Wim Groen
Kortenhoef
we-groen@casema.nl

Ed de Moor
Amsterdam
e.w.a.demoor@planet.nl

Geschiedenis

Meetkundeonderwijs tussen 1990 en 2007

Dit artikel is het laatste deel van een vierluik over de geschiedenis van het meetkundeonderwijs. Het eerste deel beschrijft het meetkundeonderwijs van vóór de invoering van de Mammoetwet (juninummer 2012). Het tweede deel gaat over kijkmeetkunde (decembernummer 2012). Het derde deel laat zien welke gevolgen de moderniseringsplannen uit de jaren zestig hadden voor het onderwijs in de jaren 1970 tot 1990 (maartnummer 2013). Het laatste decennium van de twintigste eeuw bracht ons in het onderwijs de basisvorming en de tweefasenstructuur. In het nu voorliggende vierde deel van de serie beschrijven Wim Groen en Ed de Moor hoe het met het meetkundeonderwijs ging in die turbulente tijden en daarna.

Nadat in het vwo de examenprogramma's voor wiskunde in 1985 waren aangepast, ging men aan de slag met de wiskundeprogramma's van het havo. De invoering van de nieuwe havoprogramma's vond plaats in 1990. Ook daar kwamen de vakken wiskunde A en wiskunde B; ook daar werd vectormeetkunde uit wiskunde B verwijderd ten gunste van een meer synthetische opzet van de (ruimte)meetkunde en ook daar werkte het streven door naar meer toepassingsgerichte wiskunde. Vooral voor de meetkunde waren dit grote veranderingen, omdat de algoritmisch getinte vectormeetkunde verdween en de meetkunde zich weer meer ging richten op de ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht. Een handicap bleef wel het ontbreken van een geordend netwerk van stellingen in de onderbouw.

HAWEX (aanpassingen in het havo, 1990)

Het streven naar meer toepassingsgerichte wiskunde kwam ook tot uiting in de formulering van de programma's. Een novum was dat zowel bij wiskunde A als bij wiskunde B de doelen van het wiskundeonderwijs expliciet gekoppeld werden aan zaken buiten de wiskunde. Zo lezen we: "Het programma wiskunde A heeft een algemeen vormend karakter en is gericht op het gebruik van wiskunde in de maatschappij. Het doel van wiskunde A is dat kandidaten *aan de werkelijkheid ontleende* problemen kunnen doorgronden en kunnen oplossen met behulp van wiskundige hulpmiddelen. Het programma wiskunde B is voornamelijk gericht op het gebruik van wiskunde in de exacte vakken" [1]

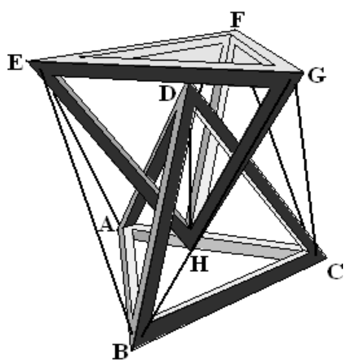
Voor 1990 bestonden examenprogramma's uit opsommingen van leerstofonderdelen. Hoe ver en hoe diepgaand die onderdelen moesten worden gedaan, kon je lezen in aparte toelichtende brochures of in de tijdschriften van de verenigingen van de vakdocenten. Ook de doelen van het wiskundeonderwijs werden toen apart in toelichtende bro-

In 1991 kreeg in het kader van de Nederlandse meubelprijzen het bijzettafeltje Cable-Table van Willem Scholtens een eervolle vermelding.

Het bijzettafeltje bestaat uit twee even grote regelmatige piramiden waarvan alle ribben even lang zijn. De piramiden $ABCD$ en $EFGH$ worden door zeven stalen kabels van 1 mm dikte bij elkaar gehouden. De piramide $EFGH$ hangt met de top H naar beneden aan een kabel die verbonden is met de top D van de piramide $ABCD$.

Deze verticale kabel DH is op de foto van figuur 3 net te zien.

De bovenkant van het tafeltje is van glas.



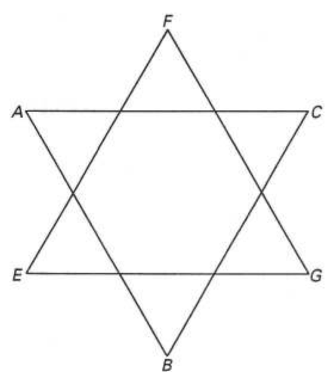
- Geef aan hoe de ligging is — evenwijdig, snijdend, kruisend — van de kabel AE ten opzichte van elk van de andere zes kabels.

Een Cable-Table met ribben van 54 cm moet voor vervoer verpakt worden in een doos in de vorm van een regelmatig prisma waar de Cable-Table rechtop gezet precies in past met de glasplaat naar boven. De bodem van de doos is zeshoekig.

