een uitvinding waren van De Groot, maar dat bleek een misvatting. Dergelijke systemen werden al veel eerder gebruikt door beroemde wiskundigen zoals Frigyes Riesz (1880–1956) in de meetkunde [32] en John von Neumann (1903–1957) in de speltheorie [29]. De geschakelde systemen kunnen gebruikt worden om vanuit bestaande ruimten nieuwe te maken en daar ging het proefschrift van Verbeek over. Tot mijn niet geringe verbazing begreep ik wat Verbeek schreef, zelfs in die mate dat ik al snel probeerde om zijn stellingen te verbeteren, wat me af en toe ook lukte. Mijn interesse in het proefschrift viel op en toen de ons allen bekende Mient-Jan Faber de VU verliet, werd ik gevraagd zijn plaats als promotiemedewerker in te nemen. Een hele eer om Mient-Jan op te volgen. Ik ben een ‘second generation’ bekende Nederlander, iemand die het zelf niet tot bekende Nederlander heeft gebracht, maar er een is opgevolgd. Een mens moet een keer tevreden zijn. (Het is maar weinigen bekend dat Mient-Jan Faber een wiskundige is en zelfs in 1974 aan de VU


Het hoofdgebouw van de VU omstreeks 1968 (met dank aan Historische foto’s, StudioVU van de Dienst Marketing & Communicatie)


Het natuurkundepracticum in vroeger tijden


Johannes de Groot (1914–1972)

is gepromoveerd bij Maarten Maurice in de topologie op het proefschrift *Metrizability in generalized ordered spaces*.)

Mijn gevoel over de opleiding is dat zij gedegen was en mij prima toerustte voor mijn toekomstige carrière als onderzoeker in de wiskunde.

De eerste stappen als onderzoeker

Het hoofdresultaat van mijn proefschrift was de oplossing van een vermoeden van De Groot: de ruimte die je krijgt uit het eenheidsinterval $\mathbb{I} = [0,1]$ door de geschakelde systemen toe te voegen, is topologisch equivalent met de fundamentaalkubus $\mathbb{I}^\infty$ van Hilbert. Om dat te bewijzen verdiepte ik mij in een toen vrij nieuwe theorie, de *oneindig-dimensionale topologie*, waarvan de Amerikaan Dick Anderson de grondlegger was. Die theorie was betrekkelijk nieuw in Nederland en loste een aantal zeer fundamentele problemen in de wiskunde op, zoals bijvoorbeeld de invariantie van Whitehead-torsie [6] en het eindig zijn van het homotopie-type van compacte absolute omgevingsretracten [36].

De oneindig-dimensionale topologie heeft mij nooit meer verlaten, tot op de dag van vandaag. Het is een buitengewoon interessante theorie waar ik van mag zeggen dat ik die in Amsterdam samen met mijn promovendi mede heb uitgediept en uitgebreid. De theorie kwam in 1978 plotsklaps tot een voorlopig einde doordat de Poolse wiskundige Henryk Toruńczyk de wereld verbaasde door zijn topologische karakteriseringen van oneindigdimensionale variëteiten [34–35]. Ik heb over zijn werk en dat van anderen mijn eerste boek geschreven. Daarna kwam de oneindig-dimensionale topologie weer tot leven in de topologische classificatie van functieruimten. Dit door het werk van de Fransman Cauty en de Polen Dobrowolski, Marciszewski en Mogilski en een concurrerend Amsterdams team waarvan ik de stimulator was. Daar ging mijn tweede boek over. Ook in mijn latere werk met Jan Dijkstra en verschillende promovendi, over de Erdős-ruimten [11], was de oneindig-dimensionale topologie op de achtergrond sterk aanwezig. Datzelfde geldt ook voor de recente topologische karakteriseringsstelling van de bekende Nöbeling-ruimten en eveneens voor de al wat oudere resultaten over de universele n-dimensionale Menger-ruimten.

Richard Davis Anderson (1922–2008)

Maar ik wil het nu niet over de oneindig-dimensionale topologie hebben.

Na mijn promotie in 1977 kreeg ik een beurs van ZWO om een jaar in Madison (Wisconsin) in de groep van Mary Ellen Rudin mee te draaien. Na dat jaar was ik een jaar verbonden aan de VU, waarna we in 1979 weer naar de Verenigde Staten vertrokken. De al eerder genoemde Dick Anderson had mij uitgenodigd om een jaar bij hem te komen werken aan de Lousiana State University te Baton Rouge. Het leven in het zuiden van Amerika vonden wij erg prettig, zij het dat eind zeventiger jaren het politieke klimaat daar anders was dan we gewend waren. Toen ik mijn archief opruimde, kwam ik het antwoord tegen op een brief die ik geschreven heb aan de gouverneur van de staat Louisiana: ik bleek politiek actief te zijn geweest! Maar ik kwam niet voor de politiek, ik kwam voor de wiskunde.

De theorie van absolute retracten is erg belangrijk in de meetkundige topologie en heeft belangrijke raakvlakken met de oneindig-dimensionale topologie. Ik paste mijn kennis van de oneindig-dimensionale topologie toe om een bekend probleem van de Poolse wiskundige Karol Borsuk (1905–1982) op te lossen. Het gaat hier om het volgende. Borsuk had bewezen dat het continue beeld van een compact absolute retract waarvan elke vezel een absolute retract is, weer een absolute retract is, onder de extra aanname dat het beeld eindig-dimensionaal is. Dit is een versie van de bekende Vietoris–Begle-stelling uit de algebraïsche topologie. De vraag was of de extra aanname over de eindig-dimensionaliteit van het bereik zou kunnen worden weggelaten. De experts waren van mening dat dat zou moeten kunnen, maar ik construeerde een tegenvoorbeeld. Daartoe paste ik een voorbeeld aan van de analyticus Taylor [33], dat op zijn beurt gestoeld was op belangrijk werk

Mary Ellen Rudin, Marije van Mill (l) en Josine van Mill (r) in 1992

Louisiana State University, Baton Rouge (LA)

van Adams en Toda uit de algebraïsche topologie. Anderson was erg in zijn nopjes, stapte naar het hoofd van de afdeling die mij daarop prompt een aanbieding deed voor een vaste baan. Op dat moment ging het bijna mis tussen mij en de VU, want ik aanvaardde het aanbod. Geertje en ik waren al op zoek naar een mooi huis uit vroeger tijd, toen er een belangrijke verandering in ons leven plaats vond. Wij waren, om het in modern jargon te zeggen, zwanger geraakt. Geertje deelde mee dat zij de baby in Nederland wilde krijgen en met dat verhaal ging ik naar het hoofd van de afdeling wiskunde. Hij ontstak in grote woede. “Wat dacht je,” riep hij, “dat de immigranten die in de zestiende en zeventiende eeuw naar dit prachtige land kwamen, terugkeerden als hun vrouwen zwanger raakten? Jij hebt niet het bloed van een echte immigrant!” Zijn woorden bleken profetisch, want ik heb daarna alle aanbiedingen van andere universiteiten, zowel in binnen- als buitenland, afgeslagen. Zo verdween ik in de zomer van 1980 van de Lousiana State University, maar niet voordat ik nog een probleem in de theorie van absolute retracten had opgelost, dit keer samen met Anderson en zijn collega Doug Curtis [2].

