Wim Groen
Kortenhoef
we-groen@casema.nl

Ed de Moor
Amsterdam
e.w.a.demoor@planet.nl

Geschiedenis

Meetkunde, stiefkind van het wiskundeonderwijs (1970–1990)

Na twee eerdere artikelen in dit blad over meetkundeonderwijs van vóór de invoering van de Mammoetwet (juninummer 2012) en over kijkmeetkunde (decembernummer 2012), is dit het derde deel van een serie over de geschiedenis van het meetkundeonderwijs. Wim Groen en Ed de Moor beschrijven in dit deel de invloed van de moderniseringsplannen van de vroege jaren zestig. In die plannen wilde men het wiskundeonderwijs zo hervormen dat het beter aansloot bij de ontwikkelingen in de wetenschappelijke wiskunde. Ook zou het curriculum meer toegepaste wiskunde moeten gaan bevatten. Ten slotte leidden de in gang gezette hervormingen ertoe dat de meetkunde het stiefkind van het wiskundeonderwijs werd. De serie zal in een volgend nummer afgesloten worden met een deel over de herziening van het havo-programma en over de tweefasestructuur in het vwo.

In 1959 werden door een onderafdeling van de Commissie voor Europese Economische Samenwerking (OEEC, 1948) initiatieven ontwikkeld om te komen tot verbeteringen in het wiskundeonderwijs in de Westelijke wereld. Deze initiatieven leidden onder andere tot een seminar dat gehouden werd van 23 november 1959 tot 4 december 1959 in het Cercle Culturel de Royaumont te Asnières-sur-Oise in Frankrijk. De deelnemers aan dit seminar kwamen uit vijftien Europese landen; ook waren er delegaties uit Canada en de Verenigde Staten. Aan de deelnemende landen was gevraagd drie afgevaardigden te sturen: (1) een eminent wiskundige, (2) een vakdidacticus wiskunde of iemand die op het Ministerie van Onderwijs belast was met zaken rond het wiskundeonderwijs en (3) een eminent wiskundeleraar. Voor Nederland waren de deelnemers: (1) prof. H.T.M. Leeman, (2) dr. L.N.H. Bunt en (3) dr. P.G.J. Vredenduin. Een van de drie secties van het seminar werd geleid door de Franse wiskundige Jean Dieudonné (1906–1992), een prominent lid van de Bourbaki-groep.

À bas Euclide!

In zijn voordracht met als titel 'New thinking in school mathematics' deed Dieudonné voorstellen voor een nieuw curriculum voor de wiskunde in het voortgezet onderwijs. In het seminarverslag[1] lezen we op bladzijde 35: "And if the whole program I have in mind had to be summarised in one slogan it would be: Euclid must go!" En, nadat hij had benadrukt dat hij voor de prestaties van de Grieken in de wiskunde de grootste bewondering had ("I consider their creation of geometry perhaps the most extraordinary intellectual accomplishment ever realised by mankind"), vervolgde hij zijn betoog met de opmerking: "...everything about triangles... has just as much relevance to what mathematicians (pure and applied) are doing today as magic squares or chess problems!" Zijn voorstel was de klassieke elementaire meetkunde te vervangen door een axiomatische opzet van de lineaire algebra. In tegenstelling tot wat vaak wordt beweerd, was ook Dieudonné van mening dat "...a mathematical theory can only be developed axiomatically in a fruitful way when the student has already acquired some familiarity with the corresponding material — a familiarity gained by working long enough with it on a kind of experimental, or semi-experimental basis, i.e. with a constant appeal to intuition."[2] Door de grote ophef die zijn standpunt over Euclides veroorzaakte, bleef deze laatste opmerking sterk onderbelicht.

Hoewel het standpunt van Dieudonné niet door iedere deelnemer van het seminar werd gedeeld, heeft het toch grote invloed

Jean Dieudonné op een Bourbaki-seminar

gehad op de wiskundeprogramma's in het voortgezet onderwijs in vele Europese landen. En wereldwijd hebben deze ideeën tot de zogenoemde New Math geleid, een voor kinderen zo goed mogelijk toegankelijk gemaakt aftreksel van moderne wiskundige theorieën. In Nederland werd als vervolg op dit seminar in 1961 de CMLW (Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde) geïnstalleerd. De voorzitter van deze commissie was professor Leeman, een van de leden was dr. P.G.J. Vredenduin; beiden waren, zoals al vermeld, deelnemer aan het Royaumont-seminar.

De CMLW

Vanaf 1961 werkte deze commissie aan een nieuwe opzet van het wiskundeonderwijs. Twee zaken stonden daarbij centraal:

1. Het nieuwe wiskundeonderwijs zou beter moeten aansluiten bij de ontwikkelingen van de wiskunde als wetenschap.
2. Het nieuwe wiskundeonderwijs zou meer direct bruikbare kennis moeten bevatten.