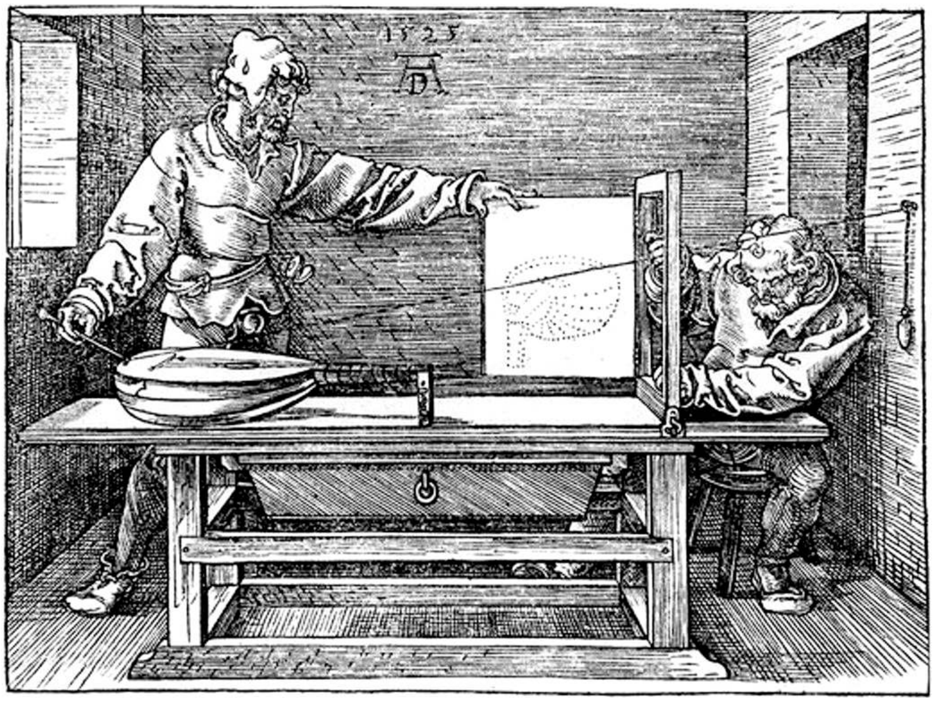
- Bereken de oppervlakte van de bodem van die doos in gehele cm^2 nauwkeurig.

De hoogte van een Cable-Table met ribben van 54 cm is 50 cm.

- Bereken de lengte van de kabel DH in gehele mm nauwkeurig.



Figuur 1 Examenopgave (gedeeltelijk) havo wiskunde B 1993



Illustratie: Albrecht Dürer

Figuur 2 Tekenen in Perspectief

chures gepubliceerd. Vanaf 1990 vormen de opsommingen van de leerstofonderdelen en de daarmee nagestreefde doelen een (omvangrijk) geheel. Tot vreugde van de leerplanontwikkelaars kwam in het havo het streven naar een koppeling tussen praktische situaties en meetkunde ook in de eindexamens van meet af aan beter tot zijn recht. Kennelijk waren de ontwerpers van de examens inmiddels meer gewend geraakt aan contextrijke opgaven (zie Figuur 1).

Basisvorming en de gevolgen daarvan (1993)

Werkend aan de herziening van bovenbouwprogramma's van het havo besefte men natuurlijk dat het nogal vreemd was dat er sinds 1968 aan de onderbouwprogramma's niets meer was veranderd. De COW (Commissie Onderbouw Wiskunde) werd geïnstalleerd in november 1987, maar was haar werkzaamheden al in 1986 begonnen.[2] Zij moest zorgen voor een onderbouwprogramma dat een goede voorbereiding diende te geven op de zojuist aangepaste curricula van de bovenbouw. Een belangrijk aandachtspunt van de commissie was tevens de *basisvorming* — een nieuwe structuur voor het onderwijs in de eerste drie leerjaren, die in 1993 zou worden ingevoerd. Het nieuwe onderbouwprogramma moest daarom een echte revolutie worden. Naast de voortdurende zorg voor de ontwikkeling van algebraïsche vaardigheden was de voorbereiding op de meetkunde van de bovenbouw natuurlijk een belangrijk punt. Daarbij moesten onderdelen van de al jaren daarvoor op het IOWO ontwikkelde kijkmeetkunde[3] nu een reguliere plaats in het curriculum van de onderbouw krijgen. En waarachtig al in 1993, tegelijk met de invoering van de basisvorming, ging het nieuwe onderbouwprogramma de brugklas in.

In het *Achtergrondenboek*[4], een uitgave van het Freudenthal Instituut en de SLO die de nieuwe programma's in een breder kader zet, worden voor meetkunde vier grote inhoudelijke gebieden genoemd, te weten:

1. *kijkmeetkunde* (kijklijnen, de rol van het standpunt, kijkhoeken, aanzichten en verklaringen, afbeeldingen in soorten, constructies)
2. *meetkunde van vormen en figuren* (patronen, symmetrie, regelmaat, lichamen, doorsneden)
3. *meetkunde over plaatsbepalen* (situaties waarin plaatsen gecodeerd zijn aangegeven, coördinaten op aarde, plaatsbepaling op grond van twee gegevens door middel van een constructie)
4. *rekenen in de meetkunde* (oppervlakte, inhouden, afstanden, hoeken, vergrotingsfactoren, verhoudingen).

