Ton Kloks
Department of Computer Science
National Tsing Hua University
Hsinchu, Taiwan
kloks@cs.nthu.edu.tw

Rob Tijdeman
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
tijdeman@math.leidenuniv.nl

In Memoriam Nicolaas Govert de Bruijn (1918–2012)

Complementariteit

Dick de Bruijn deed belangrijk theoretisch onderzoek naar complementariteit. Ton Kloks, onderzoeker aan de Tsing Hua University in Taiwan, en Rob Tijdeman, emeritus hoogleraar aan de Universiteit Leiden, geven een korte samenvatting van De Bruins werk over complementariteit en betegelingen.

Complementariteit doet denken aan M.C. Escher: twee schijnbaar onafhankelijke (dieren)figuren die als tegels samen precies het vlak opvullen.

Onder complementariteit verstaan we in dit artikel dat voor gegeven verzameling C en operatie $\circ$ de verzamelingen A en B de eigenschap hebben dat elk element van C op precies één manier te schrijven is als $a \circ b$ met $a \in A, b \in B$. Voorbeelden zijn:

- $C = \mathbb{Z}_{\geq 0}, \circ = +$ met A de rij van getallen die de som zijn van verschillende even machten van 2 en B de rij van getallen die de som zijn van verschillende oneven machten van 2. De rij $A = [0, 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21, 64, 65, \ldots]$ wordt wel de Moser–De Bruijn rij genoemd. Voor complementaire rijen met $\circ = +$ en $\circ = \times$ zie de volgende twee paragrafen.
- Verzamelingen A en B zo dat elk element van C hetzij in A hetzij in B zit. Voorbeelden met $C = \mathbb{Z}$ worden gegeven in de paragraaf over Sturmse woorden, dat zijn functies $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ waarbij een 0 een element van A en een 1 een element van B aanduidt. Een typisch voorbeeld is de functie f met $f(n) = \lfloor (n+1)\alpha \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor$ waarbij $\alpha > 1$ gegeven is en $\lfloor x \rfloor$ het grootste getal $\leq x$ is.
- Een meerdimensionale generalisatie van Sturmse woorden leidt tot de beroemde Penrose-betegelingen, niet-periodieke vlakvullingen met slechts twee verschillende tegels. Hier deed De Bruijn belangrijk theoretisch onderzoek. Zie de laatste paragraaf.

Bases voor integers

We noemen een verzameling gehele getallen $\{ b_1, b_2, \ldots \}$ een basis voor $\mathbb{Z}$ als elk getal $x \in \mathbb{Z}$ op een unieke manier te schrijven is als

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i b_i \qquad \text{met elke } \epsilon_i \in \{0, 1\} \text{ en } \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i < \infty. \tag{1}$$

Een voorbeeld van een basis voor $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ is $[1, 2, 2^2, 2^3, \ldots]$. Merk op dat als je een basis C hebt, elke splitsing van die basis in twee niet-lege deelverzamelingen A en B een complementair paar voor $\circ = +$ oplevert.

Szele opperde het vermoeden dat elke basis slechts één oneven getal heeft, slechts één oneven veelvoud van 2, slechts één oneven veelvoud van 2^2, enzovoort. In 1950 verschijnt een artikel van De Bruijn [3] waarin hij de juistheid van dit vermoeden aantoont. Dit artikel wordt een inspiratiebron voor veel later werk, zowel van hemzelf als van anderen. Het volgende lemma is cruciaal.

Lemma 1. *Als $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ een basis is, dan is één b_i oneven en zijn alle andere even.*

Bewijs. Tenminste één b_i moet oneven zijn anders kan een oneven getal niet geschreven worden als combinatie van elementen uit de basis. Aangezien de opsomming van de elementen van B willekeurig is, is het voldoende om te laten zien dat $b_1 b_2$ even is.