Het eerste aandachtspunt was een van de gevolgen van het Royaumont-seminar. Het tweede aandachtspunt sloot aan bij de eerste tekenen van een ontwikkeling die in de jaren tachtig de vanzelfsprekende norm zou worden: onderwijs dient maatschappelijk relevante kennis over te dragen. Dat wil zeggen: kennis die direct in allerlei beroepssituaties toepasbaar is. In 1963 vonden de eerste heroriënteringcursussen voor leraren van het vhmo plaats. Onderwerpen van deze cursussen waren: verzamelingenleer en logica, topologie, lineaire algebra, kansrekening en statistiek, et cetera. De cursussen werden gegeven door universitaire docenten wiskunde. Didactische problemen die mogelijk zouden kunnen ontstaan door het opnemen van dit soort onderwerpen in het schoolleerplan kwamen niet of nauwelijks aan bod. Ook liet de CMLW een viertal leerstofexperimenten uitvoeren:

1. gemoderniseerde meetkunde in de onderbouw;
2. gemoderniseerde algebra in de onderbouw;
3. analyse in de bovenbouw;
4. vectormeetkunde in de bovenbouw.

Voor deze experimenten werden leerlingenteksten geschreven die later aan de auteurs van schoolboeken ter beschikking werden gesteld. Voor het experiment 'gemoderniseerde meetkunde' werden bewerkingen gemaakt van de teksten die tussen 1958 en 1962 in Hilversum door R. Troelstra (1917–2012) c.s. werden ontwikkeld in het kader van een onderwijskundig onderzoek rond het aanvankelijk meetkundeonderwijs door de Universiteit van Amsterdam.

R. Troelstra, auteur/ontwerper van de methode *Transformatiemeetkunde*

Het experiment transformatiemeetkunde

Zo vond tussen 1958 en 1962 in Hilversum een onderzoek plaats naar de effecten van het gebruik van transformaties in het aanvankelijk meetkundeonderwijs. In eerste instantie spraken de ontwikkelaars van bewegingsmeetkunde, omdat in hun opzet verplaatsingen van figuren als een integrerend onderdeel van de theorie werden behandeld. Deze opzet sloot aan bij de ideeën van Felix Klein (1849–1925), die in zijn Erlanger Programm uit 1872 er al voor pleitte om de meetkunde op te zetten met behulp van transformaties. Onder leiding van de psycholoog A.D. de Groot (1914–2006), die tot het kandidaatsexamen ook wiskunde had gestudeerd, werd een methodologisch onderzoek gedaan over twee verschillende aanpakken van meetkunde in de eerste klas van het voortgezet onderwijs. In de ene groep kregen de leerlingen meetkundeles volgens de traditionele aanpak. In de andere groep werd de bewegingsmeetkunde onderwezen. Een belangrijke conclusie in het eindrapport over dit experiment luidt: *De onderwijsresultaten van de bewegingsmeetkunde zijn niet slechter (ook niet qua prestaties, zoals verwacht) en niet beter (ook niet qua plezier-in-meetkunde, zoals verwacht)*[3] . Men kon hier dus alle kanten mee uit. Voor de praktijk leverde dit experiment de reeks schoolboeken *Transformatiemeetkunde*[4] op, die in 1962 door J.B. Wolters op de markt werd gebracht. Het doel van deze driedelige cursus wordt in het voorwoord van deel 1 als volgt omschreven: "In dit leerboek wordt de vlakke meetkunde behandeld met behulp van transformaties. De transformaties geven de mogelijkheid om de meetkunde vanuit één gezichtspunt op te bouwen, waardoor een goede aansluiting bij moderne wiskundige denkwijzen wordt verkregen. Bovendien heeft men het voordeel op natuurlijke wijze te kunnen voortbouwen op bij de leerlingen reeds aanwezige intuïtieve kennis van symmetrie, verschuiving en draaiing. Getracht is deze intuïtieve kennis te ordenen en uit te breiden."

Door deze opzet werd gebroken met de euclidische congruentiegevallen, maar er kwam een andere systematische aanpak voor in de plaats. Er was minder aandacht voor sommenmakerij, het ging vooral om de logisch-deductieve structuur van de vlakke meetkunde. Hoewel de auteurs in het voorwoord van deel 1 opmerken dat zij niet een axiomatische opbouw nastreven, spelen axioma's als spelregels voor de opbouw en ordening een grote rol. Aan het eind van de cursus (deel 3) komt zelfs de theorie van de transformatiegroepen ter tafel. In de inleiding wordt de lijnspiegeling nog wel op aanschouwelijke wijze geïntroduceerd, waarbij ook de basisconstructies met passer en liniaal worden aangeleerd. Daarna wordt de lijnspiegeling centraal gesteld, waarbij uitgegaan wordt van de volgende vier axioma's, waarvan A4 overeenkomt met het euclidische parallellenpostulaat.

A1: Het spiegelbeeld van een rechte lijn is weer een rechte lijn.
A2: Lijnstuk en beeldlijnstuk zijn even lang.
A3: Bij spiegeling zijn hoek en beeldhoek even groot.
A4: Als van een vierhoek drie hoeken recht zijn, dan is de vierde hoek ook recht.

