

Henk Broer

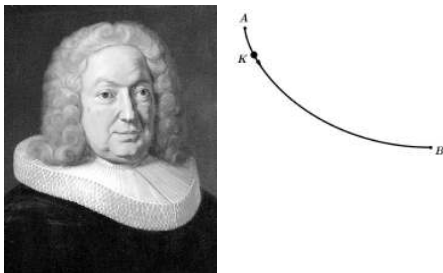
Johann Bernoulli Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
h.w.broer@rug.nl

Geschiedenis

Bernoulli's lichtstraal-oplossing van het brachistochrone probleem door de ogen van Hamilton

In 1696/97 initieerde Johann Bernoulli het brachistochrone probleem. Zoals vrij algemeen bekend is, wordt dit probleem opgelost door de cycloïde. In dit artikel geeft Henk Broer een overzicht van dit brachistochrone probleem. Hij volgt Bernoulli's optische oplossing die gebaseerd is op Fermats principe van de kortste tijd. Daarna herformuleert hij dit in de termen van Hamilton, zoals in diens eerste publicatie over dit onderwerp van 1828. Hierbij wordt steeds moedwillig een anachronistische stijl gehanteerd. Via Hamilton herontdekken we de cycloïde op een manier die doet denken aan hoe de wetten van Kepler uit Newtons mathematische principes volgen.

Het brachistochrone probleem werd het eerst geformuleerd door Johann Bernoulli, die zijn oplossing publiceerde in de *Acta Eruditorum* van 1697, zie [5]. Het probleem betreft de beweging van een puntmassa in een verticaal vlak onder invloed van de (constante) zwaartekracht, en de vraag is langs welk pad deze beweging de minste tijd kost (Grieks: *brachistos* = kort, *chronos* = tijd). Het helpt daarbij te denken aan een draadprofiel waarlangs een kraal wrijvingsloos kan glijden en de vraag is dan langs welk profiel de snelste afdaling plaatsvindt, zie Figuur 1. Bernoulli loste dit probleem op door middel van een lichtstraal



Figuur 1 Johann Bernoulli (1667–1748) en 'zijn' brachistochrone probleem. Het probleem is een draadprofiel te vinden waarlangs de kraal K van A naar B glijdt in de kortst mogelijke tijd. De wrijvingsloze beweging speelt zich af in een constant verticaal zwaartekrachtsveld.

die immers, volgens het principe van Fermat, een pad van de kortste tijd moet volgen. Zoals we hieronder zullen zien, kan op deze manier een fraai bewijs worden gegeven van het feit dat de brachistochrone kromme een cycloïde is.

Het brachistochrone probleem vormt een belangrijke aanzet tot de variatierekening, die gedurende de achttiende eeuw verder werd ontwikkeld door, onder meer, Euler en Lagrange [12, 23]. In de negentiende eeuw was het Hamilton die deze benadering vervolmaakte in wat later te boek stond als de canonieke theorie en ook als de Hamilton–Jacobi-theorie. Interessant genoeg was Hamiltons eerste publicatie in deze richting [17] gewijd aan geometrische optica, enkele jaren later gevolgd door een discussie “on a general method in dynamics” [18–19]; zie ook Jacobi [41].

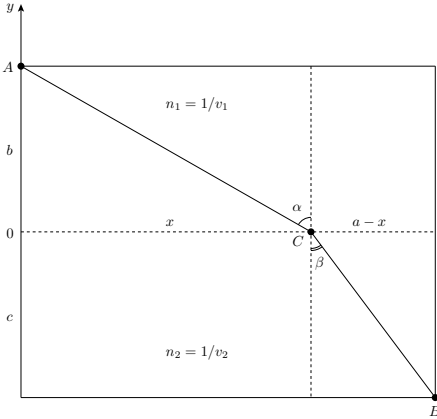
Wij zullen deze ontwikkeling illustreren door het brachistochrone probleem zowel volgens Fermat als volgens Hamilton te belichten. Door Hamiltons ideeën toe te passen herontdekken we de cycloïde op een manier die herinnert aan hoe Newtons ‘principia’, toegepast op de dynamica van een puntmassa in een centraal krachtveld, leiden tot de

wetten van Kepler [3]. Hoofdzakelijk om redenen van toegankelijkheid is dit artikel een exercitie in anachronisme, waarbij alles wordt uitgewerkt in ‘moderne’ termen. Hierin spelen behoudswetten een belangrijke rol. De inhoud vormt een deel van een boek [9] dat hoofdzakelijk handelt over geometrische optica van de atmosfeer. Er is een overvloed aan materiaal ter verdere lezing, waarbij zeker het werk van Carathéodory [10] genoemd moet worden. Voor een meer recente referentie zie Leonhardt en Philbin [28], vergelijk ook [35]. Voor achtergrond aangaande geometrische optica en de inbedding daarvan in golfoptica, zie onder meer Feynman, Leighton en Sands [13] of [4, 16].

Bernoulli's lichtstraal-oplossing

De vondst van Johann Bernoulli was optische ideeën te gebruiken in de mechanische context van een glijdende kraal. In het bijzonder betreft dit het principe van Fermat dat zegt dat lichtstralen paden van de kortste tijd volgen. We zullen een vlak optisch medium beschouwen, om precies te zijn een verticaal vlak. Om de gedachten verder te bepalen kiezen we hierin cartesische coördinaten x (horizontaal) en y (verticaal). Vergelijk Figuur 2.

Twee eigenschappen moeten hier worden onderscheiden. De eerste hiervan is *isotropie*, hetgeen betekent dat de lichtsnelheid in ieder punt van het medium onafhankelijk is van de richting. Dit maakt het mogelijk een puntsgewijze, scalaire voortplantingsnelheid $v = v(x, y)$ te definiëren. De tweede, sterkere eigenschap is *homogeniteit* die behelst dat deze snelheid constant is, dat



Figuur 2 Fermats principe impliceert de brekingswet van Snellius.

wil zeggen, onafhankelijk van het punt (x, y) . Fermats principe van de kortste tijd betekent dat in een homogeen medium de lichtstralen rechte lijnen zijn, die met constante snelheid v worden doorlopen. Het is handig ook de *brekingsindex* $n = c/v$ te beschouwen, waarbij c de lichtsnelheid *in vacuo* is. Door een geschikte eenhedenkeus mogen we aannemen dat $c = 1$.

Laat ons vervolgens het geval beschouwen waarin het vlakke medium bestaat uit twee lagen, gescheiden door een horizontale lijn, zeg, gegeven door de vergelijking $y = 0$ als in Figuur 2. We nemen aan dat de beide lagen afzonderlijk homogeen zijn, met constante voortplantingssnelheden v_1 in het bovenhalfvlak $y > 0$ en v_2 in het benedenhalfvlak $y < 0$. Daarom zijn in beide halfvlakken de lichtstralen rechte lijnen die met de aangegeven snelheden worden doorlopen, en de vraag is wat er gebeurt op de gemeenschappelijke rand $y = 0$.

Om preciezer te zijn beschouwen we twee punten A en B , waarbij A in het bovenhalfvlak $y > 0$ ligt. Daarbij vragen we ons af hoe een lichtstraal van A naar B gaat, waarbij deze passeert door een punt C op de rand $y = 0$. Het punt C moet gekozen worden zodanig dat het principe van Fermat geldt. Als we de gevallen onderscheiden waar B ook in het bovenhalfvlak $y > 0$ of in het benedenhalfvlak $y < 0$ ligt, vinden we zo de bekende reflectie- of kaatsingswet (Hero van Alexandria) respectievelijk refractie- of brekingswet (Willebrord Snell) terug.

Bewijzen van deze wetten uit het principe van Fermat zouden heden ten dage gemakkelijk onderdeel kunnen zijn voor de bovenbouw van het voortgezet onderwijs. Hieronder zullen we het geval van refractie gedetailleerd bespreken; dit betreft dus de wet van Snellius. Hierin volgen we grotendeels het bewijs van Leibniz [27]; zie voor meer details ook [9].