Laat V_1 de verzameling gehele getallen zijn waarvoor in (1), $\epsilon_1 = 0$. Laat V_2 de verzameling gehele getallen zijn waarvoor in (1), $\epsilon_2 = 0$ en laat $W = V_1 \cap V_2$. Beschouw twee gehele getallen x en y met $x - y = b_1$. Veronderstel dat $y \in V_1$. Dan geldt $y = \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon_i(y) b_i$, wat impliceert dat $x = b_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \epsilon_i(y) b_i$. Dan is $x \notin V_1$, want volgens de definitie van een basis is x maar op één manier te schrijven in de vorm (1). Evenzo impliceert $\epsilon_1(x) = 1$ dat $\epsilon_1(y) = 0$. Dus precies één getal van x en y behoort tot V_1.

Als $x \in V_1$, dan zijn, volgens de bovenstaande redenering, $x - 2b_1$ en $x + 2b_1$ ook in V_1. Dus V_1 is periodiek met periode $2b_1$. Zo is ook V_2 periodiek met periode $2b_2$. Dan is $W = V_1 \cap V_2$ periodiek met periode $2b_1 b_2$. Laat p de kleinste periode van W zijn. Dus p deelt $2b_1 b_2$.

Laat voor $\lambda \in \{0, 1\}$ en $\mu \in \{0, 1\}$, $W_{\lambda\mu}$ de verzameling getallen zijn met $\epsilon_1 = \lambda$ en $\epsilon_2 = \mu$. Merk op dat de verzamelingen $W_{\lambda\mu}$ bijectief op elkaar afgebeeld kunnen worden door verschuivingen. Hieruit volgt dat elke verzameling $W_{\lambda\mu}$ evenveel elementen bijdraagt aan een periode. Dus is 4 een deler van de periode en daarom van $2b_1 b_2$. Met andere woorden, $b_1 b_2$ is even. $\square$

Het bewijs van Szele's vermoeden volgt nu met inductie. Laat $\{b_1, b_2, \ldots\}$ een basis zijn. Volgens Lemma 1 mogen we aannemen dat b_1 oneven is en dat alle andere b_i's even zijn. Nu is $\{b_2, b_3, \ldots\}$ een basis voor de even getallen en dus is

$$\{\tfrac{1}{2} b_2,\ \tfrac{1}{2} b_3,\ \tfrac{1}{2} b_4, \ldots\}$$

een basis voor de gehele getallen. Dan is dus precies één van die elementen oneven, enzovoort. □

Laat $D = [d_0, d_1, \ldots]$ een rij oneven getallen zijn. De rij heet een fundament als $d_0, 2d_1, 2^2d_2, \ldots$ een basis is. Stel dat D periodiek is. De Bruijn bewijst dat dan in een eindig aantal stappen vastgesteld kan worden of D een fundament is. Het artikel [3] bevat verder een lijst van alle twintig fundamenten $[a, b, a, b, \ldots]$ met periode 2 en

$$0 < -b < a \leq 100.$$

In een later artikel [7] is de bovengrens opgehoogd tot 1800.

Aan het eind van het artikel [3] duikt een vraag van Hajós op als een (fout) vermoeden. We zien dit terug in de volgende paragraaf.

Een paar jaar later beschouwt De Bruijn [5] een algemenere situatie. Een rij verzamelingen $S_1, S_2, S_3, \ldots$ van niet-negatieve gehele getallen heet een getalsysteem als elk geheel getal $x \geq 0$ uniek geschreven kan worden als $x = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots$ met $s_i \in S_i$ voor $i = 1, 2, 3, \ldots$. Een Brits getalsysteem heeft een eenvoudige structuur: Laat $g_1, g_2, g_3, \ldots$ een oneindige rij gehele getallen > 1 zijn. Schrijf $G_0 = 1, G_i = g_1g_2\ldots g_i$ voor $i > 0$ en definieer $S_i = \{0, G_{i-1}, 2G_{i-1}, \ldots, (g_i - 1)G_{i-1}\}$. Je krijgt het decimale stelsel door $g_1 = g_2 = \cdots = 10$ te nemen. De Bruijn bewijst dat elk getalstelsel van een Brits getalsysteem afgeleid kan worden. Het corresponderende probleem van getalsystemen voor $\mathbb{Z}$ is nog steeds open. Zie bijvoorbeeld [20–21, 32].

