

## Johan Deprez

Faculteit Economie en Bedrijfswetenschappen, Hogeschool-Universiteit Brussel

Instituut voor Onderwijs- en Informatiewetenschappen, Universiteit Antwerpen

Specifieke Lerarenopleiding wiskunde, KU Leuven

johan.deprez@ua.ac.be

### Boekbespreking Handboek wiskundededidactiek

# Gemeenschappelijke inspanning zet wiskundededidactiek op de kaart

Het in 1974 verschenen boek *Didactiek van de wiskunde* van Joop van Dormolen kreeg vorig jaar een opvolger in het *Handboek wiskundededidactiek*, geschreven door Nederlandse wiskundededidactici. Desgevraagd werpt een Vlaamse collega een frisse blik op de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs bij de noorderburen. Johan Deprez is hoofddocent wiskunde in het economisch hoger onderwijs aan de Hogeschool-Universiteit Brussel. Daarnaast is hij verbonden aan de universitaire lerarenopleidingen wiskunde van de Universiteit Antwerpen en de KU Leuven als respectievelijk vakdidacticus en praktijkassistent. Hij verricht onderzoek op het vlak van het gebruik van toepassingen in wiskundelessen. Hij volgt sinds midden jaren tachtig het Nederlandse wiskundeonderwijs vanaf de zijlijn.

In juni 2012, bijna veertig jaar na het klassieke boek van Joop van Dormolen, verscheen een boek dat zich als opvolger presenteert: een nieuw *Handboek wiskundededidactiek*. Dit werk is het resultaat van een gemeenschappelijke inspanning van twaalf universitaire wiskundededidactici die lesgeven aan eerstegraadslerarenopleidingen. Dit grote aantal auteurs verklaart wellicht waarom de redactie buiten Nederland ging aankloppen voor een recensie.

Het handboek is een klapper geworden van een kleine 400 bladzijden, met elf hoofdstukken, die geschreven zijn door wisselende auteursteams. Eerst wordt een theoretisch kader geschapen, daarna komen verschillende deelgebieden uit de schoolwiskunde aan bod (algebra, analyse, meetkunde, kansrekening en statistiek), en tot slot passeren een aantal algemene onderwerpen de revue (modelleren, het gebruik van ICT, toetsen en wiskundige denkactiviteiten). Om de lengte van zo'n hoofdstuk binnen de perken te houden, wordt meestal exemplarisch ge-

werkt. Het hoofdstuk over algebra beperkt zich dan bijvoorbeeld tot variabelen en vergelijkingen, en de twee hoofdstukken over analyse behandelen de begrippen functie en afgeleide. Verschillende elementen zorgen voor eenheid over de verschillende auteursteams heen: elk hoofdstuk is opgebouwd uit dezelfde onderdelen (oriëntatie, probleemstelling, probleemverkenning, wat we al weten, ontwerpen en conclusie), de basisideeën uit het inleidende hoofdstuk worden verder geconcretiseerd in de volgende hoofdstukken en er zijn geregelde kruisverwijzingen tussen de hoofdstukken.

Het handboek is een generalistische inleiding in de wiskundededidactiek die in de eerste plaats is bedoeld voor studenten uit de eerstegraadslerarenopleidingen. Een lerarenopleiding is gericht op het uitoefenen van een beroep en moet daarom een sterke praktijkoriëntatie hebben. Als het om een opleiding op masterniveau gaat, dan moet ze bovendien ook duidelijk academisch gericht

zijn. We mogen dan ook verwachten beide oriëntaties aan te treffen in het handboek.