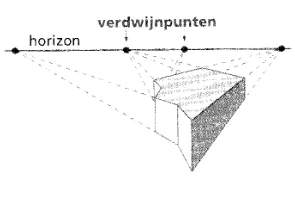
Hoewel in het *Achtergrondenboek* zeventig bladzijden gewijd worden aan de kijkmeetkunde, speelt de kijkmeetkunde in het definitieve programma maar een bescheiden rol. De herinnering aan de introductie van de verzamelingenleer in de schoolwiskunde in 1968 dringt zich op. Iedereen meende toen te weten dat in de schoolwiskunde "alles werd gedaan met verzamelingen", maar in werkelijkheid speelden die verzamelingen, zeker na enige tijd, een geringe rol. De kijkmeetkunde wil benadrukken dat de meetkunde ook een intuïtieve oriëntatie op de wereld om ons heen tot doel heeft. Nieuw was die gedachte niet. De platonische opvatting dat meetkunde over abstracte objecten dient te gaan was immers – ook in het vwo – al lang verlaten. Datzelfde gold voor de gedachte dat het voornaamste doel van meetkunde het kennismaken met een deductief systeem is.

Een mooi voorbeeld van een toepassing van de kijkmeetkunde vinden we bij de uitleg van de manier waarop je van een voorwerp een perspectieftekening kunt maken op en doorzichtige plaat:

- Plaats het voorwerp achter een doorzichtige plaat.
- Geef het oog een vaste plaats voor de plaat.
- Teken op de plaat de contouren van het voorwerp zoals je dat vanuit het oogpunt ziet.

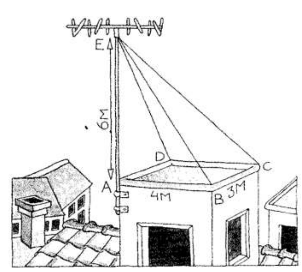
Deze methode is fraai in beeld gebracht in een prent van Albrecht Dürer (Figuur 2). In een wiskundeboek[5] uit 1995 voor klas 3 vwo vin-

Lijnen in perspectieftekeningen en foto's lopen alleen evenwijdig als ze evenwijdig zijn aan het tekenvlak.
Lijnen die in werkelijkheid evenwijdig zijn, maar niet evenwijdig zijn aan het tekenvlak, gaan bij verlenging door één punt. Zo'n punt heet een **verdwijnpunt**.
In de tekening hiernaast liggen alle verdwijnpunten op de **horizon**.



Figuur 3 Uit een meetkundeboek uit 1995

Een toren heeft een plat dak in de vorm van een rechthoek. De zijden van die rechthoek zijn 4 m en 3 m.
In één van de hoekpunten is een antennemast geplaatst. Vanaf een punt, dat 6 m boven het dak ligt, is deze mast door kabels met de drie andere hoekpunten van het dak verbonden.
Bij de aanleg had men 21 meter kabel omhoog gebracht.
Was dat voldoende?



Figuur 4 Pythagoras in de praktijk

den we na een soortgelijke uitleg over perspectieftekenen de tekst die in Figuur 3 staat. Verdere theorie ontbreekt, zodat mogelijke inbedding in een meetkundige structuur niet wordt bereikt. Wel geeft een dergelijke aanpak aan hoe meetkunde een hulpmiddel kan zijn bij het verklaren van de eigenschappen van een bekende manier van afbeelden. De betekenis van de wiskunde voor het leven van alledag wordt getoond door de stelling van Pythagoras toe te passen op praktijkproblemen. In een boek[6] uit 1994 van klas 2 havo vinden we bijvoorbeeld de opgave, die in Figuur 4 is afgebeeld.

En dit is maar een willekeurige greep uit de talloze lengte-, oppervlakte en inhoudsproblemen. Wie zich de wiskunde in de basisvorming heeft eigen gemaakt, kan de juiste hoeveelheid behang bestellen, weet hoeveel pakken graszaad er nodig zijn voor het gazon en kan ook berekenen hoeveel kubieke meter water er zit in een zwembad met een schuine bodem. Maar de opbouw van het onderbouwprogramma voor de meetkunde in de basisvorming is lastig te doorgronden. Weetjes, regels en afspraken vormen een bonte verzameling kennisbrokjes met niet al te veel samenhang.