Maar ik wil het nu niet over de theorie van absolute retracten hebben.

Brouwers dimensionsgrad

Omdat u zich inmiddels wel zult afvragen waar ik het dan wel over wil hebben, stel ik u de hoofdrolspelers van mijn betoog voor.

Daarna zal ik de draad van mijn verhaal weer oppakken.

Brouwer

Allereerst stel ik Luitzen Egbertus Jan Brouwer aan u voor, ook wel bekend als Bertus en als ‘Het Genie van Overschie’. Voor 1700 waren er twee Nederlandse wiskundige genieën die de wereld nu nog kent: Simon Stevin en Christiaan Huygens. In de drie eeuwen daarna is er maar één, namelijk Bertus Brouwer. Hij is zo beroemd dat hij zelfs op een postzegel staat (zie Figuur 1). Hij was een wonderkind en zijn bijdrage aan de wiskunde is groot en wel om twee redenen. Ten eerste bracht Brouwer de topologie op gang. De sleutelvraag in de topologie is: wat gebeurt er met meetkundige figuren onder toegestane vervormingen? De topologie is de liberaalste tak van de meetkundefamilie, zij staat continue vervormingen toe. Dat zijn vervormingen waarin wel geduwd en getrokken mag worden, maar niet geknipt of geplakt, *vloeiende* bewegingen dus. De topologie staat daarom ook wel als ‘rubbermeetkunde’ bekend. Een mooie illustratie is de vloeiende beweging die een koffiekop overvoert in een donut (zie Figuur 2).

Ten tweede legde Brouwer de basis voor intuïtionistische wiskunde.

Brouwer had ook belangwekkende filosofische interesses. In 1905 hield hij een filosofisch-mystieke lezingencyclus in Delft en publiceerde daar een boekje over, getiteld *Leven, Kunst en Mystiek*. In dat document schrijft hij: “Het leven van de menschheid als geheel is een arrogant uitvreten van haar nesten over de gave aarde, een knoeien aan haar moederend gewas, knagend, schendend, een steriel maken van haar rijke scheppingskracht totdat ze alle leven heeft vervreten, en om de dorre aarde dort de menschenkanker weg.” Het is duidelijk dat hier een bijzonder mens aan het woord is.

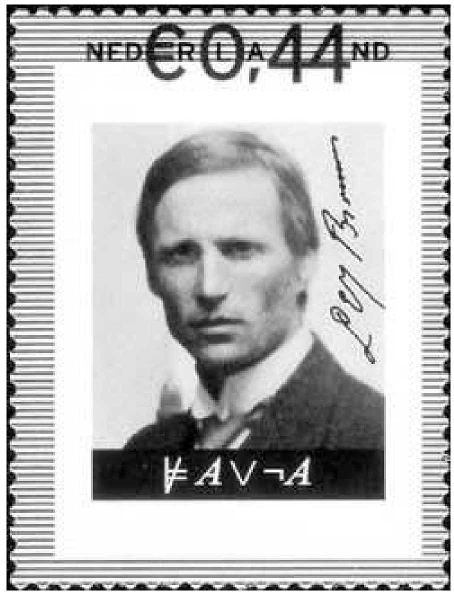
Een belangrijk probleem waar de wiskunde de twintigste eeuw mee inging, was dat van

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966)

de dimensie van een figuur, in de topologie ook wel ruimte genoemd. (Het gaat hier om *topologische* dimensie. Er zijn tegenwoordig bijvoorbeeld in de dynamica vele verschillende dimensiebegrippen waaronder Hausdorffdimensie. De standaard Cantor-verzameling heeft topologische dimensie 0 en Hausdorffdimensie $\log_3(2)$.) Het is intuïtief duidelijk dat een punt nuldimensionaal is, een lijn eendimensionaal, een vlak tweedimensionaal en de ruimte waarin we leven driedimensionaal, et cetera. Maar hoe moet je de dimensie van een willekeurige figuur definiëren en is de dimensie van een figuur invariant bij de bewegingen die in de topologie zijn toegestaan? Een punt kan niet worden overgevoerd in een lijn en het is niet moeilijk in te zien dat een lijn niet vloeiend kan worden overgevoerd in een vlak, maar hoe zit het met een vlak en de driedimensionale euclidische ruimte? Dit probleem bood hardnekkig weerstand aan alle aanvallen en had duidelijk een doorbraak nodig. Die kwam van Brouwer.

Een goede definitie van dimensie was niet voorhanden. Al in 1843–1844 schreef Bolzano over dimensie voor figuren in de driedimensionale euclidische ruimte [4]. Maar dit artikel werd pas ongeveer honderd jaar na schrijven gepubliceerd, dus dat schoot niet op. Zijn definitie is nooit gebruikt, maar is in essentie sterk verwant aan een nu gangbare definitie van dimensie waar we het later over zullen hebben. Na een aantal vage pogingen van verschillende auteurs, was er de eerste serieuze poging in 1912 om tot een dimensiebegrip te komen van de bekende Franse wiskundige Henri Poincaré (1854–1912) [31]. Poincaré stierf spoedig na de publicatie van zijn artikel en hij heeft daardoor zijn ideeën nooit kunnen uitwerken.

Voortbouwend op de ideeën van Poincaré, publiceerde Brouwer in 1913 zijn beroemde artikel ‘Über den natürlichen Dimensionsbegriff’ waarin hij de eerste formele definitie van dimensie gaf, de zogenaamde *dimensionsgrad* van een meetkundige figuur [5]. Een *dimensiefunctie* is een functie die aan elke figuur een getal in $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ toekent, haar *dimensie*, op zo’n manier dat de figuur steeds complexer wordt naarmate de dimensie stijgt. De dimensie van de lege figuur, dat is de figuur zonder enig punt, is gelijk aan -1. De figuren van dimensie 0 zijn bij Brouwer bijzonder, het zijn ruwweg de figuren waarin geen enkel — recht dan wel krom — lijnstukje te bespeuren valt. Een eindige verzameling heeft die eigenschap, maar ook zoiets als het discontinuüm van Cantor. Dat is de verzameling die je krijgt door uit het interval $[0, 1]$ het



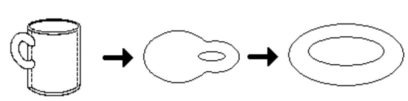
Figuur 1 Brouwerzegel (2007)

middelste derde interval weg te laten, dan uit de overblijvende twee intervallen de middelste derden en ga zo maar door. Aan het eind van het proces is er nog heel veel over, maar daar zit geen enkel lijnstukje in want wat in totaal is weggelaten heeft lengte 1.