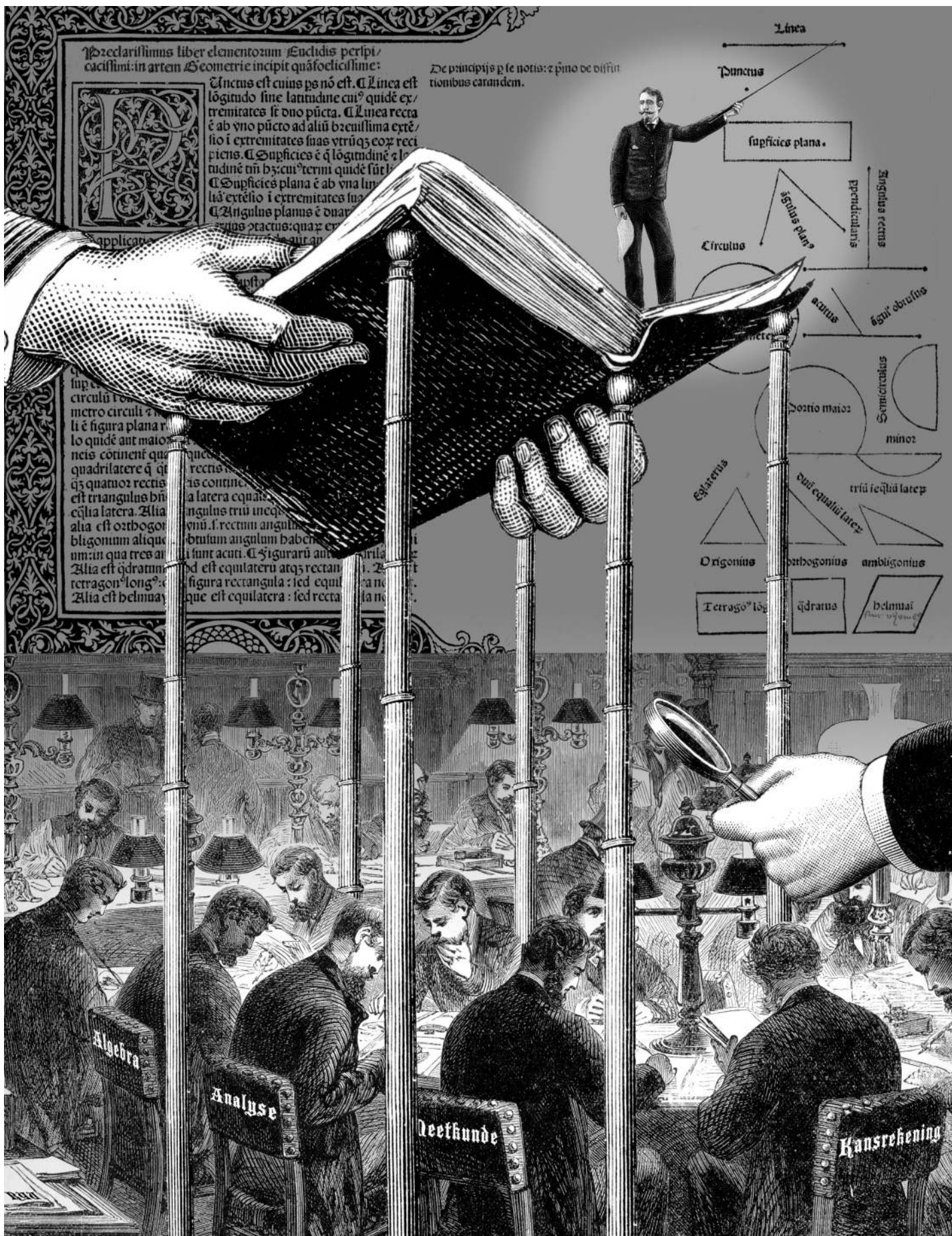
#### Academisch ...

Elk hoofdstuk bevat een flinke brok wetenschappelijk, vakdidactisch onderzoek over het thema van dat hoofdstuk. In het hoofdstuk over variabelen en vergelijkingen bijvoorbeeld, lezen we in de 'oriëntatie' over problemen die in Nederland vastgesteld werden met algebra. In de 'probleemverkenning' maken we kennis met mogelijke oorzaken voor de moeilijkheden. Daarbij wordt gebruik gemaakt van twee klassieke voorbeelden uit de internationale vakdidactische literatuur uit de jaren tachtig (van Wagner, Rachlin en Jensen, en Wenger). Bij de opgave

$$\text{Hoe groot is } \frac{2z+1}{2} \text{ als } 5(2z+1) = 10?$$

hebben leerlingen het moeilijk om de algebraïsche expressie  $2z+1$  als een zelfstandig object te zien, omdat ze vanuit het rekenen met getallen gewoon zijn om expressies als een recept voor een uit te voeren proces (een berekening) te interpreteren. In de opgave

$$\text{Los } v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u} \text{ op naar } v.$$