Aanloop naar de vier profielen

Wie zou menen dat na de invoering van de basisvorming in 1993 de rust in het onderwijsveld was teruggekeerd, vergist zich. In het vwo leidde de bijna onbeperkte pakketkeuze tot zogenoemde pretpakketten. Bovendien was het voor de scholen lastig de talloze keuzemogelijkheden goed te organiseren. Vanaf 1993 werkte daarom de Stuurgroep[7] Profiel Tweede Fase Voortgezet Onderwijs aan een herstructurering van het gehele onderwijs in het traject tussen de basisvorming en het hoger onderwijs. De voorstellen van deze stuurgroep leidden in 1998 tot een beperking van de vrije pakketkeuze en tot de invoering van vier profielen.

Voor het wiskundeonderwijs was vanaf 1993 de Studiecommissie Wiskunde B actief. Deze commissie boog zich over problemen die in het wiskundeonderwijs in die jaren speelden, zoals:

1. Is er in het vigerende programma voldoende aandacht voor redeneren en bewijzen?
2. Moet er meer of minder aandacht voor toepassingen zijn?
3. Welke rol gaat/moet de informatietechnologie spelen?
4. Is de relatie tussen vaardigheden/technieken en begripsvorming goed?
5. ...

De Studiecommissie wiskunde B[8] beschreef in oktober 1994 na uitvoerig veldonderzoek, welke standpunten de verschillende betrokkenen (leraren, universitaire docenten, didactici) over dit soort problemen hadden. Van de docenten gaf 55% aan dat meer aandacht voor redeneren en bewijzen in wiskunde B gewenst was; van de universitaire docenten was dat zelfs 78%.

In het profiel Natuur en Techniek was wiskunde B een kernvak. Om in dat vak meer aandacht te kunnen geven aan bewijzen en redeneren werd ruimtemeetkunde aanbevolen als een geschikte werkomgeving. De commissie schrijft: "Constructies in ruimtefiguren die niet rechtstreeks gekoppeld zijn aan concrete objecten, versterken de behoefte aan zekerheid door middel van redenering en bewijs. Een bescheiden stelsel van grondregels moet de leerling in staat stellen enige ervaring op te doen met het spel der deductie. Bewijzen uit het ongerijmde (bijvoorbeeld ter adstructie van het kruisen van twee lijnen) verdienen expliciete aandacht." [9]

Een ironisch trekje van de geschiedenis is dat daardoor circa veertig jaar na de conferentie in Royaumont (waar Euclides in de ban werd gedaan) een herwaardering van de euclidische meetkunde optrad. Zo kreeg Duparc[10] in zekere zin toch nog gelijk.

Meetkunde in de profielstructuur

De ideeën van de studiecommissie werden nader uitgewerkt en ingevuld door de Stuurgroep Tweede Fase. Vanaf 1998 kwamen er daardoor in het wiskundeonderwijs ook weer de nodige aanpassingen. Omdat in de onderbouw — ook in het basisvormingsprogramma — weinig systematisch meetkundig gereedschap werd aangeboden om de kunst van het bewijzen op een aanvaardbare manier te beoefenen, moest er in de bovenbouw iets gebeuren om die leemte aan te vullen. Zo kwamen er in het profiel Natuur en Techniek twee wiskunde B-vakken, namelijk wiskunde B1 en wiskunde B1,2. Hierin is B1 een deelverzameling van B1,2. In B1 zien we het domein meetkunde (en dat is dan een deel van de ruimtemeetkunde uit het wiskunde B-programma van 1985). In wiskunde B1,2 zien we ook nog *voortgezette meetkunde*. Daarin zien we onder andere de subdomeinen 'Bewijzen in de vlakke meetkunde' en 'Afstanden en grenzen'.

Door de introductie van wiskunde B1,2 wordt in 1998 de mogelijkheid geschapen weer meer werk te maken van redeneren en bewijzen in de context van de vlakke meetkunde. Doelstellingen die daarvoor in het examenprogramma staan, zijn bijvoorbeeld: De kandidaat kan:

1. Het verschil aangeven tussen een definitie en een stelling.
2. Het verschil aangeven tussen een vermoeden en een stelling.
3. ...
4. Meetkundige situaties exploreren, met name aan de hand van constructies met een geschikt computerprogramma, een vermoeden in de vorm van een (te bewijzen) stelling formuleren.
5. ...
6. Een gebiedsindeling bij een gegeven verzameling punten tekenen op grond van het naastebuurprincipe en zo'n indeling gebruiken in diverse contexten.
7. ...

Als bijlage bij de examenprogramma's verschijnt een lijst van stellingen en definities waarnaar een kandidaat op het examen mag verwijzen bij een door hem/haar gegeven redenering. In die lijst treffen we definities aan van begrippen als de middelloodlijn, middenparallel en de parabool met brandpunt F en richtlijn l. Onder de talrijke stellingen vinden we natuurlijk de congruentiegevallen en stellingen over bijzondere lijnen in een driehoek. Maar ook stellingen over hoeken en bogen, zoals:

Een omtrekshoek is gelijk aan de helft van de middelpuntshoek die dezelfde koorde insluit als de omtrekshoek. (sic!)

