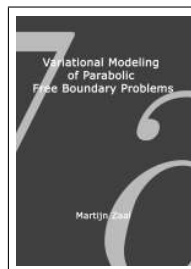


In de verdediging

| In defence



Variational Modeling of Parabolic Free Boundary Problems

Martijn Zaal

Het afgelopen jaar was Martijn Zaal het agenda- en nieuwsredactielid van het *Nieuw Archief voor Wiskunde*. Dit was een naar eigen zeggen plezierige en leerzame taak die hij naast zijn promotieonderzoek op zich had genomen. Inmiddels is hij op 24 april 2013 gepromoveerd bij Joost Hulshof aan de Vrije Universiteit Amsterdam en is hij sinds begin mei als postdoc werkzaam bij het Institut für Angewandte Mathematik van de Universiteit van Bonn.

Het opzwellen van een cel door osmose

In zijn proefschrift *Variational Modeling of Parabolic Free Boundary Problems* onderzocht Zaal aan de hand van een eenvoudig model het opzwellen van een cel door osmose. Binnen in de cel zit zout in water opgelost; het zout in deze oplossing wordt voorgesteld als een massa $u(x, t)$ die zich binnen de cel gedraagt volgens de diffusievergelijking:

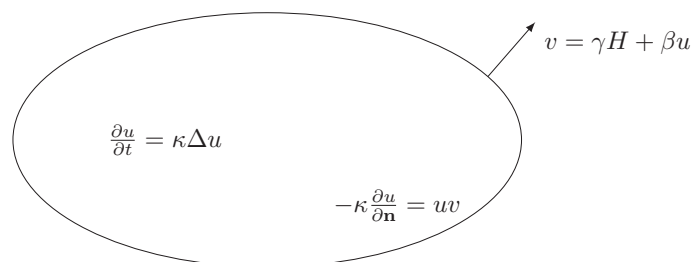
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u, \text{ voor } x \in \Omega(t), t > 0.$$

Hierbij is $\kappa > 0$ een parameter. De rand $\partial\Omega$ van het domein ofwel de cel Ω stelt het celmembraan voor, dat wel water doorlaat, maar geen zout. Door de oppervlaktespanning van het celmembraan en het verschil in zoutconcentratie tussen de binnen- en de buitenkant zal de cel water gaan absorberen, waardoor de vorm van de cel verandert. Wiskundig gezien verandert het domein Ω voor de (parabolische) partiële differentiaalvergelijking dus als functie van de tijd t , wat het probleem tot een zogenaamd vrije-randprobleem maakt.

Op de rand geldt een randvoorwaarde die oplegt dat de normale componenten (loodrecht op $\partial\Omega$) van de snelheid waarmee de rand $\partial\Omega$ zélf en de massa u aan die rand bewegen gelijk zijn:

$$-\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = uv$$

met v de snelheid van het celmembraan in de normale richting. Dit is equivalent met de standaard *no flux* Neumann-randvoorwaarde: het



Een schematische voorstelling van de cel

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.
Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd?
Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland

verdediging@nieuwarchief.nl

zout kan het membraan niet passeren en beweegt daardoor dus mee met de rand.

In het model beweegt het membraan door een combinatie van oppervlaktetension (die lineair afhangt van de gemiddelde kromming H van het membraan: $H = -\frac{n-1}{r}$ voor een sfeer met straal r in \mathbb{R}^n) en een concentratieverschil (onder de aanname dat er geen zout buiten de cel is, is dit verschil de waarde van u op de rand). Die combinatie resulteert in de modelvergelijking $v = \gamma H + \beta u$ op $\partial\Omega$, met parameters $\beta, \gamma > 0$.