Als $n_1 = 1/v_1$ en $n_2 = 1/v_2$ de brekingsindices zijn in het boven-, respectievelijk het benedenhalfvlak, dan luidt de wet van Snellius als volgt. Het punt C op de wederzijdse rand $y = 0$ moet zo gekozen dat $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$, waarbij α en β de scherpe hoeken zijn die de lichtstraal maakt met de y -richting, zie opnieuw Figuur 2.

Bernoulli gebruikt deze ideeën door een isotroop medium met een continu brekingsindex-profiel $n = n(y)$ te discretiseren in een eindig aantal homogene lagen, zie Figuur 3. Daarna laat hij het aantal lagen naar ∞ gaan en daarbij de dikte van de lagen naar 0. Dergelijke vormen van infinitesimaal denken werden ook beoefend door Newton en Leibniz.

Binnen elke laag is de lichtstraal een rechte lijn en op de begrenzing geldt steeds de wet van Snellius. Voor het brachistochrone probleem is dan de vraag die nog rest hoe het brekingsindex-profiel $n = n(y)$ precies gekozen moet worden. Hier komt de mechanica weer om de hoek kijken, waarbij de lichtstraal juist gelijk is aan de baan van de vallende kraal in een constant verticaal zwaartekrachtsveld. Als $v = v(y)$ de bijbehorende valsnelheid is, kiezen we dus $n(y) = 1/v(y)$.

Fermats principe en de wet van Snellius

In deze sectie wordt een eenvoudig bewijs gegeven van de wet van Snellius uit het principe van Fermat, daarbij refererend aan Figuur 2. Gegeven zijn de punten A , met $y > 0$, en B , met $y < 0$, en we moeten het punt C op de grenslijn $y = 0$ vinden zodat som van de tijden t_{AC} en t_{CB} voor een lichtstraal om van

A naar B via C te reizen, optimaal of extremaal is.

Stelling 1 (Fermat en Snellius). *Als de halfvlakken $y > 0$ en $y < 0$ beide homogeen zijn, dan is de totale reistijd langs het pad ACB optimaal dan en slechts dan als de wet van Snellius,*

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta, \tag{1}$$

geldt.

Bewijs. Laat $x = x_C$ de positie van C aangeven op de lijn $y = 0$ die de beide lagen scheidt. Laat t_{AC} de tijd zijn die nodig is om van A naar C te reizen en evenzo t_{CB} de tijd om van C naar B te reizen. We moeten dan $t_{AC} + t_{CB}$ optimaliseren. Gebruikmakend van het feit dat $|A - C| = t_{AC} \times v_1$ en dat $v_1 = 1/n_1$, geeft dat

$$t_{AC} = n_1 |A - C|$$

en, analoog,

$$t_{CB} = n_2 |C - B|,$$

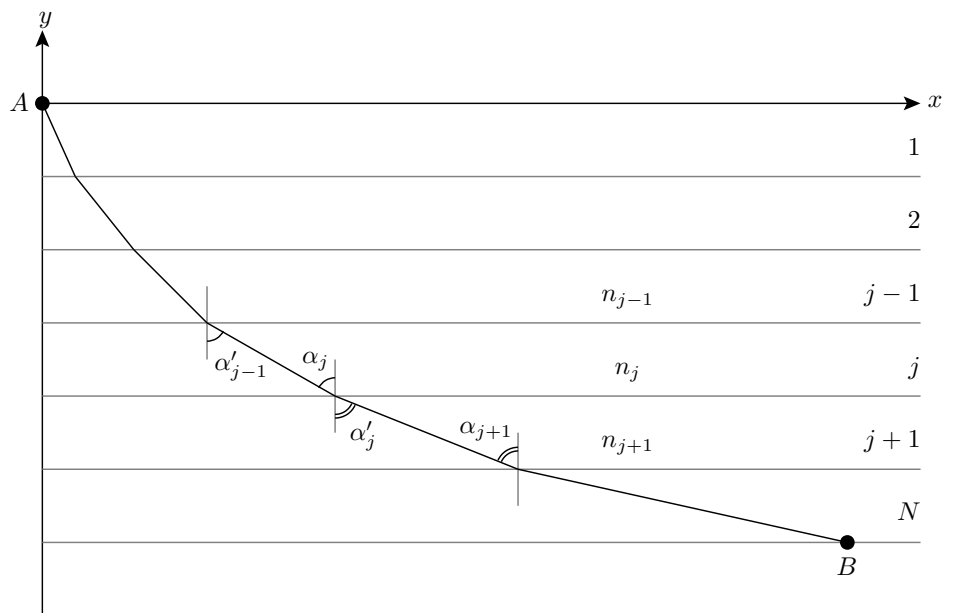
waarin $|\ - |$ de euclidische metriek aangeeft. Via de stelling van Pythagoras weten we dat

$$|A - C| = \sqrt{x^2 + b^2}$$

en

$$|C - B| = \sqrt{(a - x)^2 + c^2}.$$

Differentiëren van t_{AC} en t_{CB} met betrekking



Figuur 3 Bernoulli's idee: de lichtstraal-oplossing vormt een gebroken rechte lijn, waarbij op de begrenzingen de wet van Snellius geldt. De brekingsindices $n_j, j=1,2,\dots,N$, worden bepaald door de valsnelheid van de kraal in een constant zwaartekrachtsveld.

tot x geeft nu

$$\frac{d}{dx} t_{AC}(x) = \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + b^2}} = n_1 \sin \alpha$$

$$\frac{d}{dx} t_{AC}(x) = -\frac{n_2(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + c^2}} = -n_2 \sin \beta.$$

We concluderen dat

$$\frac{d}{dx} (t_{AC} + t_{CB})(x) = 0 \Leftrightarrow n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta,$$

hetgeen te bewijzen was. □

Opmerkingen.

- De wet van Snellius als een min of meer experimenteel feit was al in de klassieke oudheid bekend ...
- Uit de tweede afgeleiden van $t_{AC}(x)$ en $t_{CB}(x)$ volgt dat het optimum zelfs een minimum is. Optimale oplossingen heten in veel teksten ook wel *stationair*.
- Als de grens tussen de beide media een gladde kromme is, zijn dezelfde beschouwingen van toepassing, waarbij de hoeken α en β gemeten worden met betrekking tot de normaal op de raaklijn in C . Hier geldt de minimaliteit van de reistijd echter alleen lokaal. Globaal kunnen er caustieken optreden [4, 16, 33].

We kijken nu naar Bernoulli's medium met meer lagen, refererend aan Figuur 3. Dit is een variatie op Stelling 2, waarbij nu N parallelle homogene horizontale lagen worden beschouwd, gescheiden door rechte lijnen; daarbij heeft laag j brekingsindex n_j , $j = 1, 2, \dots, N$.

Corollarium 1 (Snellius en Bernoulli). *In de opzet met meer homogene lagen is de totale reistijd langs de gebroken rechte lijn tussen A en B optimaal dan en slechts dan als de grootheid*

$$n_j \sin \alpha_j, \tag{2}$$

$j = 1, 2, \dots, N$, constant is (dat wil zeggen, onafhankelijk van j).

Bewijs. We passen de zelfde argumentatie toe als in het bewijs van Stelling 1, waarbij een gebroken rechte lijn zodanig wordt doorlopen dat in laag j de voortplantingssnelheid constant gelijk is aan $v_j = 1/n_j$, $j = 1, 2, \dots, N$. Op de begrenzings hebben we verder volgens de wet van Snellius,

$$n_j \sin \alpha_j = n_{j+1} \sin \alpha'_{j+1},$$

voor $j = 1, 2, \dots, N$. Inspectie van opeenvol-

gende begrenzings leert ons met enige euclidische meetkunde dat

$$\alpha'_j = \alpha_{j+1},$$

$j = 1, 2, \dots, N - 1$. Hieruit volgt dat

$$n_j \sin \alpha_j = n_{j+1} \sin \alpha_{j+1},$$

voor $j = 1, 2, \dots, N - 1$. Hiermee is het corollarium bewezen. □

Opmerkingen.