Tot welke formele redeneringen dit (tegen het einde van het eerste leerjaar!) voerde, moge blijken uit het voorbeeld in Figuur 1. Het lijkt wonderlijk dat na jaren van discussie over aanschouwelijkheid, intuïtieve begripsvorming en uitstel van axiomatisering toch weer een strikt formele aanpak van het meetkundeonderwijs in de aandacht kwam. Deels was dit een gevolg van de druk die er uitgaat van een 'officiële' uitgave in boekvorm. Een van de auteurs van de cursus Transformatiemeetkunde heeft later verklaard dat het experimentele materiaal aanmerkelijk speelser en vrijer was dan de later in druk verschenen versie.[5]

Voor de plannen van de CMLW, sterk beïnvloed door de ideeën van de New Math, kwam dit experiment met de transformatiemeetkunde precies op het goede moment. Ook Hans Freudenthal (1905–1990), die vanaf zeker ogenblik ook betrokken was bij het werk

Stelling 2: Het snijpunt van de diagonalen van een rechthoek valt samen met het snijpunt van de symmetrieassen.

Gegeven: ABCD is een rechthoek.
p en q zijn de symmetrieassen.
S is het snijpunt der diagonalen.

Te bewijzen: S is het snijpunt van p en q.

Bewijs: (zie fig. 75) Spiegel om p. Dan is

$$\left.\begin{array}{l} A \ \cdot|\cdot \ B \\ C \ \cdot|\cdot \ D \end{array}\right\} \text{dus } AC \ \cdot|\cdot \ BD.$$

Diagonaal AC snijdt lijn p, dus volgens § 14, stelling 3 ligt het snijpunt S van de diagonalen op p.

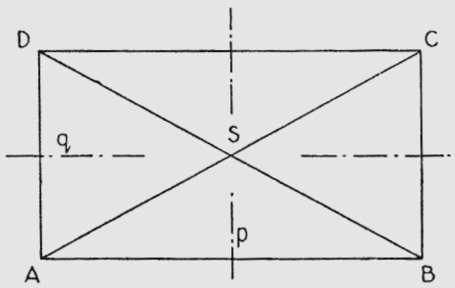


Fig. 75

Spiegel om q als as. Dan is $\left.\begin{array}{l} A \ \cdot|\cdot \ D \\ C \ \cdot|\cdot \ B \end{array}\right\}$ dus AC ·|· DB.

Diagonaal AC snijdt lijn q, dus volgens § 14, stelling 3 ligt het snijpunt S van de diagonalen op q.
Punt S ligt dus op p en q, dus S is het snijpunt van p en q.

Figuur 1 Tekst uit *Transformatiemeetkunde I* (1962)

van de CMLW en die zo sterk voor een aanschouwelijke start was, werkte in het midden van de jaren zestig nog mee aan een herziening van deze cursus, omdat hij deze aanpak van belang vond voor een nieuw onderbouwprogramma. De ervaring — ook van de auteurs van dit artikel — heeft geleerd dat de formele redeneringen van de transformatiemeetkunde door het merendeel van de leerlingen van de eerste klas niet gereproduceerd konden worden, laat staan dat ze zelfstandig dergelijke redeneringen konden produceren.

Wiskundeleerplannen tussen 1968 en 1985

In 1966 werd duidelijk dat in 1968 de Mammoetwet (al in 1963 door de Eerste Kamer aangenomen) in werking zou treden. Om met de nieuwe wiskundeprogramma's een goede start te kunnen maken, leek het verstandig deze ook in 1968 in te voeren. Hoe die programma's eruit zouden gaan zien, werd enigszins duidelijk in het interim-rapport van de CMLW dat in mei 1967 verscheen.

Hoewel de New Math in Nederland nooit tot een werkelijke bloei is gekomen, was de invloed van het gedachtegoed van deze stroming zo sterk dat het leerplan van 1968 later 'structuralistisch' zou worden genoemd. Symptomen van dat structuralisme waren onder andere de introductie van de verzamelingentaal in de schoolwiskunde, het gebruik van logische symbolen, zoals implicatiepijlen en kwantoren en de meer centrale rol die de afbeeldingen toebedeeld kregen. Ook maakte de meetkunde waarin de congruentiegevallen van driehoeken centraal stonden plaats voor een meetkunde waarin transformaties de hoofdrol speelden. Stereometrie en analytische meetkunde verdwenen uit de examenprogramma's. Daarvoor in de plaats kwamen wiskunde I en wiskunde II. Wiskunde I omvatte naast een flink stuk analyse ook kansrekening en statistiek. Het vak was opgezet als een echt bètavak, maar omdat het vak een toelatingseis werd voor alle gammastudies en ook voor economie en de exacte vakken, werd het door bijna iedereen gekozen; ook door hen die met het vak nauwelijks affiniteit hadden.