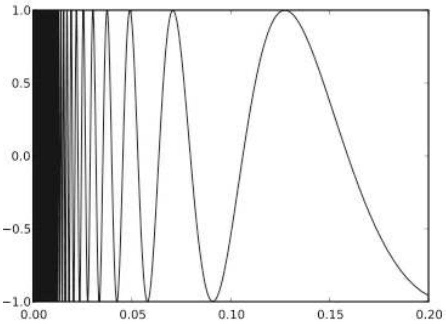
De figuren van dimensie 1 zijn de figuren die je overal kapot kunt knippen door een figuur van dimensie 0 te verwijderen, de figuren van dimensie 2 zijn de figuren die je overal kapot kunt knippen door een figuur van dimensie 1 te verwijderen, et cetera. De intuïtie vertelt ons dat een punt nuldimensionaal is en dat een lijn eendimensionaal is doordat deze in twee stukken uiteen valt door de verwijdering van een punt en dat een vlak tweedimensionaal is doordat dit in twee stukken uiteen valt door de verwijdering van een lijn. Hoe zou je dit formeel kunnen bewijzen en generaliseren naar hogere dimensies?

Brouwer deed dat, hij bewees dat de dimensionsgrad van de euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ gelijk is aan n en dus kan een vlak niet vloeiend overgevoerd worden in de driedimensionale euclidische ruimte. Dit resultaat en de technieken die door Brouwer werden gebruikt, schokten de wiskundige wereld van zijn dagen.

Een jaar later bewees hij zijn beroemde *dekpuntsstelling*, een der meest gebruikte stellingen uit de wiskunde. Deze stelling zegt dat na niet al te wild roeren in een kopje koffie



Figuur 2 Koffiekop en donut zijn topologisch equivalent



Figuur 3 Topologist's sine curve

ten minste één molecuul zijn oorspronkelijke positie zal hebben ingenomen. De meeste wiskundigen kennen de dekpuntsstelling en gebruiken haar veelvuldig, maar hebben er geen idee van hoe zij bewezen moet worden. In 1922 ontwikkelde een jonge Russische wiskundige genaamd Paul Urysohn (1898–1924), niet op de hoogte van het werk van Brouwer, eveneens een theorie van dimensie. Die theorie lijkt als twee druppels water op die van Brouwer, maar er is een subtiel verschil. Er is een probleem met de figuren van dimensie 0 in de zin van Brouwer waar ik het eerder over had. De kern daarvan kan gemakkelijk worden geïllustreerd aan de hand van de 'topologist's sine curve' S in het platte vlak (zie Figuur 3). Bezie de punten $a = (0, -1)$, $b = (0, 1)$ en $c = (\frac{1}{\pi}, 0)$ van S. De verzameling $S \setminus \{a\}$ is samenhangend en dus is $\{b\}$ niet een scheider van $\{a\}$ en $\{c\}$ in de zin van Urysohn. Maar elk continuüm dat a met c verbindt, moet b bevatten en dus is $\{b\}$ wel een scheider tussen $\{a\}$ en $\{c\}$ in de zin van Brouwer. Een triviale constatering, maar wel met grote gevolgen. Urysohn sprak allereerst van een ernstige fout van Brouwer maar liet zich overtuigen dat het ging om een 'slip of the pen', dat Brouwer en hij feitelijk hetzelfde bedoelden. Toen kreeg Brouwer het aan de stok met Karl Menger (1902–1985), die iets later dan Urysohn aan de dimensietheorie werkte en zich niet door Brouwer liet overtuigen. Hij beschuldigde hem van geschiedvervalsing. Al eerder had Brouwer een conflict gehad met de bekende Franse wiskundige Henry Lebesgue (1875–1941) over een gerelateerd probleem. Ondertussen ruziede Brouwer ook nog heftig met David Hilbert (1862–1943) over de grondslagen van de wiskunde. Hilberts opvatting was dat ieder wiskundig probleem ofwel kan worden opgelost, of het kan worden aangetoond dat de oplossing niet bestaat. Brouwer was het daar niet mee eens en was zijn tijd ver vooruit. Er zijn vele boeken en artikelen geschreven over deze knetterende conflicten en voor nu laten we het bij de constatering dat in den beginne de weg van alles wat met Brouwer te maken had niet over rozen ging; wij beperken ons hier tot de dimensietheorie. De wiskundige wereld nam de definitie van dimensie van het tweetal Menger–Urysohn over als het juiste begrip en noemde de dimensionsgrad van Brouwer alleen nog maar bij het vertellen van de geschiedenis van de dimensietheorie. Het Brouwer-archief bevat materiaal dat aantoont dat Brouwer al in 1913 de correcte definitie van scheider had. Achteraf bezien was het niet erg verstandig dat hij die niet tijdig heeft gepubliceerd (bron: D. van Dalen).

De hut van Brouwer in zijn tuin in Blaricum. Ontwerp Rudolf Mauve, 1904.

Paul Alexandroff, Bertus Brouwer en Paul Urysohn

Brouwer deed zijn werk voornamelijk in een hut in zijn tuin in Blaricum, waar hij talloze buitenlandse gasten ontving om over wiskunde te praten. Zo kwamen in 1924 twee jonge Russische wiskundigen langs, Paul Alexandroff (1896–1982) en de al eerder genoemde Paul Urysohn (1898–1924), beiden verbonden aan de Universiteit van Moskou (of Lomonosov-universiteit). Na hun bezoek vertrokken zij naar Frankrijk waar Urysohn tragisch om het leven kwam, hij verdronk.

Hurewicz

De tweede hoofdrolspeler is Witold Hurewicz (1904–1956). Hij werd in Lódz geboren. Deze stad ligt tegenwoordig in Polen, maar toen in het Russische keizerrijk. Hij was aan de Universiteit van Amsterdam verbonden van 1927 tot 1936, eerst als assistent van Brouwer en later als privaatdocent. Daarna emigreerde hij naar de Verenigde Staten om daar een van de grondleggers van de algebraïsche topologie te worden. Zijn dood was curieus. Bij een uitstapje tijdens het Internationale Symposium over Algebraïsche Topologie in de Mexicaanse stad Uxmal verstapte hij zich en viel van de trappen van een Maya-piramide. Het was bekend dat hij "... een voorbeeld van verstrooidheid was, een eigenschap die waarschijnlijk tot zijn dood heeft geleid". In 1948 publiceerde Hurewicz samen met Henry Wallman (1915–1992) een boek [21] dat de state of the art weergaf van de dimensietheorie. Dat boek wordt nog steeds beschouwd als een onovertroffen meesterwerk. Op pagina 4 staat dat de dimensionsgrad van Brouwer en het nu gangbare dimensiebegrip overeenkomen in de klasse van alle lokaal samenhangende topologische ruimten. Deze bewering is zo flauw dat de auteurs het niet nodig vonden er een bewijs van op te nemen. De mededeling is zeer geruststellend want de meeste wiskundigen werken alleen met ruimten die lokaal samenhangend zijn en daar komen dus geen narigheden voor. Het eerder getoonde voorbeeld van de 'topologist's sine curve' is niet lokaal samenhangend en dit verklaart dus precies waar de problemen zitten.