Factorisaties van eindige groepen

In 1953 verschijnen er twee artikelen over de factorisatie van eindige groepen [4–5]. Deze artikelen hebben tot op de dag van vandaag een behoorlijke invloed (zie bijvoorbeeld [1, 19, 28–29, 31]). In deze paragraaf is een groep synoniem met een eindige abelse groep.

Als G een direct product is van cyclische groepen van orde 2^3, 2 en 5, dan zeggen we dat G van het type $\{2^3, 2, 5\}$ is. Laat G een groep zijn en laat A en B deelverzamelingen van G zijn. We schrijven $G = AB$ als elk element g van G op een unieke manier te schrijven is als $g = ab$ met $a \in A$ en $b \in B$. In dat geval zeggen we dat $G = AB$ een ontbinding is van G in factoren A en B. Als H_1 en H_2 subgroepen zijn van G dan betekent $G = H_1H_2$ dat G het directe product is van H_1 en H_2.

Als A een deelverzameling is van een groep G en als $g \in G$ is, dan schrijven we

$$Ag = \{ ag \mid a \in A \}.$$

Een deelverzameling A van een groep G heet periodiek als er een element $g \in G$, $g \neq e$, is zodat $Ag = A$. Als A en B twee deelverzamelingen zijn van G dan schrijven we

$$AB = \{ ab \mid a \in A, b \in B \}$$
alléén als $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Een vermoeden van Minkowski werd bewezen door Hajós met behulp van de volgende stelling.

Stelling 1 (Hajós' stelling [23]). *Stel dat G een eindige abelse groep is en dat G een factorisatie $G = A_1 \cdots A_m$ heeft waarbij elke factor A_i van de volgende vorm is:*

$$A_i = \{ e, a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{m_i} \}.$$

Dan is tenminste één van de A_i's periodiek.

De stelling van Hajós leidde hem (en ook De Bruijn) tot de volgende vraag (in bovenstaande notatie): "*Als $G = AB$, is dan tenminste één van de factoren A, B periodiek?*"

Het antwoord (van Hajós) is 'nee' en dit leidde tot de vraag welke groepen G wel bovenstaande 'Hajós-eigenschap' bezitten. Het antwoord is intussen bekend. Sands geeft de volgende karakterisering [28] (met belangrijke bijdragen van De Bruijn en Rédei [27]).

Stelling 2. *Een eindige abelse groep G heeft de Hajós-eigenschap dan en alleen dan als G isomorf is met een ondergroep van een groep die van een van de volgende types is, waarbij $p < q < r < s$ priemgetallen zijn en $n \in \mathbb{N}$:*

$$\{p^n, q\}, \{p^2, q^2\}, \{p^2, q, r\}, \{p, q, r, s\},$$
$$\{p, p\}, \{p, 3, 3\}, \{3^2, 3\}, \{p^3, 2, 2\},$$
$$\{p^2, 2, 2, 2\}, \{p, 2^2, 2\}, \{p, 2, 2, 2, 2\},$$
$$\{p, q, 2, 2\}, \{2^n, 2\} \text{ en } \{2^2, 2^2\}.$$

Voor de cyclische groepen die de Hajós-eigenschap hebben werd in [29] een karakterisering gevonden (met behulp van constructies door De Bruijn).

Een nauw verwant probleem is de classificatie van groepen met de Rédei-eigenschap. Een groep G heeft de Rédei-eigenschap als voor elke ontbinding $G = AB$, met $e \in A \cap B$, tenminste één van A en B bevat is in een echte ondergroep van G (dus $\langle A \rangle \neq G$ of $\langle B \rangle \neq G$, waarbij $\langle A \rangle$ de kleinste ondergroep van G is die A bevat). Voor het gemak zegt men dat $G = \{e\}$ óók de Rédei-eigenschap heeft. Er zijn intussen wat resultaten bekend, zie [19, 30].