Wiskunde II was bedoeld voor hen die een studie in een van de exacte vakken wilden gaan doen. Het bevatte als verplicht onderdeel een inleiding in de lineaire algebra; daarnaast kon een keuze worden gemaakt uit bijvoorbeeld complexe getallen, topologie, numerieke wiskunde, logica en nog een aantal onderwerpen. Een van doelstellingen van wiskunde II was: kennismaken met redeneringen (bewijzen!) in een deductief systeem. Traditioneel was deze kennismaking gesitueerd in de onderbouw en gekoppeld aan de vlakke meetkunde. In de bovenbouw werd die kennismaking dan voortgezet in de stereometrie. De keuze voor lineaire algebra als oefengebied voor het geven van bewijzen kwam voort uit het feit dat tijdens het Royaumont-seminar door de wiskundigen werd gesteld dat een 'gebrekkig systeem' als de euclidische meetkunde daarvoor ongeschikt was. De lineaire algebra zou daarvoor veel geschikter zijn. Deze overwegingen leidden er toen toe dat de meetkunde in de onderbouw minder streng werd opgezet en dat het oefenen met bewijzen werd uitgesteld. Niet meer redeneren volgens het schema 'Gegeven, Te bewijzen, Bewijs', maar kennismaken met ruimtelijke en vlakke figuren en het uitvoeren van allerlei berekeningen. Om beter aan te sluiten bij moderne ontwikkelingen en een goede basis te leggen voor de bovenbouw zouden in de meetkunde van de onderbouw afbeeldingen en relaties aan de orde moeten komen. Daarnaast werd er in de onderbouw plaats ingeruimd voor het werken met vectoren, zodat er een goede voorbereiding zou ontstaan voor het streng opzetten van de lineaire algebra in de bovenbouw bij het vak wiskunde II.

In Tabel 1 staan de meetkundeleerplannen voor de onderbouw van 1958 en 1968 naast elkaar. Opvallend is dat in 1968 voor het brugjaar ook de behandeling van ruimtelijke lichamen wordt genoemd. Dat was ongetwijfeld een gevolg van de discussies over en de verwerking van de ideeën van mevrouw Ehrenfest[6]. Ook onderdelen van de experimenten met de transformatiemeetkunde vinden we in de leerstofomschrijving terug.

Evenals in de tijd voor 1968 vindt ook de CMLW dat doelstellingen van het meetkundeonderwijs moeten zijn:

1. Het verkrijgen van inzicht in de betekenis van een mathematisch bewijs.
2. Het afleiden van resultaten, die voor hen die later wiskunde moeten toepassen van nut kunnen zijn.

De CMLW wil echter verder gaan dan voor 1968 het geval was. In de toelichting op het leerplan is te lezen: "In ieder geval zal de leerling eerst langs intuïtieve weg vertrouwd moeten raken met enkele meetkundige figuren. Zodra

1958 **h.b.s.-B en gymnasium-B**	1968 **VWO**
Klas 1 Meetkunde: Inleiding; evenwijdigheid van lijnen; eigenschappen van driehoeken; congruentie; eigenschappen van parallellogrammen en trapezia. Constructies. **Klas 2** Omkeren van stellingen. Indirecte bewijzen. Meetkundige plaatsen. Evenredigheid van lijnstukken. Vermenigvuldiging van figuren. Gelijkvormigheid. De stelling van Pythagoras. Sinus, cosinus en tangens van hoeken tussen 0° en 180°. Sinus- en cosinusregel; eenvoudige berekeningen in rechthoekige en scheefhoekige driehoeken, ook met behulp van tafels van goniometrische verhoudingen. Oppervlakken. **Klas 3** De cirkel; vermenigvuldiging van cirkels; verband tussen hoeken en bogen. De om- en de ingeschreven cirkel van een driehoek; de formules $R = a/(2\sin\alpha)$ en $r = O/s$. Koordenvierhoek. Regelmatige veelhoeken; definitie; existentie van de om- en ingeschreven cirkel. Omtrek en oppervlak van de cirkel. Enkele voorbeelden van het berekenen, met behulp van tafels, van de onbekende elementen in een driehoek, vooral aan de hand van toepassingen in de praktijk.	**Brugjaar** Inleiding in de meetkunde: kubus, rechthoekig blok, vlak, lijn, punt hoek, afstand, driehoek, vierhoek, cirkel. Afbeeldingen: lijnspiegeling, puntspiegeling, translatie, rotatie. Evenwijdigheid van lijnen. Congruentie van figuren. Eigenschappen van driehoeken en van de vierhoeken: vlieger, parallellogram, ruit, rechthoek, vierkant. Eenvoudige puntverzamelingen en hun doorsneden. **Tweede, derde en vierde leerjaar** Vermenigvuldigen van figuren; zwaartepunt van een driehoek. Gelijkvormigheidsafbeelding; gelijkvormigheid van figuren; enkele eigenschappen van rechthoekige driehoeken; de goniometrische verhoudingen sin, cos en tan; sinusregel en cosinusregel. Berekeningen van hoeken en afstanden in het vlak en in de ruimte. Vectoren; rekenen met vectoren; verband tussen vectorcomponenten en de coördinaten van een punt. In het vlak: vergelijkingen van lijn en cirkel; snijpunten en raaklijnen; inwendig product; hoeken en afstanden. In de ruimte: vergelijkingen van vlak en bol, vectorvoorstellingen van lijn en vlak; inwendig product; hoeken en afstanden. Puntverzamelingen en eenvoudige verzamelingen van lijnen.