Illustratie: Roy Bijl

eist de wortel onterecht de aandacht van de leerlingen op. De paragraaf ‘Wat we al weten’ geeft vervolgens een meer systematische behandeling van resultaten van vakdidactisch onderzoek. Er wordt dan bijvoorbeeld dieper ingegaan op de hierboven reeds aangehaalde dualiteit proces-object en op de invloed van visuele kenmerken van expressies. Verder gaat het bijvoorbeeld over de diverse rollen van variabelen (plaatshouder, veranderlijke, generalisator, onbekende en parameter). We noemen hier ook nog de literatuur die aantoonst dat er meer nodig is dan het foutloos kunnen uitvoeren van basisprocedures om algebraïsch vaardig te zijn. Je moet ook strategisch kunnen denken, globaal kunnen kijken naar expressies, ..., wat in de vakliteratuur benoemd wordt als *symbol sense*.

Het vakdidactisch onderzoek legt de nadruk op het gelijktijdig werken aan inzicht en basisvaardigheid. Het concretiseert het belangrijkste overkoepelende concept uit het inleidende hoofdstuk (dat teruggaat op de wiskundendidacticus Skemp en dat ook een belangrijke rol speelt in van Dormolens boek):

“Zoals eerder beschreven is de kennis in het langetermijngeheugen alleen toegankelijk als die geordend is in samenhangende *cognitieve schema's*. Dit zijn mentale structuren, die we ons kunnen voorstellen als netwerken van knooppunten (feiten, concepten, procedures, beelden) die onderling verbonden zijn door relaties ertussen (... hangt samen met ..., ... geeft een beeld van ..., ... is een alternatieve aanpak voor ..., enzovoort). Deze relaties maken een goede bereikbaarheid van de kennis mogelijk. We streven naar de ontwikkeling van rijke, betekenisvolle en zo compleet mogelijke cognitieve schema's, die het de leerling mogelijk maken om op een flexibele, wendbare manier problemen aan te pakken.” (p. 26)

De vakdidactische literatuur die in de verschillende hoofdstukken besproken wordt, geeft aan het einde van het boek aanleiding tot een erg rijke bibliografie, die een startpunt kan vormen voor verdere verdieping door de studenten.

Opmerkelijk is dat het besproken onderzoek niet alleen uit het buitenland afkomstig is. Er is in de afgelopen decennia immers ook heel wat waardevol wiskundendidactisch onderzoek op Nederlandse bodem verricht, door de auteurs van het handboek en door anderen. Ik kan het niet laten om daar vanuit Vlaanderen toch wat afgunstig naar te kijken. Vaak is dat Nederlandse onderzoek sterk gerelateerd aan de praktijk van het wiskundeonderwijs en is het geïnspireerd door actuele

discussies over het wiskundeonderwijs in Nederland. Geregeld wordt op basis van onderzoek ook een standpunt ingenomen in deze discussies. Zo was er bijvoorbeeld op een zeker ogenblik een roep om bij het gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs meer in te zetten op ‘use to learn’ dan op ‘learn to use’. Op basis van wetenschappelijk onderzoek wordt in het boek beargumenteerd dat beide lang niet altijd van elkaar te scheiden zijn.