Witold Hurewicz (1904–1956)

Fedorchuk

De derde hoofdrolspeler is Vi taly Fedorchuk. We moeten wel specificeren welke Vi-

Lomonosov-universiteit

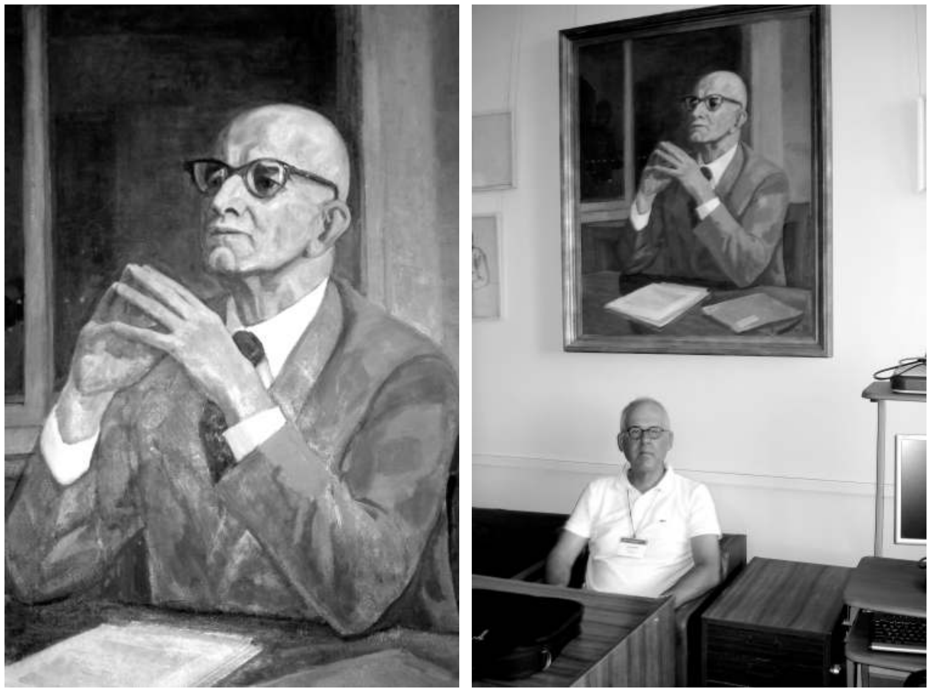
taly Fedorchuk we bedoelen. Vitaly Vasilyevich Fedorchuk was een Oekraïense Sovjetbestuurder. Hij werd geboren in de Oekraïne in een boerenfamilie en hij was van 1982 tot 1986 Sovjet-minister van Binnenlandse Zaken. Om deze Vitaly Fedorchuk gaat het niet, het gaat om zijn zoon Vitaly Vitalievich Fedorchuk, wiskundige, bij leven verbonden aan de eerder genoemde Universiteit van Moskou en geboren in 1942. De Universiteit van Moskou of Lomonosov-universiteit is de grootste universiteit van Rusland en werd gesticht in 1755. Aan de universiteit zijn 4000 wetenschappers verbonden aan 29 faculteiten en 15 onderzoekscentra. Alle eerder genoemde Russische wiskundigen waren of zijn aan deze universiteit verbonden. Fedorchuk was een promovendus van Alexandroff en was onder meer gespecialiseerd in de dimensietheorie van niet-metrizeerbare compacta. Bovendien was hij enige tijd een hoge bestuurder van de Universiteit van Moskou.

In Figuur 4 is Alexandroff te zien op een schilderij dat te bewonderen valt in kamer 1222 van de Lomonosov-universiteit. Een treffende gelijkenis, vindt u niet?

Veel liefs uit Moskou

In het vroege voorjaar van 1999 kreeg ik een mail van Vitaly Fedorchuk, de zoon wel te verstaan. Hij vroeg me naar de eerder genoemde passage uit het boek van Hurewicz en Wallman te kijken en hem een bewijs van deze bewering op te sturen. Na dertig seconden nagedacht te hebben, concludeerde ik dat de voor de hand liggende inductieve aanpak reeds na de eerste stap doodloopt en dat ik dus in het duister tastte. Aldus berichtte ik hem en hij berichtte mij per kerende post dat het hem precies zo was vergaan. We begonnen de bestaande meer recente boeken over dimensietheorie er op na te slaan om te zien of daar informatie te vinden was. Allereerst is daar een beroemd boek van Alexandroff en Pasynkov [1]: op pagina 163 staat dezelfde bewering, eveneens zonder bewijs. En dan is er de bijbel van Engelking [16], daar is op pagina 392 ook deze bewering zonder bewijs te vinden. Zo ook in de boeken van Pears [30] op pagina 148, Fedorchuk [18] op pagina 106, Van Mill [26] op pagina 189 en de tweede bijbel van Engelking [17] op pagina 6. Ook is deze bewering te vinden in talloze artikelen die over de geschiedenis van de dimensietheorie gaan. De auteurs hebben allen het zinnetje van Hurewicz en Wallman [21] klakkeloos overgepend zonder er één echte gedachte aan te wijden.

Vitaly Vasilyevich Fedorchuk (1918–2008) en Vitaly Vitalievich Fedorchuk (1942–2012)

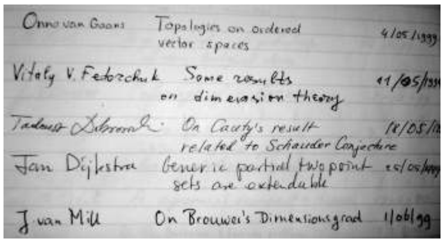


Figuur 4 Pavel (Paul) Sergeevich Alexandroff (1896–1982)

Fedorchuk schreef me dat hij graag naar Amsterdam wilde komen om met mij over de zin in het boek van Hurewicz en Wallman te spreken. Was die uitspraak wel correct? Afgesproken werd dat hij de VU van 1 tot 15 mei 1999 zou bezoeken. In maart 1999 kreeg ik verschillende brieven. Had ik al over het probleem nagedacht, was ik al dichter bij een oplossing? Ik reageerde steevast dat mij de tijd ontbrak, dat ik wel zou gaan nadenken als hij in Amsterdam was. De mailtjes bleven komen.