Tabel 1 De meetkundeleerplannen 1958 en 1968 voor de onderbouw

men zo een zekere operatiebasis heeft verkregen, kan men met de ordening daarvan beginnen. Vroeger waren congruentie en gelijkvormigheid dan thema's die in allerlei toonaarden werden bespeeld om eigenschappen van figuren af te leiden. De bedoeling van het huidige leerplan is om alles in ruimer verband te zien en de meetkundige transformatie centraal te stellen."[7] Het waren ambitieuze woorden van de CMLW, maar een meetkundeaanpak waarin transformaties centraal stonden, heeft het uiteindelijk niet gehaald. Ook een meetkundige behandeling van de kegelsneden (die oorspronkelijk wel op de verlanglijst van CMLW stond) moest afvallen om overlading te voorkomen. De meetkunde in de aanvangsjaren van de Mammoetwet was eigenlijk vlees noch vis: de systematische opzet was niet heel erg streng, aan deductief redeneren kwam men nauwelijks toe en het omgaan met figuren en situaties was tamelijk willekeurig. Van meetkunde als middel tot ruimtelijk redeneren en in het algemeen als middel tot leren denken was vanaf toen nauwelijks nog sprake.

De praktijk van de jaren zeventig

Door de ingrijpende onderwijsveranderingen van de jaren zestig, zowel organisatorisch als inhoudelijk, was het voor de auteurs van leerboeken lastig precies te weten wat de leerplanontwikkelaars voor ogen stond. En nog lastiger was het om boeken te schrijven die op alle veranderingen konden inspelen. Bij de grote educatieve uitgeverijen Wolters en Noordhoff volgde men niet alleen de ontwikkelingen op de voet, maar men nam ook initiatieven. Enkele medewerkers van uitgeverij Wolters hadden op de Buchmesse in Frankfurt gezien dat er in Schotland een wiskundemethode in gebruik was die — voor zover men dat op dat moment kon vaststellen — goed aansloot bij de plannen van de CMLW. Wolters verwierf het recht deze Schotse methode (*Modern Mathematics for Schools*) te vertalen en te bewerken en ging daarmee zo voortvarend aan de slag dat er al in 1965 een experimentele editie op de Nederlandse markt verscheen. Zo ontstond de methode *Moderne Wiskunde*, die vanaf 1968 door Wolters-Noordhoff (inmiddels gefuseerd) werd uitgegeven en die — in sterk veranderde vorm — nog steeds op veel scholen in gebruik is. Voor veel leraren en scholen die onzeker waren over hoe het nu verder moest met het wiskundeonderwijs in de nieuwe schoolsoorten, kwam de Schotse methode op het goede moment. Men had het idee dat de inhoud ervan goed paste bij de plannen van de CMLW en dat de didactische opzet goed aansloot bij een schoolsysteem waarin de niveauverschillen tussen leerlingen binnen de klassen sterk zouden toenemen. Het is niet overdreven te stellen dat de Schotse methode een belangrijke factor is geweest in het krachtenspel dat de uiteindelijke vorm van het wiskundeleerplan van 1968 voor de onderbouw heeft bepaald.

Wat de meetkunde betreft: in de Schotse methode (in eerste instantie op verreweg de meeste scholen in gebruik) werden de transformaties volop gebruikt en ook puntverzamelingen kwamen daarin al snel aan bod. Eigenschappen van figuren werden bewezen met spiegelingen of draaiingen en de onderlinge relatie van transformaties werd bestudeerd. Leerlingen leerden dat het product van twee spiegelingen in snijdende assen een rotatie is en dat het product van twee spiegelingen in evenwijdige assen een translatie oplevert. Dit alles om "inzicht te verkrijgen in de betekenis van een mathematisch bewijs". Maar de attitude dat je bij een bewijsvoering slechts gebruik maakt van definities en van stellingen die eerder bewezen zijn, werd niet zo grondig ontwikkeld als in de vlakke euclidische meetkunde die voor 1968 werd onderwezen.

In de loop van de jaren zeventig verloor de Schotse methode steeds meer gebruikers en wonnen de boeken van auteurs die ook voor 1968 actief waren terrein. In die methoden (*Sigma* en *Getal en Ruimte*) was (en dat was, gezien de leerplanomschrijving, niet verboden) meer aandacht voor een wat traditionelere opbouw van de meetkunde met behulp van congruente driehoeken. Maar omdat deze meetkundige vaardigheden geen of nauwelijks een vervolg hadden in de bovenbouw — de stereometrie was verdwenen en de vectormeetkunde beperkte zich al snel tot problemen die met behulp van algoritmen konden worden opgelost — besteedden leraren in de onderbouw steeds minder aandacht aan meetkunde. Er kwam steeds meer nadruk op leerstof die van belang was voor de analyse in de bovenbouw. Zo werd de meetkunde het stiefkind van het wiskundeonderwijs.

