Nico Temme
Abcoude
nico.temme@cwi.nl

In Memoriam Nicolaas Govert de Bruijn (1918–2012)

Asymptotiek

De Bruijns boek Asymptotic Methods in Analysis **was een van de eerste boeken over asymptotische methoden. Nico Temme, emeritus onderzoeker aan het CWI, beschrijft de bijzondere betekenis van dit boek.**

Bekende voorbeelden van asymptotische relaties zijn

$$\begin{aligned} &(1+x/n)^n \sim e^x \quad \text{en} \\ &n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n, \quad n \to +\infty, \end{aligned} \tag{1}$$

waarvan de tweede aan Stirling wordt toegekend. We bedoelen met het $\sim$ symbool in $f(x) \sim g(x)$, $x \to +\infty$, dat $g(x)$ voor voldoend grote positieve eindige waarden van x ongelijk nul is en dat $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = 1$.

De relaties in (1) zijn erg nuttig, maar asymptotische methoden kunnen nog veel meer informatie geven. Het blijkt dat wij een ontwikkeling in de vorm

$$\begin{aligned} n! =& \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n \\ &\cdot \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right), \\ & n \to +\infty, \end{aligned} \tag{2}$$

kunnen afleiden. Hier bedoelen wij met het $\mathcal{O}$-symbool in de relatie $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, $x \to \infty$, dat er positieve constanten x_0 en C te vinden zijn zodat $|f(x)| \le C|g(x)|$ als $x \ge x_0$. Met asymptotische methoden kunnen meer en meer termen in de ontwikkeling in (2) gevonden worden, en in feite kan een oneindige reeks opgesteld worden waarvan wij de coëfficiënten stuk voor stuk kunnen berekenen. In feite kunnen wij die ontwikkeling gebruiken voor de gammafunctie. Immers, $n! = \Gamma(n+1)$, en er geldt

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt \\ &\sim \sqrt{2\pi x}\, e^{-x} x^x \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{x^k}, \\ & x \to +\infty, \end{aligned} \tag{3}$$

waarin $c_0 = 1, c_1 = 1/12, c_2 = 1/288$. Door altijd in zo'n ontwikkeling een eindig aantal termen met een $\mathcal{O}$-symbool voor de restterm af te leiden is deze schrijfwijze goed gedefinieerd, al is de oneindige reeks in dit geval niet convergent.

Ook voor de eerste relatie in (1) kan er een reeksontwikkeling worden afgeleid van de vorm

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\ &= e^x \left(1 + \frac{a_1(x)}{n} + \frac{a_2(x)}{n^2} + \cdots\right), \end{aligned} \tag{4}$$

een convergente reeks deze keer als $n > |x|$, waarvan de coëfficiënten $a_k(x)$ eenvoudig te bepalen zijn.

De Bruijns asymptotiekboek

Na deze inleiding in de asymptotiek richten wij ons op De Bruijns magnum opus [1] op dit gebied, namelijk het boek *Asymptotic Methods in Analysis* (1958). Het boek werd erg enthousiast ontvangen. Enerzijds, dit boek was een van de eerste boeken over asymptotische methoden (eigenlijk was er alleen Erdélyi's boek *Asymptotic Expansions* [2] uit 1956), terwijl er in de literatuur erg veel te vinden was over dit onderwerp. Anderzijds, het boek was erg bijzonder vanwege de vele originele onderwerpen en voorbeelden, maar vooral ook door de onderhoudende stijl. Ter inleiding probeert De Bruijn eerst te omschrijven wat asymptotiek is en welke problemen binnen dit onderwerp vallen. Hij maakt zich er handig van af door te schrijven dat asymptotiek dat gedeelte van de analyse is waarin problemen worden beschouwd die in zijn boek aan de orde komen.

De analyse-onderwerpen asymptotiek en numerieke wiskunde zijn nauw verbonden, omdat veel functies, integralen, oplossingen van differentiaalvergelijkingen, enzovoorts, kunnen worden berekend door gebruik te maken van asymptotische ontwikkelingen. De Bruijn geeft als voorbeeld van het nut van asymptotiek voor numeriek gebruik een amusante discussie tussen een (superieure) asymptoticus en een rechttoe-rechtaan numeriek wiskundige, die ten slotte knarsetandend moet erkennen dat de berekening van de beschouwde functie $f(x)$ voor $x = 1000$ een maand rekentijd zal vergen, terwijl de asymptotische methode onmiddellijk een volledig bevredigend antwoord geeft.