Ook de koordenvierhoek wordt apart genoemd met als stelling:

Als de som van een paar overstaande hoeken van een vierhoek 180 is, dan is de vierhoek een koordenvierhoek.

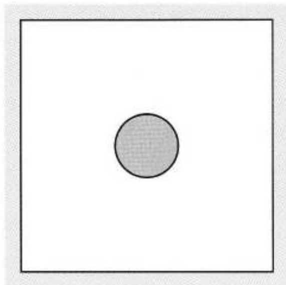
In de aanloop naar 1998 werd er door ontwikkelaars onderzocht welke delen van de vlakke meetkunde geschikt zouden zijn om in het curriculum op te nemen. Dat daarbij een aantal klassiekers terugkeerde, blijkt wel uit de doelstellingen waarvan we er hierboven enkele noemden. Maar er kwam (zie doelstelling 6) ook een nieuw gebied bij: de meetkunde van het *naastebuurprincipe*. Dit principe, dat ten grondslag ligt aan de zogenoemde *Voronoi-betegeling*, leek vooral interessant vanwege de toepassingen die in de huidige tijd zouden kunnen aanspreken, zoals territoriumconflicten en de verdeling van het continentale plat. De *conflictlijn* — de meetkundige plaats van punten die even ver liggen van twee figuren — speelt hierbij een belangrijke

In een vierkante museumzaal staat een grote zuil. De inrichtingscommissie wil in de vloerbedekking kleurvlakken aanbrengen die begrensd worden door conflict-lijnen van de wanden onderling en van de wanden en de zuil.

a Teken in de plattegrond de grenslijnen in het gedeelte van de zaal waar de zuil nog geen rol speelt.

b Teken conflictlijnen van de zuil met de muren.

c Geef de verschillende kleurvlakken aan.



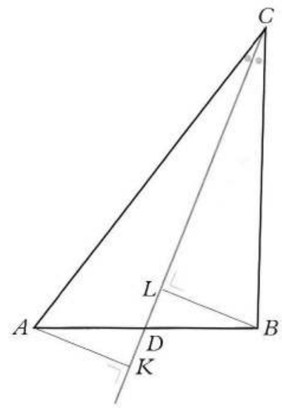
Figuur 5 Opgave over conflictlijnen (1999)

In de figuur zie je weer driehoek ABC met de deellijn uit hoek C. Je kunt de gelijkheid $AD:BD = AC:BC$ ook aantonen door gelijkvormige driehoeken te gebruiken.

a Noem twee paar gelijkvormige driehoeken in de figuur.

b Gebruik het ene paar gelijkvormige driehoeken en toon aan dat $AD:BD = AK:BL$.

c Gebruik nu het andere paar gelijkvormige driehoeken en voltooi het bewijs.



Figuur 6 Bewijzen en redeneren in 5 vwo (1999)

rol. Opvallend was dat ook de kegelsneden als conflictlijnen weer in het programma terugkeerden. Daardoor komen de meetkundige eigenschappen van deze krommen in het huidige programma nadrukkelijker naar voren dan vroeger het geval was.

In Figuur 5 staat een voorbeeld van een opgave over conflictlijnen uit een meetkundeboek (*Netwerk*[11]) uit 1999 voor voortgezette meetkunde. Zeker moet ook genoemd worden dat vanaf 1998 het gebruik van interactieve computerprogramma's zoals Cabri of Geogebra bij het doen van verkennend meetkundig onderzoek meer en meer tot de standaardprocedures ging behoren. Bij een schoolboek als *Netwerk* werd Cabri meegeleverd en bevatte elk hoofdstuk twee afsluitende pagina's om met behulp van dit programma meetkundig onderzoek te doen. Uit hetzelfde boek een voorbeeld van een opgave over bewijzen en redeneren (Figuur 6).

Wie zijn middelbare schoolopleiding voor 1970 heeft afgerond, zal zich ongetwijfeld de stelling die in Figuur 6 wordt afgeleid nog wel herinneren. Hier wordt de afleiding van de stelling gebruikt als oefening in het bewijzen en redeneren. Ooit behoorde deze stelling tot de leerstof van de tweede klas van het vwo; nu is dit bewijs een onderdeel van het domein 'bewijzen en redeneren in de vlakke meetkunde' in de bovenbouw.

Ook in de eindexamens komen in het eerste decennium van de 21ste eeuw opgaven voor die vragen naar een bewijs van een meetkundige eigenschap. In Figuur 7 bijvoorbeeld een opgave uit 2009.