Onderbouw eind jaren tachtig

Om de sfeer aan te geven van het meetkundeonderwijs in de onderbouw aan het eind van de jaren tachtig beschrijven we enkele fragmenten uit een leerboek[8] voor 3vwo. Op een gemarkeerd tekstvlak vinden we de zin: “De verzameling van alle punten die gelijke afstand hebben tot de punten A en B is de middelloodlijn van AB.” In de volgende paragraaf wordt vermeld dat we een afstand aangeven met de letter d. Vervolgens leiden enkele opgaven onder andere tot de uitspraak: “Voor elk punt P op de middelloodlijn van het lijnstuk MN geldt: $d(P,M) = d(P,N)$.” Welke relatie deze uitspraak heeft met de vorige wordt niet duidelijk. Even verder zien we een les die ‘Construeren en redeneren’ heet. Daar vinden we de opgave die in Figuur 2 staat.

Dan volgt een concluderende tekst: “We hebben nu bewezen (door redeneren aangetoond): de drie middelloodlijnen van een willekeurige driehoek gaan door één punt S.” Merkwaardig — op z’n zachtst gezegd — aan zo’n fragment is dat nergens vermeld wordt dat in de redenering twee verschillende beweringen worden gebruikt, namelijk: “Als S op de middelloodlijn van AB ligt dan heeft S gelijke afstanden tot A en B” tegenover “Als S gelijke afstanden heeft tot A en B dan ...” Ook merkwaardig is het dat de opgave gebruik maakt van een scherphoekige driehoek en dat de conclusie wordt getrokken voor ’een willekeurige driehoek’. Het merkwaardigst is misschien nog wel dat de auteurs het nodig vinden in klas 3vwo te vermelden dat ‘bewijzen’ betekent ‘door redeneren aantonen’. Naar onze mening is dit fragment typerend voor het meetkundeonderwijs in de onderbouw in de jaren tachtig. Wie door de boeken bladert, vindt een grote hoeveelheid afspraken, eigenschappen, notaties en ‘redenerinkjes’, waarvan de onderlinge relatie niet duidelijk is. Het blijft vaag waar je bij een redenering vanuit mag gaan, wat een afspraak is en wat niet. Dat meetkundeonderwijs mede tot doel heeft goed te leren redeneren, is uit dit soort teksten niet op te maken.

28a Teken een scherphoekige driehoek ABC.
Construeer de middelloodlijnen van AB en AC.
b Noem het snijpunt van deze middelloodlijnen S. We gaan beredeneren dat S ook op de middelloodlijn van BC ligt. S ligt op de middelloodlijn van AB, dus:
$d(S, A) = d(S, B)$ (1)
Vul in: S ligt op de middelloodlijn van AC, dus:
$\ldots = \ldots$ (2)
Uit (1) en (2) volgt: $\ldots = \ldots$
Dus S ligt ook op . . .
c Teken de cirkel met S als middelpunt en SA als straal. Als je nauwkeurig hebt getekend, gaat de cirkel ook door B en C. Waarom?

Figuur 2 Een opgave uit een schoolboek voor klas 3vwo (*Moderne Wiskunde*, 1989)

HEWET (1985)

Bij de invoering van de Mammoetwet (1968) was het de bedoeling dat alle vwo-pakketten toegang zouden geven tot elke academische studie. Maar al snel rijpte het inzicht dat dit een al te optimistische gedachte was, zodat er vanaf het begin van de jaren zeventig door de universiteiten werd aangegeven welke vakken men in het vwo-pakket moest hebben om tot een gekozen studierichting te worden toegelaten. Dit bracht weer de nodige problemen met zich mee, zoals:

1. De inhoud van wiskunde I (voor alle bèta- en gammastudies en ook voor economie een verplicht vak) was voor gammastudies geen geschikte vooropleiding.
2. Door het ontbreken van stereometrie in het examenprogramma en dientengevolge een uiterst karige meetkundeopleiding in de onderbouw bleken studenten aan technische universiteiten studieproblemen te krijgen vanwege een gebrekkig ruimtelijk inzicht.

In 1978 werd er door het ministerie een werkgroep geïnstalleerd die tot taak kreeg om deze problemen op te lossen. Deze werkgroep publiceerde haar eindrapport, het zogenoemde HEWET-rapport[9] in 1980. De in dat rapport geschetste plannen zijn in 1985 gerealiseerd. In het kort kwamen deze plannen neer op:

1. De vakken wiskunde I en II verdwenen.
2. Voor leerlingen die een bètastudie wilden volgen, kwam er wiskunde B. Dat vak bestond uit het analyseprogramma van het voormalige wiskunde I-programma, aangevuld met een omvangrijk stuk ruimtemeetkunde. In dit programma voor ruimtemeetkunde werd maar in beperkte mate gebruik gemaakt van vectorrekening; dit om te voorkomen dat het vak kon worden beoefend zonder aandacht te besteden aan de ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht.
3. Voor leerlingen die een alfastudie of een gammastudie wilden gaan volgen kwam er het nieuwe vak wiskunde A dat bestond uit de onderdelen matrixrekening, toegepaste analyse en kansrekening en statistiek.