Sturmse woorden

Onder invloed van de ontwikkelingen van niet-periodieke betegelingen van het platte vlak door Penrose komt De Bruijn [8] er in 1981 toe om een heel ander soort complementariteit te onderzoeken.

Als je een oneindige rij van nullen en enen opschrijft, krijg je twee complementaire verzamelingen A en B door A te laten bestaan uit alle plaatsen waar een 0 staat en B uit alle plaatsen waar een 1 staat. Sturmse woorden genereren interessante rijen A en B. Ze zijn van de vormen

$$p(n) = \lceil \gamma + (n+1)/\alpha \rceil - \lceil \gamma + n/\alpha \rceil \quad (n \in \mathbb{Z}), \tag{2}$$

$$q(n) = \lfloor \gamma + (n+1)/\alpha \rfloor - \lfloor \gamma + n/\alpha \rfloor \quad (n \in \mathbb{Z}), \tag{3}$$

waarbij $\alpha > 1$ en γ reële getallen zijn en $\lceil * \rceil$ en $\lfloor * \rfloor$ staan voor respectievelijk naar boven en naar beneden afronden. Het bekendste Sturmse woord is het Fibonacci-woord: $010010100100101001010\cdots$. Dit kan geconstrueerd worden door met 0 te beginnen en telkens 0 door 01 en 1 door 0 te vervangen:

0
01
010
01001
01001010
⋮

In de limiet vind je het Fibonacci-woord, dat door de substitutie in zichzelf overgaat. Een verband met de Fibonacci-rij wordt duidelijk als je het aantal nullen en het aantal enen in elke rij telt. Een ander verband is dat je het volgende woord vindt door het voorlaatste woord achter het laatste woord te plaatsen. Immers, de Fibonacci-rij $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ is gedefinieerd door $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ voor $n \geq 2$. Je kunt zo ook het tweezijdige Fibonacci-woord construeren. Daartoe begin je met $1\underline{0}$ en pas je de substitutie $0 \to 010, 1 \to 01$ toe. Zie Figuur 1. Hier geeft de onderstreping aan waar de plaats met index 0 is. Het Fibonacci-woord is symmetrisch om deze positie. De corresponderende waarden in $(p(n))$ zijn $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2, \gamma = (3 - \sqrt{5})/4$.

De Bruijn noemt dit opbouwproces 'inflatie'. Je kunt ook het omgekeerde proces bewandelen waarbij door substituties eindige woorden steeds korter worden. De Bruijn noemt dat proces 'deflatie'. In het voorbeeld

$$\begin{array}{rrcl} q_0 = & 1 & \underline{0} & \\ q_1 = & 01 & \underline{0} & 10 \\ q_2 = & 01001 & \underline{0} & 1001010 \\ q_3 = & 0100101001001 & \underline{0} & 10010100100101001010 \\ & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Figuur 1 Constructie van het tweezijdige Fibonacci-woord

van het Fibonacci-woord is dat de substitutie $01 \to 0, 0 \to 1$. Bij het Fibonacci-woord is duidelijk hoe dat moet gebeuren: als een 0 gevolgd wordt door een 1, dan $01 \to 0$, anders $0 \to 1$. Bij ingewikkelder substituties kan er bij oneindige woorden een keuzemogelijkheid zijn. Ook kan er géén mogelijkheid zijn het deflatieproces voort te zetten.