Enkele weken voor zijn bezoek begon ik serieus over het probleem na te denken. En toen ik hem op 1 mei 1999 van Schiphol ophaalde, was ik in een staat van grote opwinding. Toen we elkaar zagen zei ik zonder hem de hand te schudden: “Vitaly, I can do it!” Hij antwoordde: “Jan, I can do it too!” Hij had eigenlijk gelijk weer rechtsomkeert kunnen maken richting Moskou, waar hij voor was gekomen was door ons beiden in de voorafgaande weken onafhankelijk opgelost. Toen we de oplossingen vergeleken, was de mijne verreweg de beste: zijn oplossing werkte alleen in dimensie 4 en was gestoeld op grof geschut, mijn oplossing was meetkundig en elegant en werkte voor alle dimensies groter dan of gelijk aan 2. Wat hadden we opgelost? Wel, dat de uitspraak in het boek van Hurewicz en Wallman niet deugt, dat er voor elke $n \geq 2$ een n-dimensionale lokaal samenhangende Poolse ruimte bestaat waarvan de dimensionsgrad gelijk is aan 1. Dat wil zeggen, de Menger–Urysohn-dimensie onderscheidt al deze ruimten, terwijl de dimensionsgrad geen informatie verschaft.

We zagen eerder dat het discontinuüm van Cantor een soort van gatenkaas is waar geen enkel lijnstukje in zit. Deze verzameling is nuldimensionaal. Veel ingewikkelder voorbeelden die eenzelfde soort gedrag vertonen en van willekeurig hoge dimensie, werden geconstrueerd door Stephan Mazurkiewicz [24] (1888–1945). Deze gatenkazen werden door mij van een uitwendig raamwerk voorzien, waardoor lokale samenhang ontstond. De vele gaten in de oorspronkelijke ruimten werden ten slotte gebruikt om te bewijzen dat hun dimensionsgrad gelijk is aan 1. De voorbeelden zijn overigens niet bijzonder ingewikkeld en behoren zeker niet tot de resultaten waar ik het meest trots op ben. Mijn resultaten in de oneindig-dimensionale topologie en andere gebieden zijn veel belangrijker en gaan dieper. Maar het verhaal dat bij mijn activiteiten met betrekking tot de dimensionsgrad hoort, is bijzonder en daarom wilde ik het u graag vertellen.



Figuur 5 Seminar topologie 1999

Op 11 mei 1999 sprak Vitaly in het seminar topologie over dimensietheorie. Zie Figuur 5. Ik sprak twee weken later over onze gemeenschappelijke resultaten die we later publiceerden in *Fundamenta Mathematicae* [19].

Het stemt mij tot grote tevredenheid dat ik iets heb kunnen toevoegen aan het wetenschappelijke verhaal van Brouwer. Anderen hebben zich beziggehouden met waar de man over dacht, zijn vele conflicten, zijn genialiteit en wat hem bewoog, zie bijvoorbeeld [9]. Maar ik ben voor dergelijke beschouwingen niet deskundig en heb me bij zijn vakgebied gehouden.

Terug bij de VU

Ik vertelde u eerder dat we in 1980 uit Amerika terugkwamen naar Nederland. Het leven hernam zijn gewone gang, ik werd in 1984 hoogleraar, bouwde een groep op en leidde het leven van een gewone hoogleraar in de wiskunde. Samen met mijn promovendi en collega's verdiepte ik me in de oneindig-dimensionale topologie en gebieden daaraan verwant.

Met Roman Pol uit Warschau werk ik sinds de tachtiger jaren aan de dimensietheorie. Verschillende tegenvoorbeelden werden geconstrueerd door een bepaalde methode te gebruiken om bijzondere hoog-dimensionale deelverzamelingen te construeren in elk compactum van voldoend hoge dimensie. Deze methode gaat terug op de al eerder genoemde Stephan Mazurkiewicz [24] en Bronisław

Eric Karel van Douwen (1946–1987)

Knaster (1893–1980) [22]. In 2010 werd met de methode en eerder verkregen resultaten een deelverzameling X van $\mathbb{R}^4$ geconstrueerd die geschreven kan worden als $A \cup B$, zodat voor elke $m \geq 1$ het volgende waar is [28]:

$$\dim(A \cup B) > \dim[(A \times B)^m] + 1.$$

Dit loste voor $\mathbb{R}^4$ een vermoeden op van Evgenij V. Ščepin [15] uit 1991.

Met Klaas Pieter Hart, Alan Dow en de in 1987 te vroeg overleden Eric van Douwen werkte ik aan Čech–Stone-compactificaties en daaraan gerelateerde begrippen zoals F-ruimten. Mijn beste resultaat met Eric is wellicht een consistent voorbeeld van een compacte nuldimensionale F-ruimte van gewicht $\mathfrak{c}$ dat niet ingebed kan worden in een basisonsamenhangende ruimte [13]. Dit resultaat en werk van Alain Louveau [23] laat zien dat een vraag van de bekende Franse wiskundige Gutave Choquet (1915–2006) onbeslisbaar is binnen de Zermelo–Fraenkel-verzamelingenleer. Eric was een student van Jan Aarts uit Delft, raakte in onmin met hem en week uit naar de VU om te kunnen promoveren bij Maarten Maurice. Ondanks diverse lijmpogingen leek de breuk definitief (gelukkig is de onenigheid vlak voor de dood van Eric bijgelegd). Eric had geen aanstelling aan de VU, maar kwam op gezette tijden met Maarten spreken over zijn proefschrift. Van de vele promovendi die toen op de VU rondliepen, gaf Eric mij bijzondere aandacht. Hij gaf mij manuscripten om te lezen, stelde mij vragen en daagde me uit.