In het HEWET-rapport werd benadrukt dat de ruimtemeetkunde in wiskunde B niet alleen een wedergeboorte van de stereometrie zou moeten zijn, maar vooral ook gekoppeld zou moeten zijn aan situaties uit het dagelijkse leven of aan bouwconstructies of kunstobjecten. Ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht zou daarbij een voortdurend aandachtspunt moeten zijn. Een voorbeeld van wat de ontwerpers van het programma daarbij voor ogen stond, staat in Figuur 3.

Een literpak melk heeft de afmetingen 7 bij 7 bij 20 cm. In één van de hoeken van het bovenvlak zit een schenkgaatje. Het pak melk in fig. 74 was half vol (de melk trouwens ook). Kijk goed naar de stand van het pak. Welke vorm had de vloeistofspiegel toen Aad begon te schenken? Teken de vloeistofspiegel nauwkeurig op schaal.

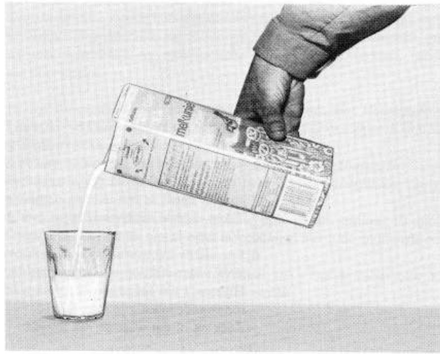


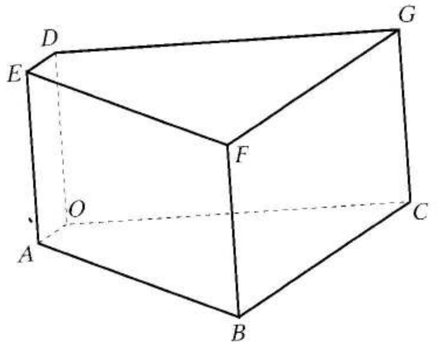
Fig. 74

Figuur 3 Een opgave uit *Lessen in ruimtemeetkunde*[10]

De introductie van de ruimtemeetkunde verliep zowel voor de leerlingen als voor de (jongere) leraren niet zonder problemen. De leerlingen hadden in de onderbouw geen systematische kennis van de meetkunde opgedaan. In de loop van de jaren zeventig was de meetkunde in de onderbouw steeds verder gemarginaliseerd, zoals we hiervoor al zagen. De hulpmiddelen waarmee de leerlingen een redenering konden ondersteunen, vormden een weinig systematisch stelsel van regels over congruentie en transformaties. Stellingen over bijzondere lijnen in driehoeken, over eigenschappen van cirkels of over relaties tussen hoeken en bogen kende men niet of nauwelijks. Kortom, van een gedegen meetkundige vorming bij leerlingen was geen sprake. En voor de jongere leraren gold hetzelfde: de meetkundige denkwijze vonden ze lastig en allerlei nuttige heuristieken (hulplijn trekken, de figuur spiegelen of aanvullen, een omgeschreven cirkel aanbrengen) behoorden niet of nauwelijks tot hun bagage. Om een idee te geven over de onderwerpen die in de ruimtemeetkunde (vwo-B) aan de orde kwamen, volgt hier een summiere opsomming van het programma zoals dat indertijd is gepubliceerd:

- Onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken.
- Doorsneden van vlakken met prisma’s en piramiden.
- Parametervoorstellingen van lijnen en vlakken.
- Loodrechte stand en orthogonale projectie.

Van het prisma $ABCO.EFGD$ is gegeven: $\angle AOC = \angle AOD = \angle COD = 90^\circ$, $BC // AO$, $BC = CO = 8$, $AO = 1$, $DO = 4$. De lijn l gaat door B, snijdt de lijn EG en snijdt de lijn OD in punt P.



a Bereken de lengte van het lijnstuk OP.
b Punt Q ligt op lijnstuk BG en punt R ligt op lijnstuk AE. Lijn QR is evenwijdig aan vlak ABC; $QR = 10$. Bereken de afstand van de lijn QR en het vlak ABC.
c Vierhoek $DEFG$ is een deksel dat kan scharnieren om de lijn DG. Het deksel wordt opengeklapt tot het achterover met de punt op het vlak ABC rust; daar ligt het punt S. Bereken over welke hoek het deksel draaide.

Figuur 4 Examenopgave Vwo-examen wiskunde B 1988

- Spiegelingen, translaties en rotaties in de ruimte.
- Inwendig product, normaalvector van een vlak.
- Berekening van hoeken en afstanden.
- Bol, cilinder en kegel met raaklijnen en raakvlakken.
- Omwentelingslichamen en inhoudsberekeningen.