De Bruijn generaliseert het begrip inflatie als volgt: construeer een rij $q_0, q_1, q_2, \ldots$ en verschuif vervolgens elke rij zo dat op den duur q_k in elk geval de plaatsen met indices $-k, -k+1, \ldots, k-1, k$ bezet. Noem de nieuwe rijen $r_0, r_1, r_2, \ldots$. Pas vervolgens diagonalisering toe: Kies eerst een deelrij $r_{k_1}, r_{k_2}, \ldots$ zodat kolom 0 vanaf zeker moment constant is. Kies daarvan weer een deelrij zo dat de kolommen $-1, 0, 1$ vanaf een zeker punt constant zijn. Ga zo door. Vervolgens bewijst De Bruijn een stelling van het volgende type: *Een tweezijdige oneindige rij van nullen en enen kan met zo'n diagonaliseringsproces geconstrueerd worden dan en alleen dan als zij van de vorm $(p(n))$ of $(q(n))$ is.*

Sturmse woorden hebben een eenvoudige meetkundige interpretatie. Immers, de grafiek van $f(x) := y + x/\alpha$ is een lijn in het platte vlak. Neem ruitjespapier met afstand tussen opeenvolgende evenwijdige lijnen gelijk aan 1. Dan is $p(n) = 1$ dan en alleen dan als er geheel getal zit tussen $f(n+1)$ en $f(n)$. Een woord heet Sturms dan en alleen dan als de cotangens α van de hellingshoek irrationaal is. Dan gaat de lijn door ten hoogste één roosterpunt, dat wil zeggen punt in $\mathbb{Z}^2$. De rijen $(p(n))$ en $(q(n))$ verschillen alleen als de lijn door zo'n roosterpunt gaat. Het enige verschil is dan dat $(p(n), p(n+1)) = (0, 1)$, terwijl $(q(n), q(n+1)) = (1, 0)$ als $f(n) \in \mathbb{Z}$. Merk op dat als α rationaal is, de woorden $(p(n))$ en $(q(n))$ periodiek zijn.

Je kunt de lijn als volgt in intervallen verdelen. Beschouw alle segmenten ter lengte 1 tussen twee roosterpunten van het ruitjespapier waar de lijn doorheen snijdt (dus zowel horizontaal als verticaal). Neem de middens van deze segmenten en projecteer al deze punten loodrecht op de lijn. Het is niet moeilijk na te gaan dat er zo intervallen van twee lengtes ontstaan, de ene lengte voor de opeenvolging 00, de andere voor de opeenvolgingen 01 en 10.

In verband met de ontwikkeling van zijn theorie over Penrose-betegelingen, keert De Bruijn [14] nog een keer terug naar de Sturmse rijen. Daarover meer in de volgende paragraaf.

Penrose-betegelingen

In de kristallografie worden alle bekende kristalstructuren geclassificeerd. Ze plachten periodiek te zijn met drie-, vier- of zesvoudige symmetrie als basis. Toen in de jaren zeventig van de vorige eeuw Roger Penrose [25–26] een fascinerende klasse van niet-periodieke betegelingen ontdekte, trok dat de aandacht van wiskundigen en natuurwetenschappers. Gardner [22] publiceerde een overzichtsartikel waarin hij zich concentreerde op een niet-periodieke betegeling van Conway met maar twee verschillende tegels, 'pijlen' en 'vliegers' (*darts* en *kites*). In 1981 publiceerde De Bruijn [9] een wiskundige fundering voor deze betegeling. Overigens gaf hij de voorkeur aan een equivalent stel tegels: 'dunne' ruiten met hoeken van $36°$ en $144°$ en 'dikke' ruiten met dezelfde zijdelengte en hoeken van $72°$ en $108°$. Zie Figuur 2. Het werd wereldnieuws toen Dan Shechtman in 1982 aantoonde dat niet-periodieke vijfhoekige kristalstructuren echt in de natuur voorkomen. In 2011 ontving Shechtman de Nobelprijs voor de Scheikunde voor deze ontdekking.

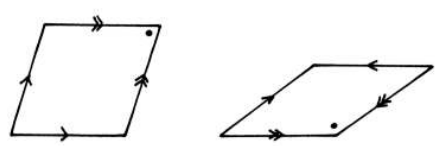
Om gevoel voor deze betegelingen te krijgen eerst enkele eenvoudigere situaties.