Aan deze voorbeelden is te zien dat in de periode 1998 tot 2007 de klassieke meetkunde in beperkte mate is teruggekomen. De examenopgaven uit het eerste decennium van de 21ste eeuw bevatten vaak problemen over koordenvierhoeken, cirkels en conflictlijnen. In die context worden van de leerlingen *lokale deductieve redeneringen* gevraagd. Voor de (inmiddels zeer) ouderen komen allerlei uit het verleden bekende zaken weer voorbij. Een groot verschil met de vroegere situatie is dat voor 1968 het systeem van definities en stellingen in de onderbouw werd ontwikkeld en verankerd. Nu is de meetkunde in de onderbouw een grabbelton van methoden en aanpakken waar moeilijk een systeem in te ontdekken valt. Definities en stellingen die je mag gebruiken worden grotendeels pas in de bovenbouw behandeld. Dat de examenmakers dit ook beseffen, blijkt uit de hierboven al genoemde lijst van definities en stellingen die bij de examendoelstellingen hoort.

2007 en verder

In 2007 heeft weer een herschikking van de diverse wiskunde-examenonderdelen plaatsgevonden en sindsdien spreken we van de hernieuwde tweede fase. Het onderscheid tussen wiskunde B1 en B1,2 is verdwenen. We kennen nu wiskunde A, B, C en D. In wiskunde B zien we als domein Gb de voortgezette meetkunde terug. Dit domein heeft twee subdomeinen, namelijk Gb1 'Oriëntatie op bewijzen' en Gb2 'Constructies en bewijzen in de vlakke meetkunde'. In de beknopte omschrijving van deze subdomeinen vinden we voor Gb1 de woorden: "De kandidaat kan definities, vermoedens, stellingen en bewijzen onderscheiden, meetkundige situaties exploreren, een vermoeden of te bewijzen stelling formuleren en bewijzen of weerleggen." En voor Gb2: "De kandidaat kan constructies uitvoeren en bewijzen geven."

Deze wijziging is slechts een herschikking van wat sinds 1998 al aan de orde kwam. Uit het programma wiskunde B is de ruimtemeetkunde verdwenen. Die vinden we terug in wiskunde D. Daar treffen we ook een stuk analytische meetkunde aan en enige theorie van de kegelsneden. Voor wiskunde D wordt geen centraal schriftelijk examen afgenomen.

Overzicht

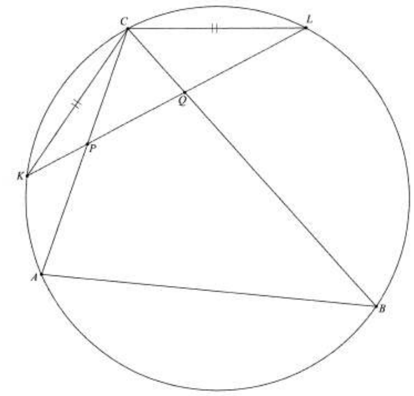
Ten slotte geven we een schematische samenvatting van de wijzigingen in het wiskundeonderwijs die hiervoor zijn beschreven. Zie kader.

Epiloog

Hiermee sluiten een reeks van vier artikelen over het meetkundeonderwijs van de twintigste eeuw in Nederland af. Eerder verschenen de stukken 'Meetkunde op gymnasium en hbs 1900–1968' (juninummer 2012), 'Kijkmeetkunde, een ander uitgangspunt (1970–

Gegeven is driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel. Aan weerskanten van C liggen de punten K en L op de omgeschreven cirkel zo dat $CK = CL$. De koorde KL snijdt de zijden AC en BC in P en Q.
Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Er geldt: $\angle BAC = \angle QCL + \angle CLK$.

Bewijs dit.

Bewijs dat vierhoek $ABQP$ een koordenvierhoek is.

Figuur 7 Meetkundeopgave uit het examen wiskunde B1,2 vwo 2009

Wijzigingen in het wiskundeonderwijs

1958
Hbs en gymnasium krijgen hetzelfde wiskundeprogramma. Afschaffing beschrijvende meetkunde op de hbs. Analytische meetkunde nu zowel op hbs als gymnasium. Differentiaal- en integraalrekening in het examenprogramma. Intuïtieve inleiding in de meetkunde algemeen aanvaard. De eerste experimenten met transformatiemeetkunde in de onderbouw.

1961
Installatie van de CMLW (Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde). Wiskundeprogramma's moeten beter aansluiten bij de wetenschappelijke wiskunde en meer toepasbare onderwerpen bevatten.

1961–1968
Leerstofexperimenten op aanwijzingen van CMLW: transformatiemeetkunde, gemoderniseerde algebra, analyse en vectormeetkunde voor de bovenbouw. Formulering van het programma dat in 1968 van start gaat. Vakinhoudelijke nascholing van docenten.

Vanaf 1968
Mammoetwet: atheneum (vwo), havo en mavo. Verzamelingentaal. In de onderbouw meetkunde met transformaties en vectoren, meer aanschouwelijk, maar minder systematisch. Klassieke meetkundige bewijzen zijn grotendeels verdwenen. In de bovenbouw: wiskunde I (analyse, kansrekening en statistiek) en wiskunde II (lineaire algebra). In de bovenbouw geen vervolg van de (klassieke) meetkunde; daardoor ook in onderbouw meetkunde onderbelicht. In de havo-examens algoritmisch getinte vectormeetkunde.