### ... én praktijkgericht

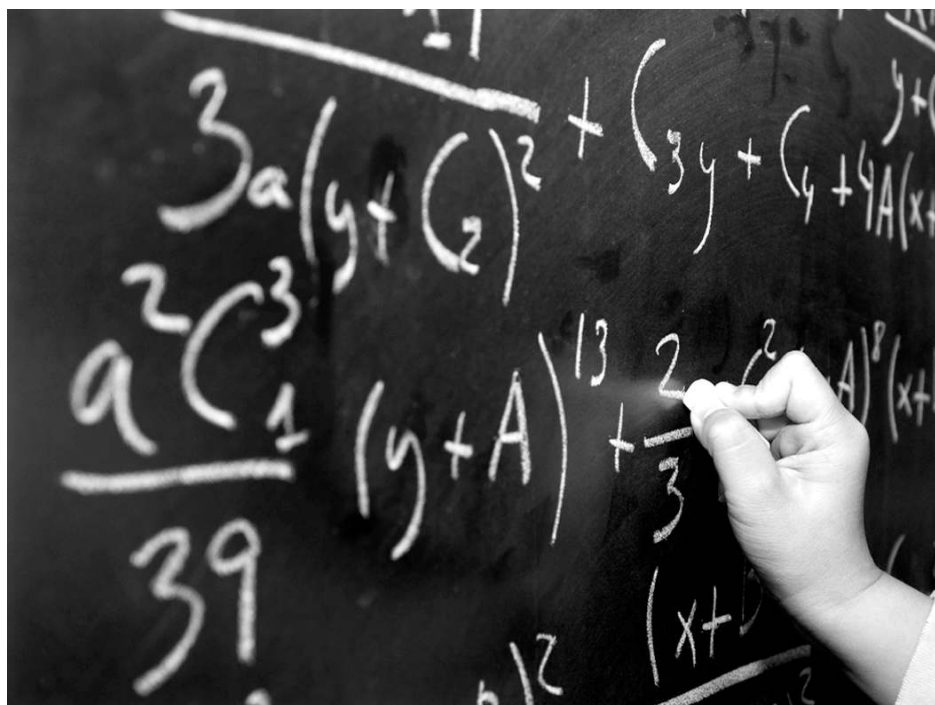
In het onderdeel ‘ontwerpen’, dat in elk hoofdstuk aan bod komt, komt de praktijkoriëntatie van het handboek het sterkst tot uiting. Daarin wordt de wijsheid uit de voorgaande onderdelen exemplarisch gebruikt voor het ontwerpen van wiskundelessen. Ook andere elementen spelen in op de onderwijspraktijk: de oriëntatie start vaak vanuit een actuele discussie in het Nederlandse wiskundeonderwijs, lezers krijgen praktijkgerichte opdrachten, ... We illustreren dit weer aan de hand van het hoofdstuk over variabelen en vergelijkingen. In het ontwerponderdeel wordt bijvoorbeeld besproken hoe je samen met de leerlingen een overzicht kunt opbouwen van verschillende types vergelijkingen en bijbehorende oplossingsmethoden. Voor kwadratische vergelijkingen kom je dan, naast de standaardvergelijkingen die je met de *abc*-formule oplost, uit op types als  $A \cdot B = 0$ ,  $A^2 = a$ ,  $A^2 = B^2$ , ... Dit stimuleert *symbol sense* en een objectgerichte kijk op vergelijkingen bij de leerlingen. Daarnaast

komen veel andere zaken aan bod, zoals manieren om aandacht te geven aan de verschillende rollen van variabelen.

Drie voorbeelden van opdrachten die in het algebrahoofdstuk gegeven worden, zijn:

- “Verzamel enkele algebraïsche fouten uit de eigen onderwijspraktijk en probeer deze in verband te brengen met de hierboven beschreven misvattingen.” (p. 57)
- “Zoek in schoolboeken bij elk van deze vijf facetten van het variabelenbegrip voorbeelden van opgaven.” (p. 63)
- “Ontwerp werkbladen bij applets waarmee bepaalde facetten die in het [hoofdstuk] genoemd zijn worden geoefend. Neem bijvoorbeeld AlgebraPijlen en/of AlgebraExpressies op [wisweb.nl](http://wisweb.nl).” (bijlage, p. 3)

Globaal genomen vind ik de praktijkgerichte invalshoek in het handboek iets minder sterk dan de academische. In een paar hoofdstukken blijft dit onderdeel wat beperkt. Enkele ontwerpsuggesties lijken speciaal bedacht voor het boek, zonder gebaseerd te zijn op ervaring uit de praktijk. Het blijft soms ook wat teveel op het beschrijvende vlak zonder helemaal concreet te worden. Op andere plaatsen voel je dan weer de spanning tussen de beperking van de beschikbare ruimte en de drang om heel veel voorbeeldmateriaal aan te bieden: soms wordt een voorbeeld wel opgenomen maar zo kort behandeld dat je er als lezer niet veel aan hebt (bijvoorbeeld het Primasproject op pagina 364). Dat is niet helemaal verwonderlijk. Goede praktijkvoorbeelden in detail laten zien, vergt al gauw heel





Het boek bevat inspirerende voorbeelden maar geen gesneden brood.

wat bladzijden en zoveel ruimte is er niet. Zoals van Dormolen in het voorwoord suggereert, zou het een goed idee zijn om een apart ideeënboek te maken. Wellicht kan dat het best in digitale vorm en kan de website, die nu nog erg bescheiden ingevuld is, op termijn zorgen voor een verdere versterking van de praktijkgerichte invalshoek. Op de website zou bijvoorbeeld ook een geannoteerd overzicht kunnen komen van internetbronnen uit binnen- en buitenland waar materiaal te vinden is dat aansluit bij de principes uit het boek.