Stel je de driedimensionale ruimte voor waarbij alle punten van $\mathbb{Z}^3$ op afstand 1 door lijnstukken verbonden zijn. Neem een willekeurig vlak in de ruimte en beschouw die lijnstukken die een punt van het vlak bevatten. Projecteer de middens van deze lijnstukken loodrecht op het vlak. Dat levert een verzameling punten op die in het algemeen niet periodiek zal zijn (dat wil zeggen niet door een verschuiving in zichzelf overgaat), maar waarvan je je wel kunt voorstellen dat je het vlak kunt opvullen met ruiten die zulke projectiepunten als hoekpunten hebben. Merk op dat er (op verschuiving na) maar eindig veel verschillende ruiten voorkomen. Zie bijvoorbeeld [2].

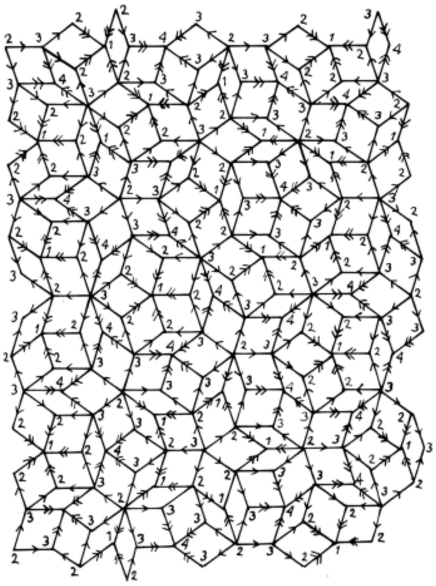
Je kunt ook in de drie-dimensionale ruimte alle gevulde vierkantjes met zijdelengte 1 en hoekpunten in $\mathbb{Z}^3$ beschouwen. Neem nu een willekeurige lijn en beschouw de vierkantjes die een punt van de lijn bevatten. Projecteer de middens van deze vierkantjes loodrecht op de lijn. Dat levert een verdeling van de lijn in intervallen op die in het algemeen niet periodiek zal zijn, maar waar wel maar eindig veel verschillende intervallen voorkomen.

De Bruijn realiseert zich dat de betegelingen van Conway op soortgelijke wijze als projecties kunnen worden geconstrueerd. Alleen moet je daarvoor in de vijfdimensionale ruimte alle kubussen met zijdelengte 1 en hoekpunten in $\mathbb{Z}^5$ beschouwen. Neem weer een willekeurig vlak, maar nu in $\mathbb{R}^5$, en beschouw alle gevulde kubusjes die een punt van het vlak bevatten. Projecteer de middens van die kubussen loodrecht op het vlak. Dan vind je weer een in het algemeen niet-periodieke verzameling punten. Verder kun je het vlak opvullen met ruiten die projectiepunten als hoekpunten hebben. Ook nu is het aantal (op verschuiving na) verschillende ruiten eindig. Door een gunstige keuze van het vlak, die weer met de gulden snede te maken heeft, lukt het om het aantal op verschuiving en rotatie na verschillende ruiten tot twee te beperken. Zie Figuur 3. Op alleen verschuiving na zijn er tien verschillende ruiten, want elke ruit komt ook voor gedraaid over $72°, 144°, 216°, 288°$, de hoeken van een regelmatige vijfhoek.

Net als bij Sturmse woorden is er in het algemeen maar één manier om bij een gegeven vlak de kubusjes te kiezen, dat wil zeggen dat $(p(n)) = (q(n))$. In dit geval zijn er echter uitzonderingsgevallen waarin twee of zelfs tien keuzes mogelijk zijn. De Bruijn analyseert die uitzonderingsgevallen in zijn artikel. Hij bewijst verder dat het roosterpunt $(k_0, k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbb{Z}^5$ correspondeert met het knooppunt $k_0 + k_1\zeta + k_2\zeta^2 + k_3\zeta^3 + k_4\zeta^4$ in het complexe vlak, waarbij $\zeta = e^{2\pi i/5}$ de vijfde eenheidswortel is en het complexe vlak met het doorsnijdingsvlak geïdentificeerd wordt. Bovendien drukt hij in termen van het vlak precies uit welke punten $(k_0, k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbb{Z}^5$ worden geprojecteerd. Deze karakterisatie correspondeert met de functie $(p(n))$ die bij het Fibonacci-woord hoort.