- Merk op dat de conclusie van Corollarium 1 het formaat van een behoudswet heeft.
- Neem nu aan dat het medium isotroop is met een continu brekingsindex-profiel $n = n(y)$. We discretiseren als in Corollarium 1 en nemen de limiet voor $N \rightarrow \infty$, waarbij de dikte van de laagjes naar 0 nadert. Parametriseren we het hele pad gemakshalve even met y , dan gaat de discrete behoudswet uit Corollarium 1 over in de bewering dat de grootheid

$$n(y) \sin \alpha(y) \tag{3}$$

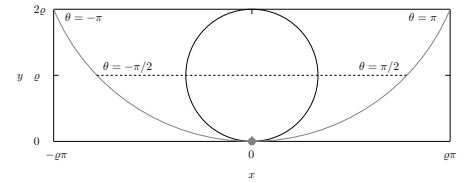
behouden wordt langs het gehele pad. Hierbij is α de hoek die de raaklijn aan het pad maakt met de y -richting. We zullen deze hoek aanduiden met de naam *inclinatie*.

Bernoulli's oplossing voltooid. Opgemerkt zij dat voor bovenstaande conclusie dat $n(y) \sin \alpha(y)$ in (3) een behouden grootheid is, het brekingsindex-profiel $n = n(y)$ nog geheel vrij te kiezen is. Zoals eerder gezegd, wordt bij de oplossing van het brachistochrone probleem de lichtstraal geïdentificeerd met de baan van de vallende kraal. Dan is de voortplantingssnelheid van het licht gelijk aan de valsnelheid van de kraal en we kiezen dus $n(y) = 1/v(y)$ waarbij $v = v(y)$ deze valsnelheid is.

Om $v(y)$ dan vast te leggen merken we op dat de energie

$$\frac{1}{2} m(v(y))^2 + mgy \tag{4}$$

van de valbeweging eveneens een behouden grootheid is, vergelijk [3, 14]. Hierin is m de massa van de kraal en g de constante versnelling van de zwaartekracht. Om precies te zijn: een gegeven waarde $M = \frac{1}{2} m(v(y))^2 + mgy$ van (4) legt deze snelheid $v = v(y)$ volledig vast.



Figuur 4 Cycloïde met rolhoek θ en straal ρ .

We zullen de cycloïdale vorm hieronder afleiden uit de behoudswetten gerelateerd aan de grootheden (3) en (4). Het blijkt handig te zijn de inclinatie α als parameter te gebruiken en te zoeken naar een draadprofiel $(x, y) = (x(\alpha), y(\alpha))$.

Stelling 2 (De cycloïde als de brachistochrone kromme). *Laten $S = n(y) \sin \alpha(y)$ en $M = \frac{1}{2} mv^2 + mgy$ de waarden zijn van de behouden grootheden (3) en (4). Dan heeft de brachistochrone kromme de vorm*

$$x(\alpha) = x_0 - \frac{1}{4S^2 g} (2\alpha - \sin(2\alpha)), \tag{5}$$

$$y(\alpha) = y_0 + \frac{1}{4S^2 g} \cos(2\alpha),$$

waarbij α een reële parameter is.

Dit is een cycloïde met straal $1/(4S^2 g)$ en rolhoek 2α ; voor deze terminologie zij verwezen naar enige toelichting hierna, in het bijzonder ook de Figuren 4 en 5.

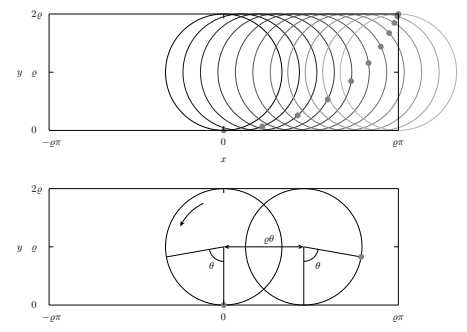
Berekening van de cycloïdale oplossing. Ons bewijs van Stelling 2 komt ten slotte neer op nog enkele rechtstreekse berekeningen.

Lemma 1. *Beschouw de functie $v = v(y)$ als gegeven door (4) en schrijf $v' = dv/dy$. Dan geldt zowel*

$$v'(y) = -\frac{g}{v(y)} \tag{6}$$

als

$$\cos \alpha = Sv'(y) \frac{dy}{d\alpha}. \tag{7}$$



Figuur 5 Parametrisatie van de cycloïde.

Bewijs. Differentieer de uitdrukking (4) naar y en de uitdrukking (3) naar α , gebruikend dat $v(y) = 1/n(y)$. □

Bewijs van de stelling. Toepassing van Lemma 1 geeft dat

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\alpha} &= \frac{1}{Sv'(y)} \cos \alpha \\ &= -\frac{v(y)}{Sg} \cos \alpha \\ &= -\frac{1}{2S^2g} \sin(2\alpha), \end{aligned} \tag{8}$$

waarbij het laatste gelijkteken berust op (3). Met soortgelijke argumenten vinden we verder

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\alpha} &= \tan \alpha \frac{dy}{d\alpha} \\ &= -\frac{v(y)}{Sg} \sin \alpha \\ &= -\frac{1}{2S^2g} (1 - \cos(2\alpha)) \end{aligned} \tag{9}$$

en integratie van (8) en (9) levert het gewenste resultaat. □

Opmerkingen.

- De waarde van de energie M is niet direct zichtbaar in de oplossing (5), maar in de integratieconstante y_0 komt deze informatie terug: $M = \frac{1}{2}m(v(y_0))^2 + mgy_0$. Als we aannemen dat $v(y_0) = 0$ dan begint de kraal in rust op hoogte y_0 . Dit betekent juist dat gedurende de hele beweging geldt $M = mgy_0$ en de bijbehorende valsnelheid bedraagt dan $v(y) = \sqrt{2g(y_0 - y)}$, waarbij $y \leq y_0$.
- Door een translatie op de y -as kunnen we zelfs bewerkstelligen dat $M = 0$. In dat geval wordt de valsnelheid gegeven door $v(y) = \sqrt{-2gy}$, voor $y \leq 0$. Dit soort overwegingen is tamelijk gebruikelijk in de klassieke mechanica.

Achtergrond bij de cycloïde

Voor de volledigheid volgt nu enige achtergrond bij de cycloïde, waarbij tevens ter sprake komt waarom deze kromme zowel *isochroon* als *tautochroon* is. Isochronie betekent dat de frequentie van oscillatie onafhankelijk is van de amplitudo. Hulpmiddel voor deze beweringen is het feit dat de bewegende kraal langs een cycloïde harmonische oscillaties uitvoert, hetgeen isochronie impliceert. Hiertoe gebruiken we Newtons tweede wet voor de bewegende kraal onder constante zwaartekracht, om zo de differentiaalvergelij-

king van een harmonische oscillator te krijgen. Dit idee gaat terug op Lagrange [22], zie ook [7-8].

Straal en rolhoek. De cycloïde ontstaat door een wiel te rollen langs een rechte lijn, daarbij de baan van een punt op de rand volgend. Laten we het wiel onderlangs een horizontale lijn rollen als in Figuur 5. Als het wiel straal ϱ heeft krijgen, we de parametrisatie

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \varrho(\theta + \sin \theta), \\ y(\theta) &= \varrho(1 - \cos \theta), \end{aligned} \tag{10}$$

$-\pi \leq \theta \leq \pi$. De parameter θ wordt in deze tekst *rolhoek* genoemd. Hierbij zijn de cartesische coördinaten (x, y) geschikt gekozen.

Christiaan Huygens. Voor details over de cycloïde zie onder meer [20] en de bijbehorende referenties. Vanzelfsprekend moet ook Huygens' *Horologium Oscillatorium* [21] genoemd worden waar de cycloïde werd ingevoerd als isochrone kromme en waar ook verder interessante meetkundige eigenschappen werden ontdekt, zoals te zien in Figuur 6. Voor details zie verder [1-2] en, onder meer, [9, 11].