1971–1981
Op het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) worden ideeën en praktisch materiaal ontwikkeld voor *meetkunde op de basisschool* en voor kijkmeetkunde voor de brugjaren van het voortgezet onderwijs.

1985
Herverkaveling van de bovenbouwprogramma's vwo (HEWET). Introductie wiskunde B (analyse en ruimtemeetkunde), en wiskunde A (analyse, matrixrekening en statistiek en kansrekening). Onderbouw ongewijzigd; daardoor gebrekkige voorbereiding op de ruimtemeetkunde. Wiskunde A sterk toepassingsgericht. Havoprogramma ongewijzigd.

1990
Aanpassing bovenbouwprogramma's havo (HAWEX). Vectorrekening vervangen door ruimtemeetkunde. Onderbouwprogramma's ongewijzigd.

1993
Start basisvorming. Nieuw programma voor de onderbouw: wiskunde 12–16. Vier aandachtsgebieden voor meetkunde: kijkmeetkunde, vormen en figuren, plaatsbepalen en berekeningen. Geen overzichtelijk arsenaal van stellingen. Toepassingen in de sfeer van berekeningen. Voorzichtige terugkeer van de klassieke meetkunde.

1998
Introductie vier profielen in de bovenbouw. In profiel Natuur en Techniek wiskunde B1 en B1,2. In B1 ruimtemeetkunde; in B1,2 voortgezette meetkunde. Meer nadruk op redeneren en bewijzen; voortgezette meetkunde is daarvoor een aanbevolen context. Gebruik van computerprogramma's bij meetkundig onderzoek. Introductie van naastebuurprincipe en Voronoi-cellen. Bij het examenprogramma wordt een lijst gemaakt van te gebruiken stellingen en definities.

2007
Herschikking van de examenonderdelen. Introductie wiskunde A, B, C en D. In wiskunde B 'oriëntatie op bewijzen' en 'constructies en bewijzen in de vlakke meetkunde.' Ruimtemeetkunde naar wiskunde D.

1980)' (decembernummer 2012) en 'Meetkunde, stiefkind van het wiskundeonderwijs (1970–1990)' (maartnummer 2013). Wij (de auteurs De Moor, Groen en Kemme) hebben getracht de historische ontwikkeling van dit vak van onderwijs gedurende genoemd tijdperk te ontrafelen.

Was meetkunde — vooral als voorbeeld van een deductief systeem — eeuwenlang een constante in het onderwijs, in de jaren zestig van de twintigste eeuw werd plotseling gebroken met deze traditie. Een van de meest ingrijpende veranderingen voltrok zich in 1968 toen ook Nederland door de zogenaamde New Math beïnvloed werd. Abrupt werd toen gebroken met de eeuwenlange traditie van de euclidische meetkunde. Over de didactiek van de meetkunde waren in de halve eeuw daaraan voorafgaand scherpe discussies gevoerd (zie deel 1 van deze reeks). Aan de ene kant stonden degenen, die een 'intuïtieve' en 'aanschouwelijke' introductie — al op jonge leeftijd — voorstonden. Aan de andere kant was er een meer behoudend 'kamp' dat meende dat er ook voor het aanvankelijke meetkundeonderwijs geen concessies gedaan mochten worden aan een zo streng mogelijk logisch-deductief systeem volgens de axiomatische meetkunde aanpak van Euclides. Het wonderlijkste van de omslag in 1968 is wel dat deze discussie opeens stilviel en dat zowel wiskundig als didactisch Nederland 'blind' leken mee te gaan in de opvatting over wiskunde leren vanuit formele wiskundige structuren. Voor de meetkunde — in het bijzonder de aanschouwelijke kant daarvan — was dat de nekslag, omdat de kern van alle denken en handelen gericht werd op structuren en algoritmen.

Maar een consolidatie in die richting is in de laatste halve eeuw allerminst opgetreden. Integendeel, het overzicht in het kader hebben we in grote stappen laten zien welke nieuwe veranderingen zich in vrij korte tijd voltrokken hebben en welke oorzaken of toevalligheden daaraan ten grondslag lagen. Wettelijk zijn er steeds weer nieuwe programma's en eindexameneisen vastgesteld. Terugblikkend kunnen we niet anders spreken dan van een onsamenhangend ontwikkelingsbeleid. Het ontbrak aan afstemming tussen basisonderwijs en het voortgezet onderwijs, zowel vakinhoudelijk, vakdidactisch als programmatisch. Nog sterker was dit tussen de verschillende soorten van het voortgezet onderwijs, waarbij vooral mavo en lbo tussen wal en schip raakten.

