

Robbert Fokkink

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TU Delft

r.j.fokkink@tudelft.nl

Evenement 49ste Nederlands Mathematisch Congres (NMC 2013)

Weergalozе mengeling van wiskunde en theater

Onder auspiciën van het Koninklijk Wiskundig Genootschap werd op vrijdag 5 april aan de Radboud Universiteit Nijmegen het 49ste Nederlands Mathematisch Congres gehouden. Pleinaire sprekers waren John Conway en Vitaly Bergelson. Verder stonden er voordrachten op het programma van Georges Gonthier en Lotte Jaspers, en waren er diverse parallele sessies. Robbert Fokkink van de TU Delft doet verslag, waarbij hij uitgebreid stilstaat bij de voordracht van Conway.

Ruim honderd deelnemers hadden zich op vrijdagochtend 5 april verzameld voor het Nederlands Mathematisch Congres in Nijmegen. De voorzitter van het College van Bestuur, in Nijmegen is dat gelukkig nog een hoogleeraar, opende het congres en gaf vervolgens het woord aan organisator Wieb Bosma voor de inleiding van pleinaire spreker Vitaly Bergelson. Wieb en Vitaly hadden elkaar goed leren kennen doordat ze de voorgaande dag enkele uren in de auto hadden moeten wachten voor de Waalbrug. Files scheppen altijd een band. Dit was alweer de derde voordracht van Vitaly Bergelson binnen acht dagen. Hij had eerder gesproken in Leiden over de stelling van Van der Waerden en in Delft over Van der Corput-verzamelingen. Een spreker die op gepaste wijze onze nationale trots streelt, komt natuurlijk uitstekend van pas op het NMC.

Vitaly Bergelson

Bergelson opende de voordracht met de stelling van Schur: voor elke eindige partitie $\bigcup \mathcal{N}_i$ van de natuurlijke getallen is er een \mathcal{N}_i die elementen a , b en $a + b$ bevat. Met andere woorden, de vergelijking $a + b = c$ heeft oneindig veel oplossingen binnen een van de elementen van de partitie. Zo'n formule heet *partitie-regulier* en een van de thema's van Bergelsons

onderzoek is de classificatie van dergelijke formules. In plaats van een partitie kan men ook een deelverzameling \mathcal{N} nemen. Als dit een grote verzameling is, dan moet de formule oplosbaar zijn binnen \mathcal{N} . Maar wat is precies een grote verzameling? Verschillende mogelijke definities werden besproken met

de zaal. De verzameling S van kwadraatvrije getallen is bijvoorbeeld een grote verzameling, want $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|S < N|}{N}$ is welgedefinieerd en gelijk aan $6/\pi^2$. Iedereen herkent dat quotiënt natuurlijk en deze uitkomst is zeker geen toeval. Als je nu een vervelend studentje hebt, verklaarde Vitaly, geef hem dan het volgende probleem: *elk natuurlijk getal is het verschil van twee kwadraatvrije getallen*. De oplossing van dit probleem kan in één regel, wat bijzonder educatief werkt bij vervelende studentjes. Vervolgens schreef Vitaly de oplossing op het bord en kreeg van de eerste rij de klacht dat de oplossing niet bestond uit één maar twee



Vitaly Bergelson (links) met zijn Nijmeegse collega en evenbeeld Eric Cator (rechts)



Lunch in de Noordstraat

regels. De klacht kwam van John Conway, die in dezelfde auto uren had moeten wachten op de Waalbrug. Files scheppen een band.