Maar ik wil dit punt van kritiek zeker niet overdrijven. Er is echt wel een ernstige inspanning gedaan om de theorie te vertalen naar de praktijk en er vallen in dat verband best heel wat interessante zaken te lezen.

**De centrale rol van de leraar in het onderwijs**  
Een belangrijk uitgangspunt van het handboek is dat:

“een professionele wiskundeleraar ‘baas boven boek’ is en in haar of zijn eigen lespraktijk het eigen onderwijs systematisch en op niveau moet kunnen ontwerpen, uitvoeren en evalueren.” (p. 5)

Dat uitgangspunt onderschrijf ik ten volle. Van leraren die op masterniveau opgeleid zijn, mag je dit verwachten. Of nog anders gesteld: het onderwijs is veel te belangrijk om het over te laten aan leraren die louter uitvoerders zijn van onderwijs dat door anderen ontworpen is.

De auteurs geven aan dat dit in de Nederlandse onderwijscontext geen evidentie is, bijvoorbeeld omwille van het centrale eind-

examen en de traditioneel grote afhankelijkheid van het schoolboek. In Vlaanderen lijkt de eigen verantwoordelijkheid van de leraar inderdaad groter: wij hebben enkel schoolexamens en geen centraal eindexamen (maar wel leerplannen die leerinhoud en doelstellingen vastleggen), schoolboeken bieden minder ondersteunend materiaal en er is inderdaad een zekere traditie om zelf lesmateriaal te ontwikkelen voor een deel van de lessen.

Deze nadruk op de professionaliteit van de leraar verklaart een aantal keuzes die in het handboek gemaakt zijn: de bespreking van relevant wetenschappelijk onderzoek dat richting geeft maar niet alle vragen oplost, de volgehouden aandacht voor het ontwerpen van onderwijs gebaseerd op fundamentele ideeën die door dat onderzoek ondersteund worden, inspirerende voorbeelden maar geen gesneden brood, de kritische houding ten aanzien van de traditionele schoolboeken en een aantal praktijken in het huidige Nederlandse wiskundeonderwijs, ...

De centrale rol van de leraar ligt niet enkel in het vermogen om kwalitatief lesmateriaal te maken. Ook daar wordt in het handboek nadrukkelijk op gewezen. Het optreden tijdens de les zelf is van cruciaal belang: het is essentieel voor leerlingen dat ze tijdens de les in interactie kunnen gaan met een leraar die hen op een gepaste manier kan uitdagen en ondersteunen bij het actief aan wiskunde doen.

Zelf vind ik dat het handboek op dit punt in zijn opzet slaagt. Het geeft richting en inspireert, maar wijst de lezer ook op zijn of haar verantwoordelijkheid.

### Dit is wiskundendidactiek!

Ik weet niet hoe het in Nederland zit, maar in Vlaanderen wordt de vakdidactiek toch nog altijd wat miskend. Bij professoren van de opleiding wiskunde hoor je nog te vaak de stelling verkondigen dat wiskundeleraars eerst en vooral goed opgeleide wiskundigen moeten zijn en dat de rest dan wel vanzelf volgt. Ze kunnen zich maar moeilijk voorstellen welke niet-wiskundige kennis en vaardigheden en attitudes een wiskundeleraar nodig zou hebben. Anderzijds vinden veel pedagogen dat een leraar naast een zekere vakinhoudelijke basis vooral nood heeft aan een algemeen onderwijskundige opleiding. Van vakdidactisch onderzoek hebben ze geen hoge pet op. Daarom kun je bij ons jammer genoeg wiskundeleraar worden in de hoogste jaren van het secundair onderwijs zonder dat je ook maar één letter wiskundendidactiek in je lerarenopleiding gehad hebt (gelukkig zijn er daarnaast ook lerarenopleidingen waarin de vakdidactiek wel degelijk een grote rol speelt).