Booglengte van de cycloïde. De booglengte van de cycloïde $s = s(\theta)$ kan worden uitgedrukt in elementaire functies. Om precies te zijn geldt volgens de stelling van Pythagoras voor een infinitesimaal stukje boog dat

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2} d\theta \\ &= \varrho\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos \theta} d\theta = 2\varrho \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) d\theta. \end{aligned}$$

Integratie geeft dan dat de booglengte (met teken) wordt gegeven door

$$s(\theta) = 4\varrho \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right). \tag{11}$$

Hieronder zullen we deze booglengte s gebruiken om de kromme te parametriseren.

Harmonische oscillaties: isochronie en tautochronie. Keren we terug naar de kraal die wrijvingsloos langs het cycloïdale draadprofiel glijdt onder invloed van de constante verticale zwaartekracht. We beschouwen dus de kromme (10) voor $-\pi \leq \theta \leq \pi$, zie Figuur 4.

Uit wat nu volgt zal blijken dat de kraal harmonische oscillaties uitvoert rond het mi-

nimum $s = 0$, waarbij de frequentie gelijk is aan $\omega = \sqrt{g/(4\varrho)}$. De potentiële energie van het zwaartekrachtsveld is immers evenredig met de verticale hoogte

$$y(\theta) = 2\varrho \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) = \frac{1}{8\varrho}(s(\theta))^2$$

van de kraal. In feite wordt deze gegeven door

$$V(s) = \frac{mg}{8\varrho}s^2. \tag{12}$$

Uit Newtons tweede wet volgt dan dat de glijdende kraal bewegingsvergelijking

$$m s'' = -\frac{dV}{ds}(s)$$

heeft, waarbij $s'' = d^2s/dt^2$. De bewegingsvergelijking krijgt nu de lineaire vorm

$$s'' = -\frac{g}{4\varrho}s. \tag{13}$$

Dit is een harmonische oscillator met frequentie $\omega = \sqrt{g/(4\varrho)}$, hetgeen blijkt uit het feit dat de algemene oplossing $s = s(t)$ gegeven wordt door

$$s(t) = A \cos(\omega t + \phi),$$

met

$$s(0) = A \cos \phi \text{ en } s'(0) = -A \sin \phi,$$

vergelijk bijvoorbeeld [3, 14] en vele teksten over gewone differentiaalvergelijkingen. In de laatste uitdrukking hangt de oscillatiefrequentie ω niet af van de amplitudo A , hetgeen precies uitdrukt dat de cycloïde *isochroon* is.

Nu is ook gemakkelijk te zien dat de kromme *tautochroon* is, hetgeen betekent dat de valtijd tot het minimum $s = 0$ dezelfde is vanuit elk punt van de kromme: inderdaad, zo'n valbeweging is immers niets anders dan een halve oscillatie.

Opmerkingen.

- Huygens' meetkundige mirakel is dat hij, zonder enig gebruik van differentiaal- en integraalrekening, aantoonde dat de cycloïde zijn eigen evoloot is, zie Figuur 6, rechts. Deze bewering betekent het volgende. Beschouw de bovenste kromme, ook een cycloïde en congruent met de onderste — dat is de zojuist gevonden isochrone kromme. We nemen een puntmas-



Figuur 6 Christiaan Huygens (1629–1695) geschilderd door Caspar Netscher, en een bladzijde uit *Horologium Oscillatorium* [21]

sa aan het eind van een koord dat bevestigd is aan de cusp van de bovenste cycloïde en van lengte 4ρ . Als het koord afwikkelt langs de bovenste cycloïde, daarbij loslatend volgens de raaklijn, dan beschrijft de puntmassa precies de onderste. Het slingerkoord maakt hiermee ook een rechte hoek, waardoor op deze laatste beweging alleen de zwaartekracht van invloed is. Daarom is deze beweging inderdaad isochroon. Zie voor meer details Huygens [21] en, bijvoorbeeld, [1–2, 8, 42].

- Bij de isochrone slingerklok werd dit idee geëffectueerd door bij het ophangpunt van de slinger cycloïde-vormige, metalen ‘wangen’ aan te brengen waarlangs het koord zich afwikkelt. Voorbeelden hiervan zijn te zien in verschillende Nederlandse musea. Dergelijke uurwerken werden wel gebruikt om aan boord van schepen de Greenwich-tijd voldoende nauwkeurig bij te kunnen houden, dit om de geografische lengte op zee te kunnen bepalen. Inderdaad, als ΔT het tijdsverschil in uren is tussen de lokale zonnetijd en de Greenwich-tijd,

dan bedraagt het lengteverschil met de Greenwich-meridiaan $15 \times \Delta T^0$. Hier wordt gebruikt dat $360 = 15 \times 24$. Opgemerkt mag dat deze methode niet goed werkte: het bleek dat het slingeren, stampen en dompen van het schip het slingeruurwerk, isochroon of niet, te zeer verstoorden om de Greenwich-tijd voldoende nauwkeurig bij te kunnen houden. Later gebruikte men hiervoor liever veeruurwerken. Vergelijk ook [36].

- Johann Bernoulli werkte in Groningen tussen 1695 en 1705. Hij publiceerde zijn optische oplossing van het brachistochrone probleem in de *Acta Eruditorum* van 1697. Vele tijdgenoten publiceerden daarna ook oplossingen. Een anonieme versie in de *Phil. Trans.* werd door Bernoulli onmiddellijk herkend als afkomstig van Newton; hij zegt “*ex ungue leonem cognavi*” (ik herkende de leeuw aan zijn klauw). Zie voor meer details [5, 15, 30].

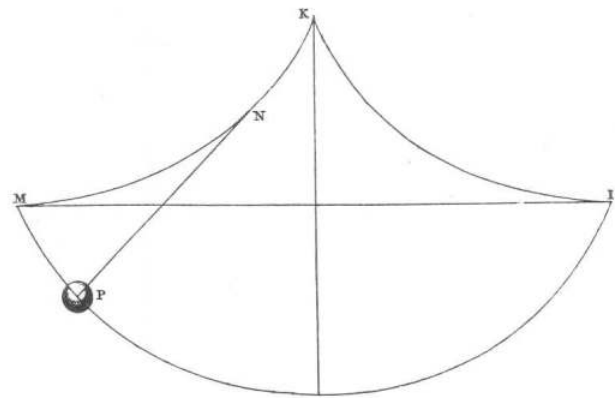
Benadering in de geest van Hamilton

Hamilton was een wonderkind dat fantasti-

fit ferrea cuspis DI, pauxillum ultra basin inferiorem prominens, atque ita ut circumferentia ejus exacte respondeat. DESCRPTIO HOROLOGII.

His ita se habentibus, si cylindrus secundum regulam AB volvatur, bracteolæ tantum FG crassitudine intercedente, eaque semper quantum potest extensa, describet cuspis I in subiecto tabulæ plano lineam curvam KI, quæ Cyclois vocatur. Circulus vero genitor erit CDE, cylindri adhibiti basis. Quod si jam laminam KL ad regulam AB applicuerimus; exarata primum in ea cycloidis portione KI, invertemus deinde

[Fig. 19.]



ipsam, & in superficie adverfa similem lineam KM, ab eodem puncto K egredientem, incidemus. Tum figuram MKI, accurate secundum lineas istas, efformabimus, cui figuræ lamellarum interstitium aptari oportet, inter quas perpendiculum suspenditur¹). Sufficiunt autem ad horologiorum usum portiones exiguæ arcuum KM, KI; reliquo flexu inutili futuro, ad quem perpendiculi filum accedere non potest.

Verum, ut mirabilis lineæ natura atque effectus plenius intelligantur, integras semicycloides KM, KI, alio schemate [Fig. 19] hic exprimere visum fuit, inter quas suspensum agitarumque Pendulum KNP, diametri circuli genitoris duplum, cujuscuque amplitudinis oscillationes, usque ad maximam omnium per arcum MPI, iisdem temporibus confecturum sit: atque ita, ut appensæ spheræ P centrum, in linea MPI, quæ & ipsa cyclois integra est, semper veretur. Quæ proprietas insignis, nescio an alii præter hanc lineæ data sit, ut nempe se ipsam sui evolutione describat²). Hæc autem

sche bijdragen heeft geleverd aan wiskunde, natuurkunde en astronomie. Onder andere introduceerde hij een transparant formalisme in de variatierekening, dat een diepe invloed heeft gehad op de ontwikkeling van de mathematische en theoretische fysica. Hij publiceerde hierover het eerst in de *optica* [17]. Wij volgen hem hier, als steeds op een anachronistische manier, zijn theorie illustrerend aan het brachistochrone probleem.