De ondertitel van de voordracht was ‘A tribute to Paul Erdős’, maar er kwamen ook verschillende andere wiskundigen voor het voetlicht. Turán, Szemerédi en Vitaly’s goede vriend Neil Hindman, die precies die dag jarig was. De voordracht eindigde met een beschouwing over niet-lineaire vergelijkingen. Zo is $a - b = c^2$ partitie-regulier, maar $a + b = c^2$ is dat niet. Dit laatste is overigens een opgave voor vervelende lezertjes. Het bewijs van de regulariteit van de eerste formule is niet eenvoudig en berust op nogal gekunstelde ultrafilters. Vitaly zei niet zo blij te zijn met dit bewijs en te hopen op een verbeterde versie. Toen werd gevraagd, opnieuw op de eerste rij: van wie is dat bewijs dan? Dat bleek van Vitaly zelf te zijn, die liever een *tribute* geeft aan anderen, maar werd gedwongen te eindigen met een *tribute* aan zichzelf.

Parallele sessies

Daarna was het tijd voor koffie in de gang van het Huygensgebouw, die is gesplitst in een Noordstraat en een Zuidstraat. Dat geeft al aan hoe lang die gang is. Niet iedereen wist gelijk de koffie te vinden in de krappe tijd tussen plenaire lezing en parallele sessies. Vijf in totaal: één over geschiedenis van de wiskunde, één over wiskunde en industrie, twee clustersessies, en tenslotte een sessie met voordrachten voor de Philips Wiskundeprijs voor Promovendi. De jury, bestaande uit Emile Aarts, Rien Kaashoek, Jaap Top en Willem

van Zwet, had zich verspreid over de zaal. Het jongste lid zat voorin de zaal en stelde na afloop kritische vragen, terwijl de senioren verderop in de zaal op fluisterende toon commentaar uitwisselden. Was dit misschien hun manier om de druk bij de kandidaten weg te nemen? Hoe dan ook, het werkte goed, want allen maakten een ontspannen indruk en slaagden erin met eenvoudige voorbeelden de resultaten van hun onderzoek te illustreren. Ondertussen werd in de Noordstraat zo geruisloos mogelijk gebouwd aan een lange rij tafels voor de lunch, die werd afgehandeld tussen 13.00 en 14.00 uur. Het NMC is gecompriemd tot een enkele dag, terwijl de inhoud van het programma niet is meegekrompen. Zoiets is alleen mogelijk bij een vlekkeloze organisatie. Na de lunch liep het programma weer verder met opnieuw vijf parallele sessies. Een nieuw fenomeen was de sessie over funding, met aandacht voor topsectoren en Europese subsidies. Wij hard werkende wiskundigen zijn netto betalende en het zou mooi zijn als iemand ons geld uit Brussel terug gaat halen. Ook nieuw was de sessie waarin masterstudenten binnen tien minuten een overzicht gaven van hun afstudeerwerk voor potentiële werkgevers. Bijna alle voordrachten hadden een toegepast karakter, verschillende malen werd de wens uitgesproken om de wereld te verbeteren: de jongste generatie loopt voorop met de valorisatie. Vier van de tien studenten kwamen niet opdagen en hebben klaarblijkelijk al een werkgever gevonden. Ondanks de stijgende jeugdwerkloosheid schijnt het wel goed te zitten met het

toekomstperspectief van jonge wiskundigen.

Philips Wiskundeprijs voor Promovendi

Het was vier uur en de deelnemers konden nog snel een kop koffie drinken op weg naar de afsluiting van het programma. De Philips Wiskundeprijs voor Promovendi werd uitgereikt aan René Pannekoek (UL) voor zijn werk aan rationale punten op Kummeroppervlakken, waarmee hij volgens de jury de weg heeft geopend naar nieuw en veelbelovend onderzoek. René ontving de prijs uit handen van de winnaar van vorig jaar, Ruben van der Zwaan. Het aantal toehoorders in de zaal was ondertussen bijna verdubbeld tot tweehonderd, zoveel pasten er eigenlijk niet in, in afwachting van het hoogtepunt van de dag: de slotlezing van John Conway. Hieronder staat daarvan een verslag, naar beste vermogen.