Het *Handboek wiskundendidactiek* zet het specifieke terrein van de wiskundendidactiek duidelijk op de kaart en maakt dit domein zichtbaar voor andere actoren in het onderwijs. Het is geschreven door specialisten op het terrein, geen wiskundigen en geen pedagogen, maar mensen die zich op het kruispunt van die twee disciplines bevinden. Het toont wiskundendidactiek als een volwaardige academische discipline, bovendien in de goede zin van het woord: met de nodige afstand maar tegelijk nauw betrokken op het wiskundeonderwijs zelf.

De auteurs tonen een grondige kennis van de wiskunde zelf, maar dat is nooit meer dan een vertrekpunt voor een wiskundendidactisch discours. De auteurs verwachten die grondige kennis van de leerinhouden uit het voortgezet onderwijs ook van hun lezers, wat natuurlijk aansluit bij de realiteit van de eerstegraadslerarenopleidingen. Een enkele keer wordt ingegaan op wiskundige aspecten die de lezer misschien wel niet vooraf geleerd heeft, zoals de ontwikkeling van de meetkunde door de geschiedenis heen.

Het handboek is heel wat anders, en veel ambitieuzer, dan een vakvertaling bij een cursus algemene didactiek, waarin je illustraties vindt voor het vak wiskunde van algemeen didactische inhouden. In dit handboek wordt uitgegaan van kwesties die vaak heel specifiek zijn voor het wiskundeonderwijs. Misschien gaat het zelfs een tikkeltje teveel die kant op. Ik kan me voorstellen dat hier en daar nog wat winst te halen is door het handboek nog eens naast een cursus algemene didac-

tiek te leggen. Zo zou er misschien nog wat aangevuld kunnen worden met betrekking tot het gebruik van andere werkvormen.

### Nederland en de wereld

Het handboek verwijst vaak naar de organisatie van het Nederlandse wiskundeonderwijs, zowel de actuele als die uit het verleden. Dat draagt bij aan de praktijkgerichtheid van het boek. Het heeft evenwel ook een schaduwzijde. De auteurs kennen het Nederlandse wiskundeonderwijs en zijn evolutie natuurlijk als hun broekzak omdat ze het allemaal meegeemaakt hebben, maar dat geldt wellicht niet voor hun studenten. Ik kan me voorstellen dat een schematisch overzichtje (op de website?) van de belangrijkste evoluties in de structuur van het Nederlandse wiskundeonderwijs erg behulpzaam zou zijn.

Er is in het boek zeker voldoende aandacht voor onderzoek van buiten Nederland. Ook bij de praktijkvoorbeelden vind je geregeld buitenlands werk. Wel vond ik het wat verwonderlijk dat er weinig plaats ingeruimd werd voor een bezinning op het Nederlandse wiskundeonderwijs vanuit internationaal perspectief: wat is anders in Nederland? Wat zijn sterke en minder sterke punten? Welke prestaties leggen Nederlandse leerlingen voor in internationaal vergelijkend onderzoek als PISA en TIMSS-Advanced? ...

Het boek heeft wél aandacht voor het historische perspectief op het Nederlandse wiskundeonderwijs. Terecht, want dat is best interessant, bijvoorbeeld omdat een aantal interessante debatten publiek gevoerd zijn, te beginnen met dat tussen Afanassjewa en Dijksterhuis in de jaren twintig. Er zijn ook een aantal markante figuren die een duidelijke stempel op het Nederlandse (en internationale) wiskundeonderwijs gedrukt hebben, zoals Freudenthal. Veel informatie daarover vind je verspreid over verschillende hoofdstukken. Het maken van een overzicht hierover zou een mooie oefening voor studenten kunnen zijn.

### Modelleren en wiskundige denkactiviteiten

Het is goed dat er een apart hoofdstuk gewijd is aan modelleren, het gebruiken van wiskunde om problemen van buiten de wiskunde op te lossen. Dit is een belangrijk facet van het huidige wiskundeonderwijs. In overeenstemming met het belang dat hieraan gehecht wordt door cTWO, de commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, is er ook een apart hoofdstuk over wiskundige denkactiviteiten, dat zich dan meer richt op de denkprocessen binnen de wiskunde zelf, waaronder probleemoplossend denken en bewijzen.