De asymptotische reeks in (2) kan worden afgeleid door gebruik te maken van de vermelde integraal van Euler voor de gammafunctie. De Bruijn gebruikt echter de Euler–Maclaurin-sommatieformule om een asymptotische reeks af te leiden voor $\log\Gamma(z)$. Maar hij besteedt een groot deel van zijn boek aan

de asymptotische behandeling van integralen. Met name de zadelpuntsmethode wordt uitgebreid behandeld en er bestaat geen betere introductie tot dit onderwerp.

In deze methode worden integralen van de vorm $\int_{\mathcal{C}} e^{-zf(w)} g(w)\,dw$ langs een contour $\mathcal{C}$ in het complexe vlak behandeld. Na een verschuiving van het contour door een zadelpunt van $e^{-|zf(w)|}$ en een transformatie probeert men zo'n integraal in de vorm $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt^2} h(t)\,dt$ te brengen, waarbij het punt $t = 0$ in het t-domein correspondeert met een zadelpunt in het w-domein. De exponentiële functie in de laatste integraal heeft een herkenbaar zadelpunt voor $t = 0$ en voor deze integraal kunnen wij een asymptotische uitdrukking voor grote waarden van z afleiden door de functie $h(t)$ in machten van t te ontwikkelen.

Als toepassing van de zadelpuntsmethode komen lastige problemen aan de orde, zoals het gedrag van de de som

$$S(s,n) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{k+n} \binom{2n}{k}^s \qquad (5)$$

voor grote waarden van n; s is een reëel getal. Voor gehele positieve waarden van s wordt $S(s,n)$ eerder in het boek behandeld. Een ander voorbeeld is een generalisatie van de gammafunctie:

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty e^{-P(u)} u^{s-1}\,du, \\ P(u) &= u^N + a_{N-1}u^{N-1} + \cdots + a_0 \end{aligned} \qquad (6)$$

voor $s \to \infty$ met positief reëel deel.

Het bijzondere van De Bruijns boek is ook dat er speciale onderwerpen worden behandeld die je in andere asymptotiekboeken niet zomaar tegenkomt. Neem bijvoorbeeld geïtereerde functies, met als simpel geval de rij $\{x_n\}$ gegeven door $x_{n+1} = \sin(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x_0 \in (0, \pi)$. Dan geldt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. De Bruijn geeft in een uitvoerige behandeling de asymptotische ontwikkeling, waarvan de eerste termen zijn

$$x_n = \sqrt{\frac{3}{n}} \left(1 - \frac{3\log n}{10n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (7)$$

Termen van hogere orde hebben een tamelijk ingewikkelde vorm.

Een ander onderwerp is impliciete functies, weer met eenvoudige leerzame voorbeelden, zoals de vergelijking $xe^x = t$. Hier wordt het gedrag van $x(t)$ voor grote waarden van t afgeleid. Het eerste resultaat is $x(t) = \log t - \log\log t + \mathcal{O}(\log\log t/\log t)$, waarna met behulp van een slimme analyse een volledige expansie in de vorm van een convergente dubbelreeks wordt bepaald.

De interesse van De Bruijn in de asymptotiek in de jaren voorafgaande aan zijn boek blijkt uit het colloquium 'Speciale asymptotische problemen' dat in 1954–1955 onder zijn leiding gehouden werd op het Mathematisch Centrum in Amsterdam en dat werd herhaald in 1956–1957 aan de Technische Universiteit in Eindhoven; op deze colloquia is het boek gebaseerd. Asymptotiek werd in eerdere jaren op het MC door J.G. van der Corput (een van de oprichters en de eerste directeur van het MC) met diverse medewerkers en gasten uitvoerig bestudeerd. Met name het werk op het gebied van de stationaire fase van Van der Corput heeft grote bekendheid gekregen.

Het verbaasde Erdélyi in zijn overigens lovende bespreking van De Bruijns boek in de *Mathematical Reviews* dat deze geen aandacht heeft besteed aan die methode (ook vond hij het boek nogal 'conversational'). Maar ja, De Bruijn heeft, afgezien van de zadelpuntsmethode, veel methoden niet in algemene zin behandeld in zijn wonderlijke boek, waar nog vaak naar verwezen wordt.

Referenties

1 N. G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*, Bibliotheca Mathematica, Vol. 4, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1958.

2 A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions*, Dover Publications Inc., New York, 1956.