John Conway

Een introductie is niet nodig. Op tafel staan twee overheadprojectors, niet helemaal in focus. Conway stommelt het podium op en schrijft noodgedwongen met zijn linkerhand, langzaam en met grote letters, de titel van zijn voordracht: ‘Lexicodes’. Een verkorting van lexicografische code. Hij vraagt: “Is er misschien iemand in de zaal die hier al wat over gehoord heeft?”, en buldert dan, “KEEP YOUR BIG MOUTH SHUT” — er valt een doodse stilte — “and even if you have a dainty little mouth, KEEP YOUR DAINY LITTLE MOUTH SHUT”. Nu hij de volle aandacht van de zaal heeft, begint Conway met een definitie op de ene projector die eindigt op de andere. “Een lexicode is een half-oneindige rij van niet-negatieve gehele getallen $\dots cba$, lexicografisch geordend. Elke volgende lexicode is de eerste die voldoende grote Hamming-afstand heeft tot zijn voorgangers. Bijvoorbeeld, de lexicode C_3 begint met

```

...000000000
...000000111
...000000222
:
```

en zo begin je met $\dots 000000aaa$ voor gehele $a \geq 0$. Hoe moet dat nu verder wanneer je lexicografisch bent aangeland bij $\dots 000001cba$? Wacht even,” zegt Conway, “daar moet ik over nadenken... ik meen me te herinneren dat de abc dan verschillend moeten zijn... ja, dat klopt wel, dat kan iedereen in de zaal zelf controleren, want de Hamming-afstand moet drie zijn. De eerstvolgende code is $\dots 000001012$, als ik het wel heb. De eerste codes zijn

... 000001012
 ... 000001103
 ... 000001230
 ... 000001321

en nu gebeurt er iets opmerkelijks, want de volgende code is ... 000001456 waarmee de normale volgorde lijkt te zijn hersteld. Het is tijd om een resultaat op te schrijven dat ikzelf bijzonder mooi vind:

Lexicode Stelling. *Onder coördinaatgewijze definitie van vermenigvuldiging en vectoroptelling vormen de lexicodes een vectorruimte.*

Je kunt eenvoudig controleren dat de lexicodes ... 00000aaa gesloten zijn onder optelling — er klinkt wat geroezemoes in de zaal — “en ook als je ... 000001012 optelt bij zoiets als ... 000000222 dan krijg je ... 000001234.”

“Wat bedoelt u eigenlijk met een vectorruimte?”, klinkt er nu vanuit de zaal. Conway kijkt een beetje verstoord op. “Ja, ja, inderdaad, dit zijn gehele getallen en geen reële getallen. Laat ik dat voor dit moment even toegeven. Dat is wel jammer, want ik vind dit persoonlijk een erg mooie stelling.” “Bedoelt u misschien een moduul?”, probeert iemand te helpen.

Conway veegt het woord vectorruimte uit en gaat weer verder met zijn berekening. Hij kijkt naar het resultaat van de optelling ... 000001234 en constateert tot zijn schrik dat dit geen lexicode is, want 000001230 was al een lexicode en die heeft Hamming-afstand 1. Er klopt iets niet. Conway is onder-tussen van het podium naar beneden gestom-meld, kijkt onthutst de zaal in, en verzucht: “Ik heb eigenlijk nog nooit een voordracht voorbereid en vroeger had ik daar helemaal geen last van.” Het is een treurig moment van totale ontreddering, voor een zaal vol begrij-pende toehoorders die bereid zijn de grote man zijn falen te vergeven vanwege prestaties uit het verleden. Hij klautert weer het podium op en prevelt dat hij onderweg op het vlieg-



“Ik bereid mijn voordrachten nooit voor”

veld ook al zijn paspoort vergeten was. Even is het niet duidelijk of de voordracht wel door kan gaan, maar Conway gaat toch stug verder. “Er moet toch enige waarheid in de stelling schuilen, want ik heb al eens eerder over dit onderwerp gesproken. Laten we de stelling even herschrijven, zodat die weer waar wordt.” Conway schrijft eerst het woord *non* voor de stelling, maar maakt er uiteindelijk van:

Lexicode Probleem. *Zijn er coördinaatgewijze definities van vermenigvuldiging en vectoroptelling waaronder lexicodes een vectorruimte vormen?*

“We kunnen natuurlijk proberen om het probleem op te lossen door de definitie van optelling aan te passen. Het is duidelijk dat $0+0=0$ want anders is de som van twee lexicodes nooit meer een lexicode. Laten we dus 0 uitkiezen als ons nul-element en daarmee hebben we een begin van onze opteltabel

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	.	.
2	2	.	.

Als je nu kijkt naar de optelling

... 000001012
 ... 000000111
 ... 0000011??

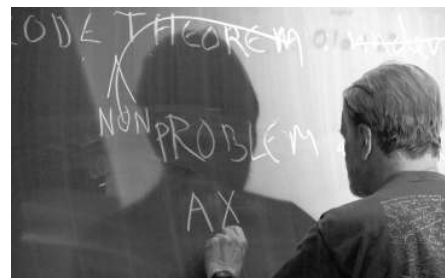
dan is er een unieke lexicode die past, namelijk ... 000001103. Dus nu zien we dat $1+1=0$ en we vinden:

Stelling 1. *Het lichaam heeft karakteristiek 2.*

Dit geeft ons de diagonaal van de opteltabel. Bovendien hebben we gevonden dat $2+1=1+2=3$, precies zoals we gewend zijn. Via de associatieve eigenschap, waarvan we maar aannemen dat die geldt, krijgen we ook $3+1=1+3=2$ en de andere optellingen van getallen tot en met 3. Nu maken we even een zijstapje naar lexicode C₄, die krijg je door een laatste cijfer toe te voegen aan C₃, door bijvoorbeeld ... 00000aaa|a en ... 000001012|3. De optelling

... 0000010123
 ... 0000004444
 ... 0000014???

is uniek gedefinieerd en de drie vraagtekens moeten wel gelijk zijn aan 567 vanwege



Probleem wordt Axioma

Hamming-afstand, dus kunnen we de tabel uitbreiden tot de getallen tot en met 7, door te bedenken dat het tweede blok gelijk is aan het eerste plus 4:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Stelling 2. *Als $n < 8$ dan is $n + 8$ precies wat we gewend zijn en hetzelfde geldt algemeen voor $n < 2^k$ en $n + 2^k$.*

Ah! Dus we hebben laten zien dat deze optelling volledig bepaald is.” Op het bord verandert Conway het Lexicode Probleem in een Axioma door de woorden *zijn* en *er* om te draaien en het vraagteken uit te vegen. Het wordt verderop in de lezing weer hersteld tot Stelling.

“Informatici noemen dit de *exclusive or*, terwijl wiskundigen het herkennen als de *minimal excluded value* oftewel de Nim-optelling. Nu is het zaak om te laten zien dat de vermenigvuldiging bestaat, of in ieder geval minstens één vermenigvuldiging. Het probleem is dat $1 \times 1 = 1$ niet kan worden bewezen maar ook niet kan worden weerlegd. Elk element ongelijk nul kan de eenheid zijn, dus verklaren we 1 maar tot eenheid, zodat we kunnen beginnen met de vermenigvuldigingstafel.

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2
3	0	3
4	0	4
5	0	5
6	0	6
7	0	7



John Conway in actie

Het eerste obstakel is 2×2 . Vermenigvuldig $\dots 0000001012$ met 2, dan krijgen we $\dots 000000202?$ en het vraagteken moet wel een 3 zijn. Daarmee krijgen we het schattige resultaat dat $2 \times 2 = 3$ en ik denk dat ik de eerste persoon ben die dat ooit heeft opgemerkt. Via de distributieve wet kunnen we de tafel nu wat verder uitbreiden...”