Opmerkingen.

- Tussen Bernoulli en Hamilton mogen zeker Euler [12] en Lagrange [23] niet onvermeld blijven, zijnde beiden ook sleutelfiguren in deze ontwikkelingen.
- Hamilton breidde later zijn optische werk [17] uit naar de beweging van deeltjes [18–19]. Het is goed hier op te merken dat lichtstralen vaak gezien worden als vrije deeltjes, dat wil zeggen, deeltjes waarop geen externe krachten werken.

Fermat en Hamilton: een herformulering

Voor een gegeven gladde geparametriseerde

kromme $\tau \mapsto q(\tau)$ in het vlak of in de ruimte geven we de snelheidsvector \dot{q} aan door $\dot{q} = dq/d\tau$. Als deze kromme een lichtstraal parametrizeert in een isotroop medium, dan is de brekingsindex $n(q)$ welgedefinieerd en met de kettingregel volgt

$$dt = n(q) \|\dot{q}\| d\tau, \tag{14}$$

waarin t de tijd voorstelt. Fermats principe (van de kortste tijd) zegt dat voor $\tau_1 < \tau_2$, waarbij $A = q(\tau_1)$ en $B = q(\tau_2)$ vast zijn, de integraal

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} n(q(\tau)) \|\dot{q}(\tau)\| d\tau$$

minimaal is (of tenminste optimaal) onder kleine variaties van de kromme. Omdat het verder niet handig is met vierkantswortels te moeten rekenen, optimaliseert men liever de integraal

$$\mathcal{I}(q) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{2} n^2(q(\tau)) \|\dot{q}(\tau)\|^2 d\tau, \tag{15}$$

wat lokaal op hetzelfde neerkomt. Vanaf nu zullen we steeds aannemen dat $n = n(q)$ op een gladde (differentieerbare) manier van q afhangt. De integrand van (15),

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} n^2(q) \|\dot{q}\|^2, \tag{16}$$

wordt de *Lagrangiaan* van dit optimaliseringsprobleem genoemd; het is tevens de (kinetische) energie van de onderhavige beweging. De herformulering van Fermats principe zegt dat lichtstralen de integraal (15) moet optimaliseren. Dit laatste staat ook bekend als het principe van Hamilton [17]. Hierbij zij meteen opgemerkt dat Hamiltons principe niet alleen de optica betreft, maar zich over vrijwel de gehele klassieke mechanica uitstrekt [18–19], vergelijk ook, bijvoorbeeld, [3, 6, 14].

Variatierekening, een samenvatting

We vatten kort een aantal centrale elementen samen uit de variatierekening. We doen dit in de vorm van een tweetal stellingen zonder bewijs. Deze zullen leiden tot Hamiltons formalisme via de Euler–Lagrange-vergelijkingen. Voor verdere details zij verwezen naar Arnold [3], waaruit gedurende deze expositie vrijelijk geciteerd wordt. We voegen hieraan toe dat dit geheel een diepe en bovendien zeer elegante wiskundige theorie behelst. In het verticale vlak dat dient als optisch me-

dium, schrijven we $q = (x, y)$. De dynamica van de lichtstralen vindt dan plaats in de 4-dimensionale toestandsruimte $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ met coördinaten $(q, \dot{q}) = ((x, y), (\dot{x}, \dot{y}))$. Hierin is voor elke positie $q \in \mathbb{R}^2$ de snelheid \dot{q} een raakvector die ligt in $\{q\} \times \mathbb{R}^2$: de raakvector \dot{q} grijpt aan in het punt q . Op deze manier worden, naast de posities q in het optische medium, in het algemeen de configuratieruimte geheten, ook de snelheden \dot{q} in beschouwing genomen. Het eerste niet-triviale resultaat van de theorie is het volgende.

Stelling 3 (Euler–Lagrange-vergelijkingen). *De kromme $\tau \mapsto (q(\tau), \dot{q}(\tau))$ voldoet aan de Euler–Lagrange-vergelijkingen*

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial L}{\partial x}, \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \frac{\partial L}{\partial y}, \end{aligned} \tag{17}$$

dan en slechts dan als de integraal \mathcal{I} in (15) optimaal is onder kleine variaties van de kromme q , waarbij de eindpunten $q(\tau_1)$ en $q(\tau_2)$ vastgehouden worden.

Analoog aan wat we zagen in het geval van de wet van Snellius, zie Stelling 1, geldt in deze optische opzet dat lokaal gesproken het optimum tevens een minimum is.

Opmerkingen.

– Om te illustreren hoe een en ander werkt geven we een korte indruk van de Euler–Lagrange-vergelijkingen (17) in onze optische setting waarbij $n = n(y)$.

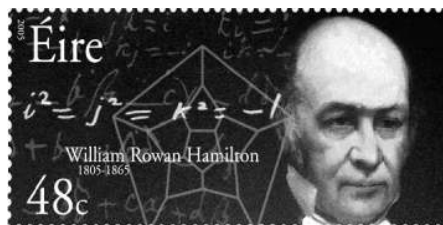
Bij het berekenen van de afgeleiden van de Lagrangiaan L moeten we eerst x, y, \dot{x} en \dot{y} als vier onafhankelijke variabelen opvatten. Dit leidt tot

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = n(y)n'(y) (x^2 + y^2)$$

en

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = n^2(y)\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = n^2(y)\dot{y}.$$

Hierin is $n' = dn/dy$.



Figuur 7 William Rowan Hamilton (1805–1865)

Substitutie van deze uitdrukkingen in (17) geeft een systeem van twee tweede-orde-differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (n^2(y)\dot{x}) &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} (n(y)n'(y) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)) &= n^2(y)\dot{y}, \end{aligned} \tag{18}$$

waarbij nu $\dot{x} = dx/d\tau$ en $\dot{y} = dy/d\tau$.

– Differentiatie naar τ in de vergelijkingen (18) leidt al snel tot halsbrekende berekeningen. De analyse zal hierna echter aanzienlijk vereenvoudigd worden door Hamiltons aanpak, waarbij de tweede-orde-differentiaalvergelijkingen beide op ingenuwe wijze vervangen worden door twee eerste-orde-vergelijkingen. Eén conclusie kan nu al getrokken worden uit de eerste vergelijking van (18), namelijk dat de uitdrukking $n^2(y)\dot{x}$ een behouden grootheid is. We komen hier dadelijk uitvoerig op terug.

Canonieke theorie

Eerst volgt nu een vertaling van de Euler–Lagrange-vergelijkingen (17) naar Hamiltons canonieke vergelijkingen. Hiertoe voeren we een transformatie

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ (q, \dot{q}) &\mapsto (q, p), \end{aligned} \tag{19}$$

uit, waarin de volgende definitie geldt:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) = n^2(q) \dot{q}.$$

Deze transformatie is genoemd naar Legendre. Ook voeren we de Hamiltoniaanse functie (kortweg Hamiltoniaan) $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die in de huidige optische opzet de vorm

$$\begin{aligned} H(q, p) &= (L \circ \mathcal{L}^{-1})(q, p) \\ &= L\left(q, \frac{p}{n^2(q)}\right) \\ &= \frac{1}{n^2(q)} \|p\|^2 \end{aligned} \tag{20}$$

krijgt. H is dus de (kinetische) energie uitgedrukt in de (q, p) -variabelen. Het tweede niet-triviale resultaat van de theorie luidt:

Stelling 4 (Hamiltons principe expliciet). *De lichtstralen, gedefinieerd door optimalisatie van de integraal (15) zijn de projecties van de*

oplossingen van het systeem

$$\begin{aligned}\dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j},\end{aligned}\quad (21)$$

$j = 1, 2$, van vier eerste-orde-differentiaalvergelijkingen op het configuratie-vlak $\mathbb{R}^2 = \{q\}$.