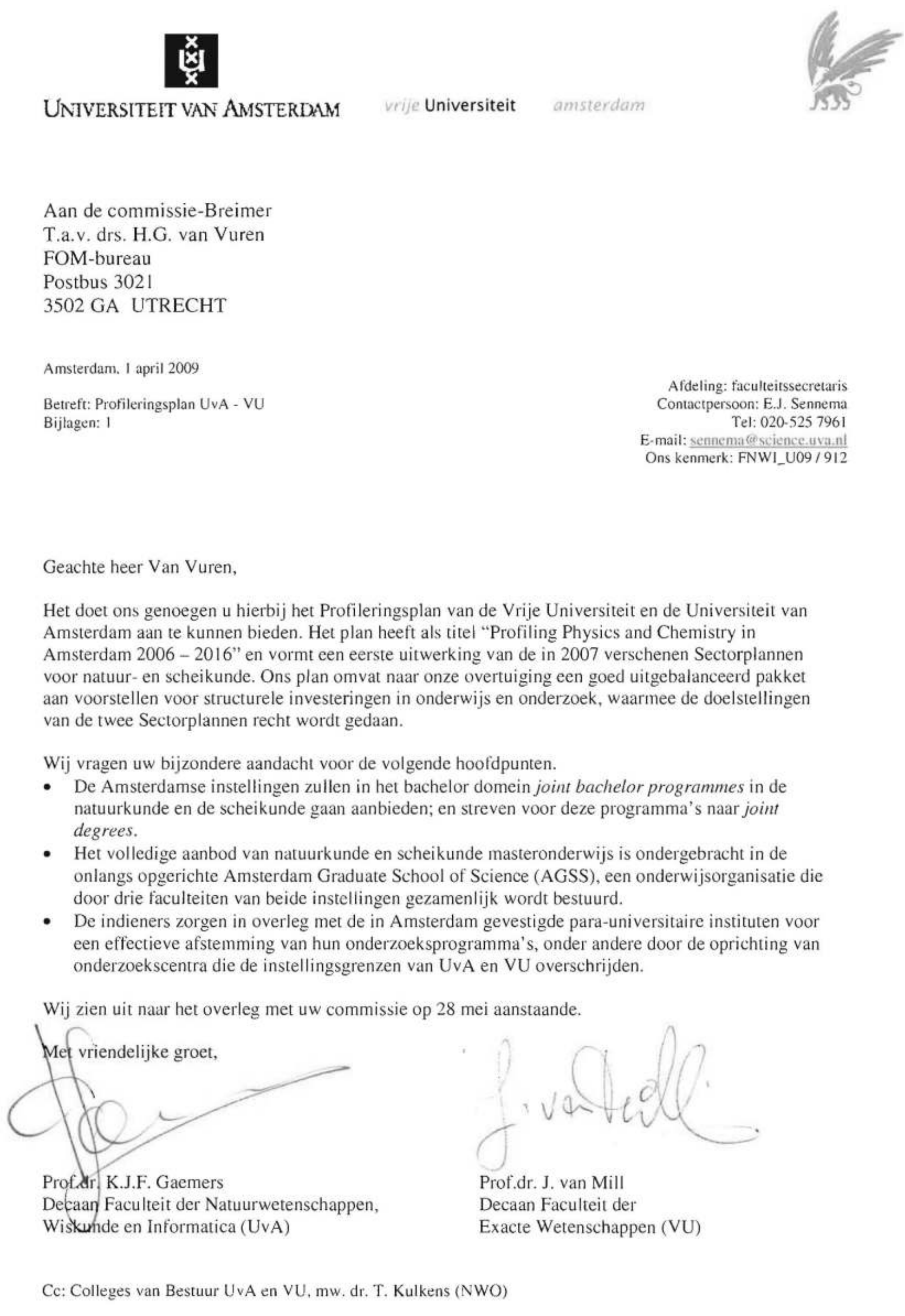
Eric was een verbale gigant die een medemens met enkele gerichte sneren van al zijn of haar eigenwaarde kon ontdoen, maar tegen mij was hij hoffelijk en vriendelijk. Later, toen Eric naar Amerika was vertrokken, begon hij mij te schrijven, stuurde artikelen van anderen op en bleef mij uitdagen. Zijn ster steeg snel en hij zette de standaard voor mij, minder dan Eric kon niet, zijn uitdagingen liet ik niet onbeantwoord. Onze relatie kwam daardoor soms onder druk te staan en de toon van de brieven was bij tijd en wijlen geprikkeld. Toen ik later op de conferenties in Amerika acte de presence gaf, kende iedereen mij, vanwege Eric. Bij de recepties en diners was hij vaak in mijn nabije omgeving te vinden, want hij was slechthorend en door zijn handicap kon hij vaak met niemand communiceren, behalve met mij. Hij overleed geheel onverwacht op 41-jarige leeftijd aan een hartinfarct. Bijna al zijn brieven heb ik bij diverse grote schoonmaken weggegooid. Toen ik na zijn overlijden zijn archief mocht inzien, kwam ik daar een map tegen met daarop het woord 'Jan'. De gehele correspondentie was door Eric bewaard en voorzien van commentaar. Als hommage aan hem, heb ik met hulp van Arjen Sevenster van Elsevier zijn verzameld werk uitgegeven. Hij was mijn leermeester, mijn vriend en tegelijk waren wij in een moordend competitief gevecht gewikkeld. Slechts weinigen weten dat ik uitermate competitief ben, maar Eric had het gezien en gebruikte het om meer uit mij te persen dan ik ooit voor mogelijk had gehouden. Ik heb heel, heel erg veel aan hem te danken.

Met Alan Dow uit Canada werkte ik onder meer aan verafgelegen punten in Čech–Stone-compactificaties. De vraag of elke niet-compacte Lindelöf-ruimte een verafgelegen punt heeft, werd in 1979 opgeworpen door Eric van Douwen [12]. Ik bewees in 1982 dat dat het geval is onder aanname van het axioma van Martin [25]. Maar zonder extra aannamen is de vraag nog steeds onbeantwoord. In 2003 bewezen Alan Dow en ik dat elke niet-compacte Lindelöf-ruimte die nergens van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ is zo'n punt bezit [14], een resultaat dat sindsdien niet verbeterd is.

Met Klaas Pieter Hart werkte ik aan geordende ruimten en topologische groepen en recentelijk zijn we een project gestart over de dimensietheorie van F-ruimten. We bewezen de verrassende stelling dat onder aanname van de Continuümhypothese, de drie klassieke dimensiefuncties op compacte F-ruimten van gewicht $\mathfrak{c}$ dezelfde waarden aannemen [20]. Voor compacte F-ruimten van gewicht $\mathfrak{c}^+$ is dat niet het geval, zoals recentelijk door mij werd aangetoond [27]. Aan de Technische Universiteit Delft is de promovendus Leon Luo op dit project werkzaam.

Met Jan Dijkstra vond ik topologische karakteriseringsstellingen van de zogenaamde Erdős-ruimten [11] en [10]. Dat zijn de deelruimten van de klassieke Hilbert-ruimte ℓ^2 van alle punten met louter rationale, respectievelijk, irrationale coördinaten. Dit vruchtbare project is nog niet ten einde. Het ligt in de bedoeling om het aftelbaar oneindige product van de volledige Erdős-ruimte topologisch te karakteriseren. Dit om greep te krijgen op de homeomorfismengroepen van de klassieke universele Menger-ruimten.

Met Wis Comfort uit de Verenigde Staten werkte ik aan topologische groepen. In 1988 formuleerde hij met zijn collega Robertson het vermoeden dat elke pseudocompacte topologische groep een echte pseudocompacte dichte ondergroep heeft [8]. De oplossing van deze vraag had nogal wat voeten in de aarde. Talloze wiskundigen publiceerden gedeel-


UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM   vrije Universiteit amsterdam

Aan de commissie-Breimer
T.a.v. drs. H.G. van Vuren
FOM-bureau
Postbus 3021
3502 GA UTRECHT

Amsterdam, 1 april 2009

Betreft: Profileringsplan UvA - VU
Bijlagen: 1

Afdeling: faculteitssecretaris
Contactpersoon: E.J. Sennema
Tel: 020-525 7961
E-mail: sennema@science.uva.nl
Ons kenmerk: FNWI_U09 / 912

Geachte heer Van Vuren,

Het doet ons genoegen u hierbij het Profileringsplan van de Vrije Universiteit en de Universiteit van Amsterdam aan te kunnen bieden. Het plan heeft als titel "Profiling Physics and Chemistry in Amsterdam 2006 – 2016" en vormt een eerste uitwerking van de in 2007 verschenen Sectorplannen voor natuur- en scheikunde. Ons plan omvat naar onze overtuiging een goed uitgebalanceerd pakket aan voorstellen voor structurele investeringen in onderwijs en onderzoek, waarmee de doelstellingen van de twee Sectorplannen recht wordt gedaan.