De kern van deze historische analyse is het feit dat meetkunde als schoolvak steeds verder op de achtergrond raakte. De poging om het vak via vectormeetkunde een plaats te geven blokkeerde het doel om het ruimtelijk voorstellingsvermogen te activeren. Praktische meetkundige toepassingen verzandden in stereotype (reken)vraagstukken. De thema's als koordenvierhoeken en conflictlijnen zoals die de laatste jaren in de eindexamenprogramma's voorkomen zijn op zich zinvol en bieden de mogelijkheid tot lokaal deductief redeneren, maar wij vragen ons af of sommige onderdelen hiervan niet eerder aan de orde gesteld kunnen worden en of er wel voldoende voorbereiding in de voorgaande leerjaren heeft plaatsgevonden. De traditionele meetkunde biedt — juist door het aanschouwelijke en intuïtieve karakter — als geen ander onderdeel van de elementaire wiskunde de mogelijkheid tot logisch redeneren en dit is verdwenen uit het onderwijs. Enerzijds komt dat door de genoemde revolutie in de jaren zestig, anderzijds doordat dit technologische tijdperk steeds meer aandacht eist voor de getalsmatige en algoritmische aspecten van de wiskunde.

Het is misschien wel een ongelukkige beslissing geweest om algebra en meetkunde als aparte vakken op te heffen. Meetkunde heeft niet meer die prominente plaats in het wiskundeonderwijs als vijftig jaar geleden. Dit is in zekere zin begrijpelijk, maar wiskunde is van oudsher de studie van getal én ruimte. Beide elementen zijn van belang om het wiskundig denken te ontwikkelen. Grote wiskundigen als Henri Poincaré (1854–1912), Harold Coxeter (1907–2003) en de eminente wiskundedidacticus György Pólya (1887–1985) hebben gewezen op het belang van het visuele denken en de ontwikkeling van het ruimtelijk voorstellingsvermogen. Veel praktische problemen zijn zonder ruimtelijk inzicht niet op te lossen en ook in de algebra maken we vaak gebruik van meetkundige modellen. Ook het afbeelden van figuren gaat niet zonder meetkundig inzicht en zo zijn er meerdere redenen om meetkunde niet als stiefkind te behandelen.

We lieten bij deze opsomming de aspecten van het leren bewijzen, het inzicht in wat een axiomatisch systeem is nog achterwege. Dat was nu juist de kern van de discussie tussen Tatjana Ehrenfest-Afanasjeva en Eduard Dijksterhuis gedurende de jaren twintig en dertig van de vorige eeuw. Mevrouw Ehrenfest zag als ideaal een meetkunde-curriculum dat al voor kinderen vanaf de leeftijd van tien jaar zou aanvangen met een intuïtieve inleiding, daarna over zou gaan in een meer systematische cursus voor de 12- tot 16-jarigen om te eindigen met een strikt axiomatische leergang aan het eind van de middelbare school (zie deel 1 van deze reeks). Vanaf de jaren zeventig zijn daartoe wel pogingen ondernomen, maar we moeten constateren dat het niet gelukt is tot een werkelijk doorgaande leerlijn te komen. Inhoudelijk en vakdidactisch passen de soms fraaie deelprojecten niet in een doorlopende leerlijn. Het geheel overziende zien we een fragmentarisch opgezet meetkundeonderwijs waaraan fundamentele uitgangspunten en duidelijke doelen ontbreken. Wellicht dat na honderd jaar nieuwe denkers als mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis moeten opstaan om meetkunde als belangrijk, uitdagend en prachtig vak van onderwijs opnieuw aan de orde te stellen.

Dankwoord

De auteurs danken Sieb Kemme, Martin Kindt, Ilan Kisch en Douwe Kok voor hun kritiek op de eerste versie van dit artikel.

Noten

1. *Uitleg*, 14 maart 1990, p. 35 en 37 .
2. Zie ook *Euclides* 87(7), pp. 317–320.
3. Ed de Moor en Wim Groen, Kijkmeetkunde een ander uitgangspunt (1970–1980), *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/13(4), 2012, 248–253.
4. Team W12–16, *Achtergronden van het nieuwe leerplan. Wiskunde 12–16, band 1 en 2*, Freudenthal Instituut / SLO, Utrecht en Enschede, 1992.
5. *Moderne wiskunde*, 6e editie, 3 vwo, p. 31.
6. *Moderne wiskunde*, 6e editie, 2 havo–vwo, p. 95.
7. Negen (aanvankelijk tien) personen uit diverse onderwijsgebieden. Leden van de commissie zijn onder anderen mevrouw Ginjaar-Maas (oud-staatssecretaris van onderwijs) en mevrouw Visser 't Hooft (rector van een scholengemeenschap).
8. J. de Lange e.a., *Rapport Studiecommissie Wiskunde B vwo*, Freudenthal Instituut, Utrecht, 1994.
9. *Rapport Studiecommissie*, p. 70.
10. Ed de Moor en Sieb Kemme, Meetkundeonderwijs op gymnasium en hbs 1900–1968, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/13(2), 2012, 102–109.
11. *Netwerk*, vwo bovenbouw, wiskunde B2, Wolters-Noordhoff, 1999.