In deze compacte notatie is dus $q = (q_1, q_2)$ met $q_1 = x$ en $q_2 = y$. We zullen hieronder de volgende notatie gebruiken: $p_1 = n^2(q)\dot{x}$ en $p_2 = n^2(q)\dot{y}$. Verder volgt een concrete toepassing van Stelling 4 op het brachistochrone probleem.

Opmerkingen.

- Als eerder vermeld geldt Hamiltons principe in grote algemeenheid. Dit geldt eveneens voor het formaat (21), vergelijk nogmaals [3, 14], zie ook [13]. Zoals eerder gezegd heten de canonieke vergelijking (21) vaak Hamilton–Jacobi-vergelijkingen. Sporen van deze theorie zijn te vinden in de hele theoretische natuurkunde, de ingenieurswetenschappen, de econometrie, et cetera. Voor een recent overzicht zie De Lang [24–26] en voor het verband met optimal control zie verder, bijvoorbeeld, Kirk [29]. Deze uitbreidingen betreffen inmiddels ook partiële differentiaalvergelijkingen.
- Bovenstaande beschrijving heeft inmiddels een sterk meetkundig karakter gekregen, waarin, bijvoorbeeld, de Legendre transformatie (19) loopt van de raakbundel naar de co-raakbundel van de configuratieruimte, die dan een algemene variëteit mag zijn [3].
- De deterministische dynamica van (21) speelt zich hierbij geheel af in de toestandruimte $\{q, p\}$, in de co-raakbundel dus. De waargenomen paden van deeltjes of lichtstralen zijn dan projecties van deze dynamica op de configuratieruimte $\{q\}$.

Behoudswetten, symmetrie

Het algemene formaat (21) brengt al meteen energiebehoud met zich mee. Inderdaad geldt voor de evolutie van de functie H langs de integraalkromme dat

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \equiv 0,$$

waarbij de kettingregel gebruikt wordt. Dit betekent juist dat de energie H constant is gedurende de hele beweging, c.q., langs de evolu-

tie van (21). Met andere woorden, er geldt dat de energie H behouden wordt.

Translatie-symmetrie en nog een behoudswet. In de specifieke opzet van het brachistochrone probleem is de functie $n = n(q)$ niet afhankelijk van de horizontale coördinaat x ; we schrijven $n = n(y)$ als voorheen. Dan krijgt (20) de vorm

$$H(x, y, p_1, p_2) = \frac{1}{2n^2(y)}(p_1^2 + p_2^2), \quad (22)$$

en we concluderen dat ook de functie H onafhankelijk is van x . Dat betekent dat in het systeem (21) van differentiaalvergelijkingen de derde vergelijking de vorm

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x}(q, p) = 0$$

heeft, waaruit we concluderen dat $p_1 = n^2(y)\dot{x}$ een behouden grootheid is, de zogenaamde impuls van de beweging. Deze behoudswet ontmoetten we al in de Euler–Lagrange-setting, zie (18).

Opmerkingen.

- Deze openbaring van een behoudswet is een voorbeeld van een algemeen principe, genoemd naar Noether [32]. Dit principe zegt hoe een symmetrie kan leiden naar een behoudswet, vergelijk ook Arnold [3]. In dit geval is het de translatie-symmetrie in de x -richting die leidt tot behoud van impuls in deze richting. Klassiek gesproken heet een variabele zoals x ook wel *cyclisch*. We merken nog op dat behoud van energie in dit verband gerelateerd is aan tijds-onafhankelijkheid van de Hamiltoniaan: het feit dat het systeem autonoom is.
- Door combinatie van de beide behoudswetten vinden we ook de behouden grootheid S uit (3) terug. Om precies te zijn, leggen we energie en impuls vast als $H(q, p) = E$ en $p_1 = I$, dan volgt

$$\begin{aligned}\frac{I}{\sqrt{2E}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) &= n(y) \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ &= n(y) \sin \alpha(\dot{x}, \dot{y}) \quad (23) \\ &= S(y, \dot{x}, \dot{y}),\end{aligned}$$

vergelijk de Figuren 2 en 3.

Reductie van de symmetrie. De translatie-symmetrie in de horizontale richting kan gebruikt worden om het 4-dimensionale systeem als volgt naar twee dimensies te reduceren.

Stelling 5 (Reductie van de translatie-symmetrie). *Gegeven $p_1 = I$, dan zijn de projecties van de oplossingen van (21) op het (y, p_2) -vlak van de canoniek vergelijkingen met betrekking tot de Hamiltoniaan*

$$\begin{aligned}H_I(y, p_2) &= \frac{1}{2n^2(y)} p_2^2 + V_I(y) \\ \text{met } V_I(y) &= \frac{I^2}{2n^2(y)},\end{aligned}\quad (24)$$

waarbij

$$V_I(y) = \frac{I^2}{2n^2(y)}.$$

Dit betekent dat de (y, p_2) -coördinaten in (21) evolueren volgens

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial H_I}{\partial p_2}(y, p_2) = \frac{1}{n^2(y)} p_2, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H_I}{\partial y}(y, p_2) = -\frac{n'(y)}{n^3(y)} (I^2 + p_2^2).\end{aligned}\quad (25)$$

Dit zijn immers juist de tweede en vierde vergelijking van het canoniek stelsel (21), die door de translatie-symmetrie ontkoppelen van de beide andere vergelijkingen.

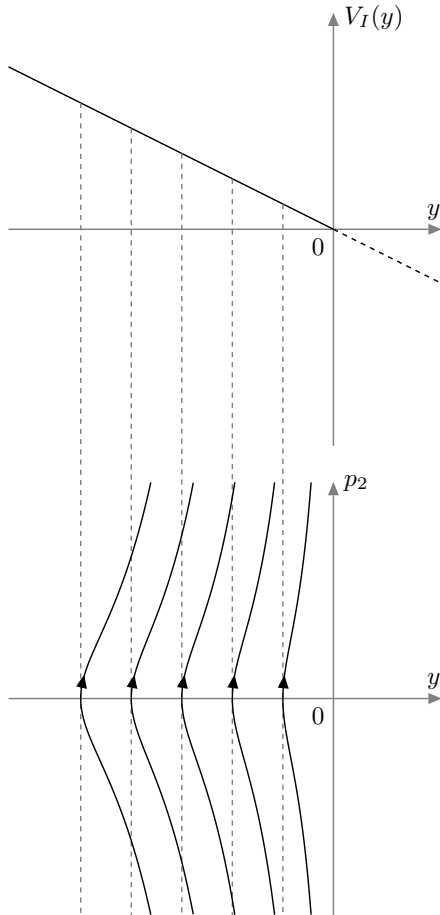
Opmerkingen.

- De functie V_I in (24) wordt vaak de *effectieve potentiaal* of de beweging genoemd. Voor het canonieke systeem (25) is de energie H_I een behouden grootheid en dus zijn de integraalkrommen van (25) juist de niveaalkrommen van de functie H_I .
- Zulke reductie-processen zijn welbekend in de conservatieve dynamica, denk hierbij bijvoorbeeld aan een puntmassa die beweegt in een centraal krachtveld waarbij de rotatie-symmetrie kan worden gereduceerd op een volledig analoge manier, gebruikmakend van Keplers perkenwet [3, 14].

Terug naar het brachistochrone probleem

Tot zover is de theorie nog tamelijk algemeen. In de brachistochrone context ontbreekt nog een preciese keus van het brekingsindexprofiel voor de beweging onder constante verticale zwaartekracht, vergelijk (4).