“Waarom is 2×3 gelijk aan 3×2 ?”, vraagt een niet-commutatieve GQT-er. “Ik beroep me op de juridische verdediging dat lichamen commutatief zijn,” antwoordt Conway. “Hoevel het misschien ook mogelijk is om dit rechtstreeks af te leiden... Eh, nee, dat doe ik toch maar niet... Ik blijf bij mijn juridische verdediging.

\times	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	3	1	8	.	.	.
3	0	3	1	2	12	.	.	.
4	0	4	8	12
5	0	5
6	0	6
7	0	7

Dus nu is de vraag wat 4×4 is. Ik kwam daarachter toen ik nog een student was in Cambridge. Kan het 0 zijn? Natuurlijk niet, idioot. Kan het 1 zijn? Maar dan zou $x^2 = 1$ ofwel $x^2 + 1 = 0$ ofwel $(x+1)^2 = 0$ een extra nulpunt hebben. Dus 1 is het niet. Ook 2 en 3 vallen af om dezelfde reden. Het kwadratische polynoom $x^2 = x$ heeft al de twee nulpunten 0 en 1. En ook $x^2 = x + 1$ heeft al de twee nulpunten 2 en 3. Dus is 4^2 ongelijk aan 4 of 5 en zo kom je uiteindelijk bij $4^2 = 6$. Ik verkende die mogelijkheid en ik kon er niets mis mee vinden. Ik berekende de hele vermenigvuldigingstafel tot aan 16 en het leek te werken. Het kostte een hele middag, maar toen ik klaar was ging ik liggen op het tapijt en ik giechelde en ik schudde, want vier-kwadraat is zes.

Stelling 3. *Als $N = 2^{2^k}$ en $n < N$ dan is $n \times N$ wat je gewend bent, maar*

$$N \times N = \frac{3N}{2}$$

Dit bepaalt de vermenigvuldigingstafel volledig. Ik zal dit demonstreren zoals Besico-

vitch dat deed onder zijn colleges. JIJ DAAR, GEEF ME EEN GETAL ONDER DE 16 EN LAAT HET NIET TRIVIAAL ZIJN.” De wijsvinger priemt richting Vitaly Bergelson, die zegt 11. “...EN JIJ DAAR.” De wijsvinger priemt naar Peter van Emde Boas, die zegt 13.

“Nu berekenen we 11×13 door beide getallen binair uit te schrijven, dus $(1 + 2 + 8) \times (1 + 4 + 8)$ en dat is gelijk aan...” Conway schrijft nu het een en ander op het bord, maar stopt er uiteindelijk mee. “Nu ga ik deze stelling niet bewijzen (was het hiervoor een axioma?). Ik denk dat ik die maar laat staan als een opgave. Het is een tamelijk moeilijke opgave. Er zijn nog zoveel meer dingen te zeggen. Bijvoorbeeld 2 is een derdemachts-eenheidswortel en 4 is een vijftiendemachts-eenheidswortel. Het blijkt dat ω een derdemachtswortel is van 2, dus dat is ook een eenheidswortel. Het kostte me vroeger de nodige moeite, maar tegenwoordig kan ik probleemloos vermenigvuldigen zonder al teveel geheugen te gebruiken. Het is een kwestie van de logaritme: $\log 11 = 7$ en $\log 13 = 12$ die moet je optellen... dus 19... en dat is 4 modulo 15... dus 11×13 is gelijk aan zes... Ja ik geloof echt dat het 6 is en ik denk dat ik



"EN JIJ DAAR"



Peter van Emde Boas, geluksgetal dertien

er nu maar een eind aan maak." Zo besluit Conway zijn voordracht, een weergaloze mengeling van wiskunde en theater, waarin een erkende bedrieger er toch in is geslaagd om nagenoeg de hele zaal bij de neus te nemen.