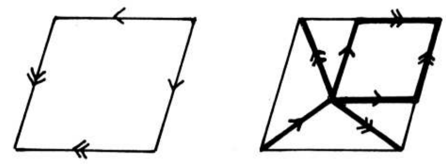
Figuur 2 De dikke en de dunne ruit. Voor pijlen en stip, zie toelichting bij Figuur 3.



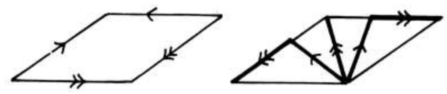
Figuur 3 Het niet-periodieke patroon van dunne en dikke ruiten. Pijlen en nummers duiden de oriëntatie aan. 'Positieve' dikke ruiten lopen van 2 via 3 en 3 naar 4. Zij hebben zijden met hoeken $0^\circ, 72^\circ$ en 144° ten opzichte van de positieve reële as. 'Negatieve' dikke ruiten lopen van 3 via 2 en 2 naar 1 en hebben zijden met hoeken $36^\circ, 108^\circ$ en 180° ten opzichte van de positieve reële as. Voor dunne ruiten zijn er ook twee mogelijkheden. De stippen in Figuur 2 corresponderen met knopen met nummers 1 en 4.

De Bruijn laat ook zien hoe de betegeling door inflatie en deflatie in zichzelf kan worden overgevoerd waarbij er respectievelijk een vergroting en een verkleining met een factor $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ optreedt. De dunne ruit gaat bij deflatie over in twee halve dikke en twee halve dunne ruiten, de dikke ruit in één dikke ruit, twee halve dikke ruiten en twee halve dunne ruiten, waarbij de halve ruiten zo georiënteerd zijn dat telkens twee halve weer een hele ruit vormen. Zie Figuur 4 en 5.

Later heeft De Bruijn nog verschillende aspecten van Penrose-betegelingen verder uitgewerkt. In [11] beschrijft hij structuren in ruimten van willekeurige eindige dimensie waarvan de Sturmse rijen en Penrose-betegelingen speciale gevallen zijn. In [10] werkt hij uit hoe Sturmse rijen hierin passen. In dit artikel en in [12] worden ook de Fourier-transformaties van quasikristallen bestudeerd. In [14–15] presenteert hij een methode, *updown generation* genoemd, oorspronkelijk ontdekt door Conway en herontdekt door De Bruijn en door Lalvani, maar niet eerder gepubliceerd. De methode produceert Sturmse rijen en Penrose-betegelingen als oneindige paden door een enkelvoudige georiënteerde graaf. Bovendien zijn het de enige structuren die met deze methode geproduceerd kunnen worden. Verder publiceerde hij enkele additionele resultaten over Penrose-betegelingen in [17–18] en teksten van Nederlandstalige voordrachten over zijn werk in [13, 16]. Zo loopt De Bruijns werk over complementariteit als een rode raad door zijn indrukwekkende oeuvre en beslaat het bijna een halve eeuw.



Figuur 4 Deflatie van de dikke ruit



Figuur 5 Deflatie van de dunne ruit

Referenties

1 K. Amin, Factorization of finite abelian groups, *International Journal of Algebra* **6** (2012), pp. 101–107.

2 V. Berthé and L. Vuillon, Tilings and rotations: a two-dimensional generalization of Sturmian sequences, *Discrete Math.* **223** (2000), pp. 27-53.

3 N.G. de Bruijn, On bases for the set of integers, *Publicationes Mathematicae* **1** (1950), pp. 232–242.

4 N.G. de Bruijn, On the factorization of finite abelian groups, *Indagationes Mathematicae* **15** (1953), pp. 258–264.

5 N.G. de Bruijn, On the factorization of cyclic groups, *Indagationes Mathematicae* **15** (1953), pp. 370–377.

6 N.G. de Bruijn, On number systems, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 3/**4** (1956), pp. 15–17.

7 N.G. de Bruijn, Some direct decompositions of the set of integers, *Mathematics of Computation* **18** (1964), pp. 537–546.