Het gereduceerde faseportret. Beschouw opnieuw de energie $\frac{1}{2}mv^2 + mgy$ in (4) van de vallende kraal onder constante zwaartekracht. Gemakshalve volgen we hier de opzet van een opmerking na Stelling 2, waarbij de kraal vanaf hoogte $y = 0$ met snelheid $v = 0$



Figuur 8 Gereduceerd faseportret van de brachistochrone lichtstraaldynamica dat de integraalkrommen van het gereduceerde systeem (28) toont. Deze krommen zijn juist de niveaokrommen van de gereduceerde Hamiltoniaan H_I .

zijn valbeweging begint. In dat geval geldt tijdens de beweging dat

$$\frac{1}{2}v^2(y) + gy = 0,$$

en de valsnelheid bedraagt $v(y) = \sqrt{-2gy}$. Hieruit volgt dat

$$n(y) = \sqrt{-\frac{1}{2gy}}, \quad (26)$$

waarbij $y < 0$. Dit geeft de gereduceerde Hamiltoniaan H_I uit (24) de expliciete vorm

$$H_I(y, p_2) = -\frac{1}{g} (p_2^2 + I^2),$$

hetgeen impliceert dat de niveaokromme met vergelijking $H_I(y, p_2) = E$ precies de grafiek is van

$$y = -\frac{1}{g} \left(\frac{E}{p_2^2 + I^2} \right) \quad (27)$$

als functie van p_2 . Deze bewerkingen leiden

rechtstreeks tot het gereduceerde faseportret van Figuur 8, vergelijk, bijvoorbeeld, [3]. In het bijzonder blijkt dat bij ieder niveau van de effectieve potentiaal V_I , voor de bijbehorende waarde van y , de niveaokromme van H_I door het punt $(y, 0)$ gaat.

Reconstructie van de volledige dynamica. Bovendien krijgt het gereduceerde systeem van differentiaalvergelijkingen (25) de vorm

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -2gy p_2, \\ \dot{p}_2 &= g(p_2^2 + I^2). \end{aligned} \quad (28)$$

In het gereduceerde faseportret van Figuur 8 worden de projecties van de mogelijke brachistochrone oplossingen op het (y, p_2) -vlak weergegeven. Hieruit zal de volledige dynamica in de 4-dimensionale toestandsruimte gereconstrueerd worden en daaruit hun projecties op het (x, y) -configuratievlak. Op die manier zullen we de cycloïden herontdekken als de corresponderende lichtstralen.

Allereerst verkrijgen we de τ -parametrisatie van het gereduceerde systeem als volgt. Leggen we de constanten $I \neq 0$ en E vast, dan leiden we uit (28) af dat

$$d\tau = \frac{dp_2}{g(p_2^2 + I^2)},$$

hetgeen leidt tot

$$\tau = \frac{1}{gI} \arctan\left(\frac{p_2}{I}\right).$$

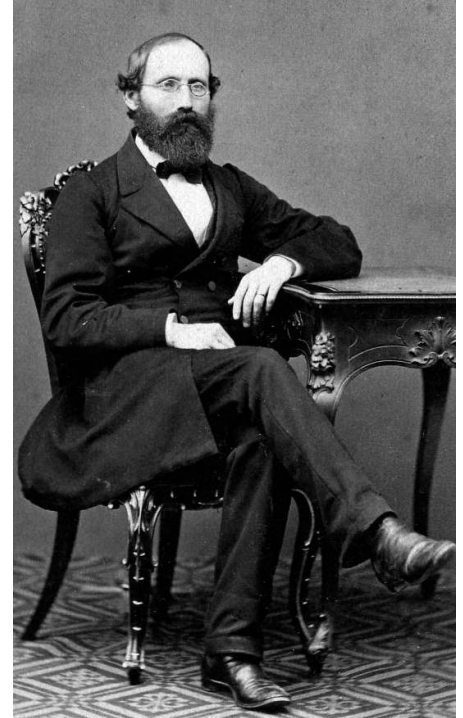
Alle integralen kunnen dus als volgt worden uitgedrukt in elementaire functies

$$\begin{aligned} p_2(\tau) &= I \tan(gI\tau) \quad \text{en} \\ y(\tau) &= -\frac{1}{g} \left(\frac{E}{I^2} \cos^2(gI\tau) \right), \end{aligned} \quad (29)$$

hetgeen inderdaad de τ -parametrisering van het gereduceerde systeem is. Merk op dat hier $p_2(0) = 0$ is genomen: voor $\tau = 0$ zitten we precies in het minimum van de functie (27).

De cycloïden herontdekt. Vanaf hier kan de gehele dynamica in de 4-dimensionale toestandsruimte worden gereconstrueerd. Zo volgt uit het feit dat $I = p_1 = n^2(y) \dot{x}$ dat

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{n^2(y)} I = -2Igy \\ &= \frac{2E}{I} \cos^2(gI\tau) = \frac{E}{I} (1 + \cos(2gI\tau)). \end{aligned}$$



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

En zo herontdekken we de cycloïden van (5),

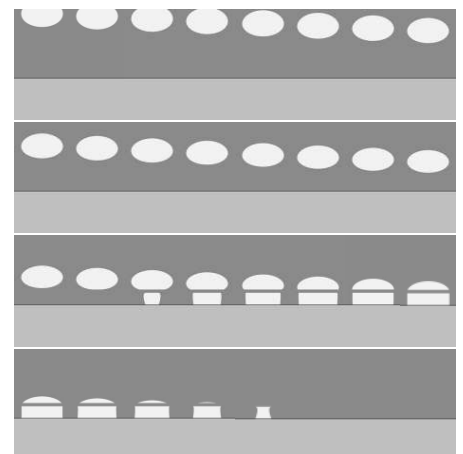
$$\begin{aligned} x(\tau) &= x_0 + \frac{E}{2gI^2} (2gI\tau + \sin(2gI\tau)), \\ y(\tau) &= -\frac{E}{2gI^2} (1 + \cos(2gI\tau)), \end{aligned} \quad (30)$$

daarbij nogmaals gebruikmakend van (29).

Vergelijking van de formules (5) en (30) geeft voor de straal ϱ van de cycloïden dat

$$\frac{1}{4S^2g} = \frac{E}{2gI^2},$$

hetgeen gelukkig klopt met (23). Interessant



Figuur 9 Blinde strook in de ondergaande zon



Foto: George Huitema

Het kunstwerk Brachistochroon van Henk Oving in de vijver van het Zernikecomplex van de Rijksuniversiteit Groningen is een eerbetoon aan Johann Bernoulli.

is verder de evenredigheid

$$gI\tau = \alpha, \quad (31)$$

tussen τ en de inclinatie α met de y -richting.

Scholium

Bovenstaande afleiding van de cycloïden (30) doet denken aan hoe Newtons mathematische principes de Keplerse kegelsnedenbanen van de beweging in het centraal krachtveld opleveren, vergelijk [3, 14]. Het is opmerkelijk te noemen dat veel van de berekeningen van Huygens, Newton en Bernoulli zo volledig vallen binnen het raamwerk van elementaire functies. Hierbij mag worden aangemerkt dat reeds bij de beweging van de mathematische slinger de tijdsparametrisering een elliptische integraal met zich meebrengt.

Een directe oplossing

Heden ten dage is het brachistochrone probleem een opgave in cursussen variatierekening, waar men meestal zoekt naar een kromme van de vorm $y = y(x)$. De booglengte is dan $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx$, waarin $y' = dy/dx$. Voor de valsnelheid ter hoogte y nemen we wederom $ds/dt = \sqrt{-2gy}$, zie opnieuw de opmerking na Stel-

ling 3. Dit geeft

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{-2gy}} dx,$$

en leidt dus naar een variatieprobleem met Lagrangiaan

$$L(y, y') = \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{-2gy}}.$$

Uit de Euler–Lagrange-vergelijkingen kan men nu de differentiaalvergelijking

$$(1 + (y')^2) y = \text{constant}$$

afleiden, die na substitutie van een geparametriseerde oplossing $(x, y) = (x(\theta), y(\theta))$ als voorheen, het cycloïdale antwoord geeft. Vergelijk ook, onder meer, Bottema [6].