Wij vragen uw bijzondere aandacht voor de volgende hoofdpunten.

- De Amsterdamse instellingen zullen in het bachelor domein *joint bachelor programmes* in de natuurkunde en de scheikunde gaan aanbieden; en streven voor deze programma's naar *joint degrees*.
- Het volledige aanbod van natuurkunde en scheikunde masteronderwijs is ondergebracht in de onlangs opgerichte Amsterdam Graduate School of Science (AGSS), een onderwijsorganisatie die door drie faculteiten van beide instellingen gezamenlijk wordt bestuurd.
- De indieners zorgen in overleg met de in Amsterdam gevestigde para-universitaire instituten voor een effectieve afstemming van hun onderzoeksprogramma's, onder andere door de oprichting van onderzoekscentra die de instellingsgrenzen van UvA en VU overschrijden.

Wij zien uit naar het overleg met uw commissie op 28 mei aanstaande.

Met vriendelijke groet,

Prof.dr. K.J.F. Gaemers
Decaan Faculteit der Natuurwetenschappen,
Wiskunde en Informatica (UvA)

Prof.dr. J. van Mill
Decaan Faculteit der
Exacte Wetenschappen (VU)

Cc: Colleges van Bestuur UvA en VU, mw. dr. T. Kulkens (NWO)

Figuur 6 Sectorplan Natuurwetenschappen VU en UvA

telijke oplossingen en verfijnden bestaande technieken. Het oorspronkelijke artikel van Comfort en Robertson werd vele malen geciteerd. Uiteindelijk werd de oplossing van het probleem gevonden door Comfort en mijzelf door niet te focusseren op transfiniete inductie, maar op een directe methode die het mogelijk maakt om alle G_δ-dichte ondergroepen van een pseudocompacte groep op een geschikte manier te splijten [7].

In totaal werkte ik samen met 82 co-auteurs uit 22 landen, voor een wiskundige respectabele aantallen, waaruit blijkt dat de VU op de wetenschappelijke kaart stond in mijn gedeelte van de wiskunde. Aan twee van mijn co-auteurs — Henk Barendregt en Lex Schrijver — werd in Nederland de Spinozapremie toegekend. Met de meeste co-auteurs knoopte ik ook persoonlijke banden aan; ik heb goede persoonlijke verhoudingen altijd gezien als een essentiële voorwaarde voor succes. Het leukste vond ik het werken met promovendi. Het is zeer bevredigend om jonge mensen zich te zien ontwikkelen tot zelfstandige onderzoekers en uit te zien waaieren over de gehele wereld.

Begin negentiger jaren zette de afdeling de nieuwe opleiding Bedrijfswiskunde- en Informatica op de rails. De trekkers waren Nico Dekker en Gerke Nieuwland en later ook Kobus Oosterhoff. De gehele afdeling werkte van harte mee, zo gaf ik vele jaren het college analyse voor BWI-ers. Ik heb overigens altijd met veel plezier onderwijs gegeven. De nieuwe opleiding was een groot succes en hielp de afdeling door een moeilijke fase heen. Een geheel nieuw type studenten werd door de studie aangetrokken. Er zal wel eens een wiskunde- of informaticastudent over en weer zijn omgezwaaid maar die aantallen bleken marginaal. Van kannibalisering van bestaande studierichtingen bleek geen enkele sprake. Met verbazing merkte ik in latere jaren, dat de houding van de afdeling wiskunde in die tijd eigenlijk bijzonder was. Talloze nieuwe onderwijsinitiatieven heb ik meegemaakt, steevast was er verzet van bestaande opleidingen die kannibalisering van de eigen kroonjuwelen vreesden.

Ik zal het nog één keer uitleggen. Een nieuwe opleiding die goed is gepositioneerd en een duidelijk herkenbaar eigen gezicht heeft, trekt een nieuw type student aan. Dat kroonjuwelen daardoor ter ziele gaan, hoeft niet worden gevreesd. In tegendeel, door vakken van bestaande opleidingen te integreren met die van nieuwe opleidingen, kan efficiëntiewinst worden geboekt die de bestaande opleidingen ten goede komt. Zoals gezegd, binnen de afdeling wiskunde waren de negatieve sentimenten veruit in de minderheid, vrijwel iedereen hielp van harte mee, als docent en als begeleider van afstudeerders. De sfeer in de afdeling werd trouwens door een grote meerderheid als erg goed ervaren. Jong talent werd gekoesterd. In het begin van mijn carrière waakte de al eerder genoemde Maarten Maurice over mij. Hij zorgde dat ik enige tijd afgeschermd bleef van een en ander, waardoor ik mij vrij kon ontwikkelen. Ondertussen kreeg ik van hem de ene wagonlading kritiek na de andere: nog nooit heb ik in mijn leven van iemand zoveel kritiek te verduren gehad als van hem. Soms werd het mij weleens een beetje te veel en bromde ik een beetje tegen hem, maar altijd herstelden de verhoudingen zich en was er die bevrijdende lach. Ik heb Aad van der Vaart zien komen als jonge medewerker en ik heb hem zich zien ontwikkelen tot de topwiskundige die hij geworden is. Dat gaf geen aanleiding tot jaloers gezeur van anderen, men verheugde zich in zijn successen. Ik heb Rien Kaashoek de internationale grootheid Israel Gohberg (1928–2009) zien binnenhalen, waardoor de afdeling in het vakgebied operatorentheorie tot de wereldtop ging behoren. De afdeling zette ook een zeer succesvol programma op voor buitenlandse masterstudenten, voornamelijk uit Oost-Europa. Ik denk met veel plezier terug aan de samenwerking die ik in dat kader had met Geurt Jongbloed. In het algemeen kun je stellen dat de sfeer in de afdeling die van wederzijds respect was, gericht op overleving, met veel aandacht voor onderwijs en met een open oog voor vernieuwingen en nieuwe ontwikkelingen. Betekent dit dat er nooit eens onenigheid was tussen leden van de afdeling wiskunde? Zeker wel, maar die werd binnen eigen kring opgelost zonder al te veel 'gedoe'.