8 N.G. de Bruijn, Sequences of zeros and ones generated by special production rules, *Indagationes Mathematicae* **43** (1981), pp. 27-37.

9 N.G. de Bruijn, Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane (I and II), *Indagationes Mathematicae* **43** (1981), pp. 38–66.

10 N.G. de Bruijn, Quasicrystals and their Fourier transforms, *Indagationes Mathematicae* **48** (1986), pp. 123–152.

11 N.G. de Bruijn, Dualization of mulitgrids, In Proceedings of the International Workshop Aperiodic Crystals, Les Houches, 1986. *Journal de Physics* **47**, Colloque C3, suppl. to nr. 7, July 1986, pp. 9-18.

12 N.G. de Bruijn, Modulated quasicrystals, *Indagationes Mathematicae* **49** (1987), pp. 121–132.

13 N.G. de Bruijn, Wiskundige theorie van quasikristallen, *Nederl. Akad. Wetensch. Amsterdam. Verslag van de gewone vergadering afdeling Natuurkunde* **96** (1987), pp. 5–10.

14 N.G. de Bruijn, Updown generation of Beatty sequences, *Indagationes Mathematicae* **51** (1989), pp. 385–407.

15 N.G. de Bruijn, Updown generation of Penrose patterns, *Indagationes Mathematicae, N.S.* **1** (1990), pp. 201–220.

16 N.G. de Bruijn, Vloerbedekkingen met Penrose tegels, *Nieuwe Wiskrant* **10** (1991), pp. 32–37.

17 N.G. de Bruijn, Penrose patterns are almost entirely determined by two points, *Discrete Mathematics* **106/107** (1992), pp. 97–104.

18 N.G. de Bruijn, Remarks on Penrose tilings, *The Mathematics of Paul Erdős, II*, Algorithms Combin., 14, Springer, Berlin, 1997, pp. 264-283.

19 M. Dinitz, Full rank tilings of finite abelian groups, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **20** (2006), pp. 160–170.

20 J. Dowell, Periodic basic sequences, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 3/**16** (1968), pp. 112–115.

21 S.J. Eigen, Y. Ito and V.S. Prasad, Universally bad integers and the 2-adics, *Journal of Number Theory* **107** (2004), pp. 322–334.

22 M. Gardner, *Scientific American*, Jan. 1977, pp. 110-112.

23 G. Hajós, Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes met einem Würfelgitter, *Mathematische Zeitschrift* **47** (1941), pp. 427–467.

24 L. Moser, An application of generating series, *Mathematical Magazine* **35** (1962), pp. 37–38.

25 R. Penrose, The rôle of aestetics in pure and applied mathematical research, *Bull. Inst. Math. Appl.* **10** (1974), pp. 266-271.

26 R. Penrose, Pentaplexity, *Mathematical Intelligencer* vol.**2**(1) (1979), pp. 32-37.

27 L. Rédei, *Lacunary polynomials over finite fields*, Akademiai Kiado, 1973. Also published by North-Holland, Amsterdam - London; American Elsevier, New York, 1973.

28 A.D. Sands, The factorization of abelian groups (II), *The Quarterly Journal of Mathematics* **13** (1962), pp. 45–54.

29 A.D. Sands, Factoring finite abelian groups, *Journal of Algebra* **275** (2004), pp. 540–549.

30 S. Szabó, Constructions related to the Rédei property of groups, *Journal of the London Mathematical Society* **73** (2006), pp. 701–715.

31 S. Szabó and A.D. Sands, *Factoring groups into subsets*, Chapman & Hall / CRC, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **257**, 2009.

32 R. Tijdeman, Decomposition of the integers as a direct sum of two subsets, *Number Theory, Paris 1992-3*, Ed. by S. David, LMS LNS 215, Cambridge University Press, 1995, pp. 261-276.