Lichtstralen als geodeten

Keren we terug naar formule (14), $dt = n(q)\|\dot{q}\| d\tau$, die de correspondentie aangeeft tussen *tijd* en *afstand*. Deze gedachte kan verder uitgewerkt worden door een Riemannse metriek G in te voeren; dat is een q -afhankelijk inwendig product op de raakruim-

te $\{q\} \times \mathbb{R}^2 = \{\dot{q}\}$. Inderdaad definiëren we

$$G_q(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = n^2(q)\langle \dot{q}_1, \dot{q}_2 \rangle, \quad (32)$$

waar de laatste haakjes het standaard (euclidisch) inwendig product aangeven. Indachtig het feit dat

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} G_q(\dot{q}, \dot{q}),$$

zie (16), mogen we concluderen we dat de lichtstralen verkregen door het variatieprincipe met Lagrangiaan L de *geodeten* blijken te zijn van de Riemannse metriek G ; zie voor algemene referentie over differentiaalmeetkunde [11, 34, 37]. Dit levert een moderne ingang tot de geometrische optica [4, 16].

En zo zijn Bernoulli's cycloïden ten slotte geodeten in de translatie-invariante Riemannse metriek (32), bepaald door het brekingsindexprofiel (26). Het is ook alleen in deze omstandigheden dat de betrekking (31) tussen de geodetische parameter τ en de inclinatie α kan gelden.

Atmosferische optica

In de geometrische optica van de atmosfeer kan het optisch medium een verticaal vlak

zijn, bepaald door het oog van de waarnemer, het centrum van de aarde en een optisch object zoals het centrum van de zon. Aannemend dat het medium isotroop is, is ook hier een brekingsindex gedefinieerd. Een vereenvoudigende onderstelling is verder dat de brekingsindex n alleen afhangt van de afstand r tot het centrum van de aarde, in welk geval we schrijven $n = n(r)$. Dit introduceert een rotatie-symmetrie die via het principe van Noether opnieuw een comfortabele behouds-

wet geeft, namelijk $C = rn(r) \sin \alpha$. Hierbij is α de inclinatie met de radiële richting en is de bijbehorende poolhoek de cyclische variabele. Een theorie, zeer analoog aan die hierboven ontwikkeld, geldt ook in deze omstandigheden, vergelijk [3, 9].

Voor veel keuzen van het brekingsindexprofiel $n = n(r)$ ontstaat er rond de horizontale kijkrichting een zogenaamde *Wegener sector*, zie [39–40]. Zo'n sector kan aanleiding geven tot een blinde strook in de zon, zoals te

zien in Figuur 9, vergelijk ook Minnaert [31]. Ook kunnen bepaalde luchtspiegelingen op deze manier begrepen worden. Voor meer details en referenties zij verwezen naar [9].

Dankwoord

Ik spreek mijn dank uit aan Marja Bos, Aernout van Enter, Konstantinos Efstathiou, Wout de Goede, George Huitema, Hildeberto Jardón-Kojakhmetov, Jan van Maanen, Henk de Snoo, Floris Takens, Gert Vegter, Ferdinand Verhulst, Holger Waalkens en Florian Wagener voor inspirerende discussies tijdens de voorbereiding.

Referenties

- J.M. Aarts, *Horologium Oscillatorium &c*, in voorbereiding.
- J.M. Aarts en H.W. Broer, Schoolmeetkunde in het Horologium Oscillatorium van Christiaan Huygens, Preprint Rijksuniversiteit Groningen, 2010.
- V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, GTM 60, Springer, 1989.
- V.I. Arnold, *Singularities of Caustics and Wavefronts*, Mathematics and its Applications (Soviet Series) 62, Kluwer Academic Publishers 1990.
- J. Bernoulli, *Opera Johannis Bernoulli*, G. Cramer (ed.), 4 delen, Genève, 1742.
- O. Bottema, Variatierekening, in: L. Kuipers en R. Timman (eds.), *Handboek der Wiskunde 2*, Klassieke wiskunde – Onderwerpen uit de analyse. Scheltema & Holkema, 1970.
- O. Bottema, *Theoretische Mechanica*, Epsilon Uitgaven 3, 1985.
- H.W. Broer, Huygens' isochrone slinger, *Euclides* 70(4) (1995), 110–117.
- H.W. Broer, *Hemelsverschijnselen nabij de horizon, met Minnaert en Wegener, Bernoulli en Hamilton*, Epsilon Uitgaven, te verschijnen in 2013.
- C. Carathéodory, *Gesammelte Mathematische Schriften*, Vols. I–IV, München, 1954–1957 (Beck) I–V.
- M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Englewood Cliffs, 1976.
- L. Euler, *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, 72 vols., Bern, 1911–1975.
- R.P. Feynman, R.B. Leighton en M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 1, Addison-Wesley, 1963, 1964 en 1965.
- H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 1950, 1980.
- H.H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 5, Springer, 1980.
- V. Guillemin en S. Sternberg, *Geometric Asymptotics*, Mathematical Surveys 14, American Mathematical Society, 1977.
- W.R. Hamilton, Theory of systems of rays. *Trans. Roy. Irish Acad.* 15 (1828), 69–174.
- W.R. Hamilton, On a general method in dynamics, *Phil. Trans. Roy. Soc.* 124 (1834), 247–308.
- W.R. Hamilton, Second essay on a general method in dynamics. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 125 (1835), 95–144.
- K.P. Hart, De Cycloïde. *Pythagoras* 39(4), 2000.
- Chr. Huygens, *Horologium Oscillatorium*, in: *Œuvres Complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société Hollandaise des Sciences* 16, Martinus Nijhoff, The Hague, 1929, Vol. 5, 241–262; Vol. 17, 156–189.
- J.L. Lagrange, *Mécanique Analytique*, 4th ed., 2 vols., Gauthier-Villars et fils, Paris, 1888–1989.
- J.L. Lagrange, *Œuvres*, A. Serret en G. Darboux, eds., Paris, 1867–1892.
- H. de Lang, Het principe van de minste actie: I. Klassiek, *Nederl. Tijdschr. voor Natuurkunde* 78(9) (2012), 362–366.
- H. de Lang, Het principe van de minste actie: II. Quantummechanisch, *Nederl. Tijdschr. voor Natuurkunde* 78(10) (2012), 390–393.
- H. de Lang, Het principe van de minste actie: III. Van padintegraal tot Feynmandiagrammen, *Nederl. Tijdschr. voor Natuurkunde* 78(11) (2012), 420–425.
- G.W. Leibniz, Nova methodus pro maximis et minimis, *Acta Eruditorum* 1684, in: D.J. Struik, *A source book in mathematics 1200–1800*. Harvard University Press, 1969, 271–281.
- U. Leonhardt en Th. Philbin, *Geometry and Light: the science of invisibility*, Dover, 2010.
- D.E. Kirk, *Optimal Control Theory: an Introduction*, Dover, 2004.
- J.A. van Maanen, *Een Complexe Grootheid, leven en werk van Johann Bernoulli 1667–1748*, Epsilon Uitgaven 34, 1995.
- M.G.J. Minnaert, *De Natuurkunde van 't vrije veld*, Vol. 1, Vijfde Editie, ThiemeMeulenhoff, 1996; English translation: *The Nature of Light & Colour in the Open Air*, Dover, 1954.
- E. Noether, Invariante Variationsprobleme, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse* (1918), 235–257.
- T. Poston en I. Stewart, *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman, 1978.
- G.F.B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Habilitationsschrift, 1854), *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13, (1868).
- D.G. Shafer, The brachistochrone: historical gateway to the calculus of variations, *MATerials MATematics* 5(14), 2007.
- D. Sobel, *Longitude*, Walker, 1995, 2005.
- M. Spivak, *Differential Geometry*, Vols. I, II en III, Publish or Perish, 1970.
- D.J. Struik (ed.), *A Source Book in Mathematics 1200–1800*, Harvard University Press, 1969; Princeton University Press, 1986.
- A.L. Wegener, Über die Ursache der Zerrbilder bei Sonnenuntergängen, *Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre* Strasbourg, 4 (1912), 26–34.
- A.L. Wegener, Optik der Atmosphäre, in: Müller-Pouillet, *Lehrbuch der Physik*, 2nd ed., Viewig & Sohn, Braunschweig, (1928), 266–289.
- K. Weierstra (ed.), *C.G.J. Jacobi's gesammelte Werke*, Berlin, 1881–1891.
- J.G. Yoder, *Unrolling Time*, Cambridge University Press, 1988.