Aan deze opsomming is niet te zien dat de ontwerpers van het programma een vak voor ogen hadden dat sterk op situaties uit het dagelijkse leven was gericht.[11] Ook in de examens was die gedachte niet terug te vinden. Een voorbeeld van een (enigszins bekorte) opgave ruimtemeetkunde uit het vwo-examen[12] staat in Figuur 4.

De vragen a en b zijn klassiek en zouden ook in de jaren vijftig gesteld kunnen zijn. Vraag c is bedoeld om aan te geven dat zo'n prisma een gebruiksvoorwerp zou kunnen zijn (wat overigens nogal wat fantasie vereist). Sommige ontwerpers van het ruimtemeetkundeprogramma in de HEWET waren nogal teleurgesteld over de manier waarop de ruimtemeetkunde in de eindexamens aan de orde kwam. In de examens in de eerste tien jaar na de invoering van de HEWET zien we tamelijk klassieke ruimtemeetkundeopgaven waarin de opdrachten "teken..." en "bereken..." sterk de overhand hebben. Soms wordt een toelichting op een tekening gevraagd, maar opgaven waarin een 'echt' bewijs wordt gevraagd zijn zeer zeldzaam. De toepassingsgerichtheid van de opgaven is gering en komt hooguit tot uitdrukking in het gebruik van een lampje bij een opgave over centrale projectie of een over een lichaam gespannen touwtje bij een vraag over de kortste route. Ook van de gepropageerde multidisciplinaire aanpak vinden we in die opgaven niet veel terug. Wel doen veel opgaven een beroep op het ruimtelijk voorstellingsvermogen, een doelstelling die nadrukkelijk aan de basis van het vak heeft gelegen. Omdat in de schoolpraktijk de examens sterk sturend zijn voor het didactisch handelen van de leraar, is het 'nieuwe' vak een aftreksel van de vroegere stereometrie geworden zonder dat de multidisciplinaire aanpak en de toepassingsgerichtheid die de ontwerpers voor ogen stonden een kans hebben gekregen.[13]

Vooruitblik

Na de invoering van het HEWET-programma in het vwo in 1985 werd ook de herziening van het havo-examenprogramma voor wiskunde ter hand genomen. Over die ontwikkelingen en over de aanpassingen die de tweefasestructuur in het vwo heeft meegebracht, gaat het vierde (en laatste) artikel over de geschiedenis van het meetkundeonderwijs dat in het volgende nummer van het NAW zal verschijnen. Daarin vindt u ook een samenvattend overzicht van alle veranderingen die we in dit vierluik hebben beschreven en enkele aanbevelingen die we voor de leerplanontwikkeling en voor het wiskundeonderwijs van belang vinden.

Dankwoord

De auteurs danken Sieb Kemme, Martin Kindt, Ilan Kisch en Douwe Kok voor hun kritiek op de eerste versie van dit artikel.

Noten

1 *New Thinking in School Mathematics*, OEEC, Office for scientific and technical personnel, May 1961.

2 Verslag Royaumont-seminar, p. 39.

3 A.D. de Groot en medewerkers, *Bewegingsmeetkunde*, Wolters-Noordhoff, 1968, p. 90.

4 R. Troelstra, A.N. Habermann, A.J. de Groot, J. Bulens, *Transformatiemeetkunde* deel 1, 2 en 3, J.B. Wolters, Groningen.

5 Verklaring van R. Troelstra in 2003 in een gesprek met het WG.

6 Zie bijvoorbeeld E. de Moor (2000), Wat wilde Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa?, *Euclides* 75(4), pp. 117–123.

7 Toelichting op het leerplan wiskunde, CMLW, april 1968, p. 19.

8 *Moderne wiskunde 3 hv*, vijfde editie (1989).

9 HEWET staat voor 'Herverkaveling Eindexamenprogramma's Wiskunde Een en Twee'.

10 M. Kindt en J. de Lange Jzn (1985), *Lessen in ruimtemeetkunde I*, Educaboek.

11 Al vanaf het begin van de jaren vijftig werd bij leerplanwijzigingen in begeleidende commentaren de nadruk gelegd op het belang van praktische toepassingen. Zie bijvoorbeeld de inleiding van de CMLW-publicatie 'Toelichting op het leerplan wiskunde' (april 1968). In de officiële omschrijvingen van de leerplannen is tot 1990 daarvan niets terug te vinden.

12 Vwo-examen wiskunde B 1988.

13 In het HEWET-rapport staat (p. 32): "Het doel dat de werkgroep voor ogen staat is zoiets als het kunnen onderzoeken en beschrijven van ruimtelijke figuren en het oplossen van problemen daarover; dit met een verscheidenheid aan hulpmiddelen: construeren, redeneren, gebruik van vectoralgebraïsche methoden en methoden uit de analyse, al naar gelang dat bij een bepaald probleem het beste past."