Bestuur

Al snel, ik spreek over begin tachtiger jaren, werd ik meegenomen bij besprekingen tussen de wiskundeafdelingen van VU en UvA over samenwerking. De samenwerking kwam niet erg van de grond, behalve dan de uitwisseling van enkele wetenschappers. Zo was Jaap Korevaar een veel geziene gast op de VU en was ik parttime verbonden aan de UvA. Het verheugt mij om te zien dat vandaag de dag de samenwerking tussen VU en UvA wél van de grond komt en dat de eerste stappen zijn gezet in de periode dat ik decaan was. In Figuur 6 ziet u de brief die Karel Gaemers en ik ondertekenden in het kader van het Sectorplan Natuurwetenschappen.

Ik doorliep alles wat er bestuurlijk te doorlopen valt binnen de afdeling wiskunde: lid en voorzitter van de wetenschapscommissie, voorzitter van de afdeling, trekker van de internationalisering, et cetera.Later werd ik voorzitter van de divisie wiskunde en informatica van de Faculteit der Exacte Wetenschappen, trad toe tot het bestuur, werd vice-decaan en tenslotte decaan. Vanaf 1997 tot en met 2010 heb ik bestuurlijke verantwoordelijkheid gedragen, met uitzondering van het academisch jaar 2005. Ook was ik voorzitter van het bestuur van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en lid van het oprichtingsbestuur van het Platform Wiskunde Nederland. Ik heb bestuurlijke taken altijd met plezier vervuld. Voor goed bestuur zijn andere vaardigheden vereist dan die voor een onderzoeker en de combinatie van beiden was interessant en uitdagend voor mij.

Referenties

1 P.S. Alexandroff en B. Pasynkov, *Vvedenie v teoriyu razmernosti: Vvedenie v teoriyu topologicheskikh prostranstv i obshchuyu teoriyu razmernosti (Russian) [Introduction to dimension theory: An introduction to the theory of topological spaces and the general theory of dimension]*, Izdat. "Nauka", Moscow, 1973.

2 R.D. Anderson, D.W. Curtis en J. van Mill, A fake topological Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 272 (1982), pp. 311-321.

3 A. de Boer, R. Rouw, H.P. Smilde en F. Willemsen, *De onvergetelijke leraar*, Uitgeverij SWP, Amsterdam, 2012.

4 B. Bolzano, *Über Haltung, Richtung, Krümmung und Schnörkelung bei Linien sowohl als Flächen sammt einigen verwandten Begriffen*, in: Spisy Bernarda Bolzana, Vol. 5: Geometrické práce, ed. J. Vojtěch, Praha, 1948.

5 L.E.J. Brouwer, Über den natürlichen Dimensionsbegriff, *J. Reine Angew. Math.* 142 (1913), pp. 146–152.

6 T.A. Chapman, Topological invariance of Whitehead torsion, *American J. Math.* 96 (1974), pp. 488–497.

7 W.W. Comfort en J. van Mill, Extremal pseudocompact Abelian groups are compact metrizable, *Proc. Amer. Math. Soc.* 135 (2007), 4039–4044.

8 W.W. Comfort en L.C. Robertson, Extremal phenomena in certain classes of totally bounded groups, *Diss. Math. (Rozprawy Mat.)* 272 (1988), 1–42.

9 D. van Dalen, *Mystic, geometer and intuitionist. The life of L.E.J. Brouwer (1881–1966)*, Volumes I en II, Claredon Press, Oxford, 1999 en 2005.

10 J.J. Dijkstra en J. van Mill, Characterizing complete Erdős space, *Canad. J. Math.* 61 (2009), 124–140.

11 J.J. Dijkstra en J. van Mill, *Erdős space and homeomorphism groups of manifolds*, Memoirs Amer. Math, Soc. 208 (2010).

12 E.K. van Douwen, Why certain Čech–Stone remainders are not homogeneous, *Coll. Math.* 41 (1979), 45–52.

13 E.K. van Douwen en J. van Mill, Subspaces of basically disconnected spaces or quotients of countably complete Boolean Algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 259 (1980), 121–127.

14 A. Dow en J. van Mill, ω-far points in large spaces, *Top. Appl.* 129 (2003), 79–87.

15 A.N. Dranishnikov, On the dimension of the product of two compacta and the dimension of their intersection in general position in Euclidean space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 352 (2000), 5599–5618.

16 R. Engelking, *General topology*, Second edition, Sigma Series in Pure Mathematics, 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

17 R. Engelking, *Theory of dimensions finite and infinite*, Sigma Series in Pure Mathematics 10, Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.

18 V.V. Fedorchuk, *The Fundamentals of Dimension Theory*, Encyclopedia of Mathematical Sciences 17, Springer, 1990, pp. 91–202.

19 V.V. Fedorchuk en J. van Mill, Dimensionsgrad for locally connected Polish spaces, *Fund. Math.* 163 (2000), 77–82.

20 K.P. Hart en J. van Mill, Covering dimension and finite-to-one maps, *Top. Appl.* 158 (2011), 2512–2519.

21 W. Hurewicz en H. Wallman, *Dimension Theory*. Princeton Mathematical Series, Vol. 4, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1941.

22 B. Knaster, Sur les coupures biconnexes des espaces euclidens de dimension $n > 1$ arbitraire, *Mat. Sbornik* 19 (1946), 9–18.

23 A. Louveau, Charactérisation des sous-espaces compacts de $\beta\mathbb{N}$, *Bull. Sci. Math.* 97 (1973), 259–263.

24 S. Mazurkiewicz, Sur les problème κ et λ de Urysohn, *Fund. Math.* 10 (1927), 311–319.

25 J. van Mill, Weak P-points in Čech–Stone compactifications, *Trans. Amer. Math. Soc.* 273 (1982), 657–678.

26 J. van Mill, *Infinite-dimensional topology. Prerequisites and introduction*, North-Holland Mathematical Library 43, North-Holland, Amsterdam, 1989.

27 J. van Mill, A compact F-space with noncoinciding dimensions, *Top. Appl.* 159 (2012), 1625–1633.

28 J. van Mill en R. Pol, An example concerning the Menger–Urysohn formula, *Proc. Amer. Math. Soc.* 138 (2010), 3749–3752.

29 J. von Neumann en O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, 1944.

30 A.R. Pears, *Dimension theory of general spaces*, Cambridge University Press, Cambridge (UK), New York, Melbourne, 1975.

31 H. Poincaré, Pourquoi l'espace a trois dimensions, *Révue de Métaphysique et de Morale* 20 (1912), pp. 483–504.

32 F. Riesz, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*, Atti del 4 Congresso Internationale dei Matematici, Rome, 1910, vol. 2, pp. 18–24.

33 J.L. Taylor, A counterexample in shape theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* 81 (1975), pp. 629–632.

34 H. Toruńczyk, On CE-images of the Hilbert cube and characterizations of Q-manifolds, *Fund. Math.* 106 (1980), pp. 31-40

35 H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math. 111 (1981), pp. 247-262.

36 J.A. West, Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: a solution to a conjecture of Borsuk, *Ann. of Math.* 106 (1977), pp. 1–18.