Gradient flow

Het blijkt dat dit probleem een gradient flow-achtige structuur heeft. Een *gradient flow* is een vergelijking die probeert een bepaalde vrije energie zo snel mogelijk klein te maken, denk aan een wandelaar in een berglandschap die steeds het steilste pad naar beneden volgt om zijn hoogte zo snel mogelijk te laten afnemen. Voor Zaal's osmoseprobleem bestaat ook zo'n vrije energie: de (negatieve) Boltzmann-entropie plus de oppervlakte van het membraan. Het voordeel van een gradient flow-structuur is dat er vaak bepaalde constructies, de variationele methoden uit de titel van het proefschrift, gebruikt kunnen worden om oplossingen te vinden. Om dit te doen is er behalve een vrije energie ook een afstandsstructuur ofwel een metriek nodig, in het geval van de bergbeklimmer horizontale afstanden tussen punten in het berglandschap. In het geval van osmose blijkt dit net fout te gaan. Verrassend is dat de constructie ondanks dat toch blijkt te werken.

Fysische intuïtie met een positief en een 'negatief' resultaat

Het belangrijkste resultaat uit zijn proefschrift is volgens Zaal de laatste stelling uit hoofdstuk 5, die zegt dat de constructie een oplossing oplevert. Deze stelling is het resultaat waar hij bijna vanaf het begin van zijn onderzoek naar op zoek is geweest. Zaal kreeg opeens een ingeving over een technische truc die hij kon toepassen, waardoor het probleem vrijwel volledig ontkoppelde tot twee problemen die los van elkaar veel eenvoudiger zijn. Een geweldig moment, aldus Zaal. Het mooie aan deze ingeving vindt hij dat het op het eerste gezicht om een nogal vergezochte truc gaat, maar dat er, als je er iets beter naar kijkt, intuïtie achter zit die één-op-één is terug te voeren op de natuurkunde waarop het probleem is gebaseerd.

De voor de hand liggende metriek voor zijn osmose-probleem bleek niet te voldoen aan de vereiste axioma's. Om beter te begrijpen waarom dit het geval was en waarom de constructie dan toch werkte, heeft Zaal ook gekeken naar de *mean curvature flow*, de vergelijking voor oppervlakken die bewegen onder oppervlaktetension. Met behulp van zogenaamde lengte-structuren heeft hij bewezen dat een afstandsbegrip met de juiste eigenschappen voor de mean curvature flow niet kán bestaan.

Ook hierbij was fysische intuïtie de sleutel. Nadat hij enkele maanden tevergeefs had geprobeerd een bepaalde schatting rond te krijgen, begreep Zaal plotseling waarom dit niet lukte, en dat de natuurkunde achter het probleem eigenlijk heel eenvoudig laat zien dat de schatting niet waar kán zijn. Hij moest dus iets veranderen aan de methode om een oplossing voor het probleem te construeren. Hoewel dit uiteindelijk dus gelukt is, beschrijft Zaal de periode waarin hij met dit probleem bezig was wel als een moeilijke tijd.

Samenwerken

Al vrij snel ging zijn onderzoek een andere kant op dan verwacht, waardoor Zaal veel theorie zelf heeft moeten ontdekken en ook veel met onderzoekers van buiten de VU heeft gewerkt. Zijn promotor Joost Hulshof speelde hierbij een belangrijke rol: Hulshof bracht Zaal steeds met mensen in contact en samen bespraken ze geregeld de nieuwe theorie waarmee Zaal bezig was. Deze discussies en de vragen die Hulshof stelde waren uiteindelijk cruciaal voor het bewijzen van de stellingen in het proefschrift.

Zaal vond het erg interessant en leuk om samen te werken met zo veel verschillende mensen. Daarnaast beleefde hij ook veel plezier aan het reizen voor workshops, summerschools en congressen en aan de Nederlandse en Junior Wiskunde Olympiades waaraan hij meewerkte, met de IMO 2011 als hoogtepunt.

De onderwijstaken die hij naast zijn onderzoek had kostten soms veel tijd maar gaven altijd veel voldoening. Het kan lastig zijn om wiskunde uit te leggen, zeker als de studenten de wiskundevakken in eerste instantie erg moeilijk vinden. Zaal kan er echt van genieten als het dan toch lukt om de stof goed over te brengen. Het zal de lezer dan ook niet verbazen dat hij hoopt op een verdere loopbaan in de (Nederlandse) wiskundewereld. ←