Probleemoplossend denken komt in nog heel wat andere hoofdstukken aan bod: in het inleidende hoofdstuk, bij meetkunde en ook nog eventjes bij modelleren. Daardoor komt dit belangrijke onderwerp wat fragmentarisch aan bod. Ik vraag me af of een apart hoofdstuk over probleemoplossend denken en wiskundige onderzoeksvaardigheden niet een betere optie zou zijn. Het zou het lange inleidende hoofdstuk overigens ook wat kunnen ontlasten.

Ik mis een diepgaandere bezinning over de rol van bewijzen in het wiskundeonderwijs. Er is op dat punt immers een sterke spanning tussen de wiskunde als wetenschap, waar het juist essentieel is om alles te bewijzen, en wiskunde in het voortgezet onderwijs, waar we uit ervaring geleerd hebben (zeker in België, waar we de moderne wiskunde in een erg radicale vorm geïmplementeerd hebben) dat het beter is om niet zo ver te gaan. Studenten uit de lerarenopleiding moeten leren omgaan met dit spanningsveld.

### Welke leerling?

Meestal gaat het in het handboek over 'de' leerling, zonder dat daar veel reliëf in aangebracht wordt. Zelf denk ik dat wiskundeonderwijs een soms erg verschillende vorm kan en moet aannemen, naargelang de leerling. Dat blijft in het handboek toch wat onderbelicht en dat is een beetje vreemd omdat er in het Nederlandse wiskundeonderwijs door de veelheid aan eindexamenprogramma's structureel juist veel aandacht is voor die verschillen.

In dezelfde zin zocht ik tevergeefs naar een stukje over leerstoornissen die bij wiskunde een rol spelen en naar een stukje over hoogbegaafdheid en wiskunde.

### Het ene hoofdstuk is het andere niet

Globaal genomen slagen de verschillende auteursteams erin om te zorgen voor een voldoende grote eenheid in het boek. Het is echter onvermijdelijk dat een lezer zich meer gecharmeerd voelt door het ene hoofdstuk dan door het andere. Zelf vond ik het hoofdstuk over ICT in het wiskundeonderwijs erg sterk. Het is goed en helder geschreven, het is inhoudelijk erg coherent en geeft goede tips voor de praktijk. Het hoofdstuk over modelleren sprak me ook erg aan, al is het voorbeeldmateriaal hier toch beperkter. Ik voelde me wat minder aangetrokken tot het hoofdstuk over statistiek, waarin ik een aantal zaken toch wat mis. Zo zie ik zelf een veel belangrijker rol weggelegd voor de idee van steekproefvariabiliteit, die in het boek nu wel aan

bod komt maar niet de nodige klemtoon krijgt. Ook op het vlak van de beschrijvende statistiek mis ik een aantal essentiële zaken: kritisch kijken naar grafieken, systematisch beschrijven van een frequentieverdeling aan de hand van een aantal kenmerken, ...

### Tot slot

U heeft al wel begrepen dat ik globaal genomen grote waardering heb voor dit nieuwe handboek van de wiskundendidactiek. Die waardering geldt zowel voor het resultaat als voor de volgehouden samenwerking van een grote ploeg die tot dit resultaat geleid heeft. Ik ben zelf actief als wiskundendidacticus in een lerarenopleiding in Vlaanderen die erg vergelijkbaar is met de Nederlandse éénjarige universitaire eerste graadslerarenopleiding. Deze recensie was voor mij de aanleiding om het boek, dat ik al wel kende, grondig door te nemen. Ik heb alvast de beslissing genomen om het vanaf volgend jaar intensief te gebruiken in mijn cursus wiskundendidactiek. Dat zal de kwaliteit van mijn onderwijs zeker ten goede komen. Maar natuurlijk blijf ik baas boven boek: ik sta nu voor de uitdaging om boeiende lessen te ontwerpen die aansluiten bij dit materiaal. En hier en daar zal ik afwijken van het materiaal dat in het boek aangeboden wordt, dat spreekt!



Paul Drijvers, Anne van Streun en Bert Zwaneveld (red.), *Handboek wiskundendidactiek*, Epsilon Uitgaven, A'dam, 2013 (2<sup>e</sup> druk), 400 p., ISBN 9789050411301, prijs € 34,00.