Erelidmaatschap voor Rob Tijdeman

Herman te Riele neemt nu het woord namens het Koninklijk Wiskundig Genootschap en heropent officieel de geschorste jaarvergadering van het KWG, die eerder op de dag is geopend. Hij richt zich tot de twee eregasten die recht tegenover hem zitten op de eerste rij: Rob en Berrie Tijdeman. Het KWG heeft op de jaarvergadering unaniem besloten het erelidmaatschap te verlenen aan Rob Tijdeman vanwege zijn buitengewone verdiensten, niet alleen voor de wetenschap, hoewel die natuurlijk ook erg indrukwekkend zijn, maar vooral voor de bestuurlijke activiteiten daar-

naast. Herman somt een lange rij van bestuursfuncties op, die gelukkig niet uitputtend is, anders zat de zaal er nu nog. Rob krijgt een oorkonde, die niet is ingelijst omdat het KWG op de kleintjes blijft letten. Hij bedankt iedereen in de zaal voor de goede samenwerking. Berrie krijgt een grote bos bloemen. Het is een bijzonder moment en daarom is niet helemaal duidelijk hoe het nu verder moet. Herman maakt aanstalten het podium te verlaten. "Herman, moet je niet nog een aankondiging doen?" vraagt organisator en mede-bestuurslid van het KWG Wieb Bosma, die trouwens ook Hermans buurman is op het CWI. "Eh, ja, dat klopt inderdaad. Het volgende Mathematisch Congres is het vijfzigste. Het zal worden gehouden in Delft, in samenwerking met Leiden. Het eenenvijftigste is daarna in Leiden, in samenwerking met Delft. Volgend jaar is er ook de Brouwerle-

zing, die dit keer zal worden gehouden over een onderwerp uit dynamische systemen." Herman maakt opnieuw aanstalten om het podium te verlaten. "Herman, moet je nu de vergadering sluiten?" Dat klopt inderdaad. En zo wordt de bijeenkomst van het KWG weer gesloten. De organisator komt nu zelf het podium op en kondigt aan het NMC te gaan sluiten via een speech van zeven pagina's. "Het antwoord op 11×13 is overigens 5", klinkt er vanaf de eerste rij. "Ik had dat moeten weten want het antwoord is altijd 5." Met deze toepasselijke woorden komt er een eind aan een gedenkwaardig NMC, waarna iedereen zich stort op de borrel in de Zuidstraat.

Naschrift

Conways logaritme leeft in het deellichaam $F_{16} = \{0, 1, \dots, 15\}$, waarin $F_{16}^* = \{1, 2, \dots, 15\}$ een cyclische multiplicatieve groep vormt met voortbrenger 4. De afbeelding $\exp(x) = 4^x$ geeft een permutatie van F_{16}^* die, schijnbaar toevallig, bestaat uit een cykel van lengte 15:

0 1 4 5 2 6 8 7 11 12 13 9 10 3 14 15

Elk getal in deze cykel staat tussen zijn logaritme en zijn exponent. Conway heeft dit uit zijn hoofd geleerd via een 'getallenmelodie' door de rij te verdelen in blokken van lengtes 5, 3, 5, 3. Vermenigvuldigen van getallen onder de 16 wordt nu het optellen van de logaritmen modulo 15. Conway verklapte dit voor het congres al aan Hendrik Lenstra. Toen hij de lezing begon met "KEEP YOUR BIG MOUTH SHUT", noemde hij daarbij ook expliciet dat Hendrik Lenstra jr. (of sr., daar wilde hij vanaf wezen) zijn mond moest houden. ←

Dankwoord

Met dank aan Cor Kraaikamp en William Moore voor de foto's en Wieb Bosma en Hendrik Lenstra voor de deskundige hulp.



Rob Tijdeman ontvangt de oorkonde behorende bij het erelidmaatschap van het KWG uit handen van Herman te Riele