Guido Janssen
Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
a.j.e.m.janssen@tue.nl

In Memoriam Nicolaas Govert de Bruijn (1918–2012)

Wiskundige tijd-frequentieanalyse

In de jaren dat Dick de Bruijn werkzaam was voor het Natuurkundig Laboratorium van Philips (Natlab) stond hij mede aan de basis van de wiskundige tijd-frequentieanalyse. Guido Janssen, onderzoeker aan de Technische Universiteit Eindhoven en tot 2010 werkzaam bij Natlab, beschrijft De Bruijns rol in het ontstaan van deze nieuwe discipline.

Van ongeveer 1945 tot 1983 was De Bruijn deeltijds werkzaam bij het Natuurkundig Laboratorium (NatLab) van Philips, dat een grote naam had verworven als industrieel onderzoekslaboratorium met aandacht voor wetenschappelijk fundament. De onderzoekers konden in grote vrijheid hun werk doen, en in die omgeving voelde De Bruijn zich goed thuis, waarbij hij met zijn scherp oog voor toepassingen van de wiskundige analyse kon bijdragen aan het wetenschappelijk klimaat.

Omdat Philips apparatuur voor het weergeven van geluid maakte, bestond er in het NatLab interesse voor methodes voor het beschrijven van de signalen (functies van een variabele) die daarbij optreden. Het was tot het midden van de veertiger jaren gebruikelijk om de signaalbeschrijving te doen ofwel direct in het domein van de tijdvariabele t, ofwel, via de Fourier-transformatie, in het domein van de frequentievariabele f. Bij de karakterisatie van tijd-invariante lineaire systemen (gekenmerkt door een kernelfunctie van het convolutietype) was het gebruik van de Fourier-transformatie ook zeer gangbaar. De Fourier-transformatie van de kernelfunctie laat namelijk zien hoe de signalen die door het systeem gaan, vervormd worden in termen van vertragingen en versterkingen van de frequentiecomponenten van het signaal.

Hoewel de Fourier-transformatie een handig stuk gereedschap is, ontbreekt er toch wat aan als men denkt aan signalen zoals spraak en muziek waarvan de frequentie-inhoud met de tijd varieert. De Fouriertransformatie van zulke signalen is hierbij niet bruikbaar, domweg omdat de tijdvariabele ontbreekt. En ook het signaal zelf, als tijdfunctie, geeft een weinig leesbaar beeld. Een inzichtelijker manier van werken hier is die van een componist die het signaal dat hij te horen wil krijgen, weergeeft op een blad papier (partituur) met in de horizontale richting de tijd en in de verticale richting de frequentie, waarbij op evenwijdige horizontale lijnen de tonen van variabele frequentie, lengte en amplitude worden aangegeven. Bij signaalvervorming door een tijdinvariant lineair systeem zou men ook graag iets hebben waarbij men ziet hoe de vertragingen en versterkingen van de frequentiecomponenten in het signaal in de tijd worden opgebouwd.

De ideeën van Gabor

In 1946 verscheen een baanbrekend artikel [3] van D. Gabor waarin het idee om signalen in tijd en frequentie te representeren gelanceerd werd. Gabor begint met op te merken dat er een ondergrens zit aan de mate waarin een signaal in tijd en frequentie gelokaliseerd is. Dit heeft te maken met het onzekerheidsprincipe van Heisenberg, dat tot uitdrukking gebracht wordt door de ongelijkheid $\Delta t \Delta f \geq 1$, met Δt en Δf de spreidingen van het signaal in de tijd en in de frequentie. Er is hier gelijkheid wanneer het signaal Gaussisch is, en dit is de keuze die Gabor maakt voor zijn elementaire signaal. Vervolgens beschouwt Gabor het probleem of en hoe men een willekeurig signaal kan representeren als een lineaire combinatie van elementaire signalen die in tijd en frequentie verschoven zijn naar punten (na, mb) in het tijd-frequentievlak met gehele n en m en roosterparameters a en b.

Bij het soort van problemen dat Gabor bekeek, is het nuttig als men van een signaal $g(t)$ een idee heeft hoe de energie over het tijd-frequentievlak verdeeld is. Een voorstel in wiskundige termen hiervoor werd gedaan door J. Ville in [4], namelijk

$$W_{gg}(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f s} \cdot g(t + \tfrac{1}{2}s)\overline{g(t - \tfrac{1}{2}s)}\, ds. \tag{1}$$

De verdelingsfunctie in (1) was in 1932 geïntroduceerd door Wigner [5] in een kwantummechanische context en door Ville herontdekt in 1948 met een argumentatie voor het voorstel (1) die nauw samenhangt met de kwantisatieregel van Weyl.

Wigner-distributies

In de periode eind veertiger jaren tot midden zestiger jaren verscheen er wel literatuur in de fysica en de elektrotechniek over Wigner-distributies en verwante tijd-frequentieverdelingen, maar daarbij ontbrak het meestal aan wiskundige strengheid. Er zijn verder moeilijkheden bij het interpreteren van (1) als een energieverdeling van g in tijd en frequentie. Vanwege het onzekerheidsprincipe is namelijk een puntsgewijze energetische interpretatie van (1) een dubieuze zaak. Zo is W_{gg} voor alle g wel overal reëel, maar neemt (uitgezonderd voor Gaussische g) zowel positieve als negatieve waarden aan. Bij het stellen en beantwoorden van vragen als "wat zijn de merites van W voor tijd-frequentieanalyse?”, “hoe wordt het onzekerheidsprincipe weerspiegeld door W?”, en “hoe moet men omgaan met het probleem van puntsgewijze energetische interpretatie?”, bestaat behoefte aan wiskundige precisie.

Een grote stap vooruit in de wiskundige behandeling van de Wigner-distributie en bovengenoemde problemen werd in 1965 gezet door De Bruijn in [1]. Hij somt een aantal eigenschappen op van W die men op signaaltheoretische gronden van een tijd-frequentieverdeling wenst. Verder laat hij zien dat voor een genormeerd signaal g het minimum over (t_0, f_0) van

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [(t-t_0)^2+(f-f_0)^2] \cdot W_{gg}(t,f)\,dt\,df \tag{2}$$

minimaal gelijk is aan $1/(2\pi)$, met gelijkheid voor $t-f$ verschoven kopieën van de standaard Gauss-functie $2^{1/4}\,\exp(-\pi t^2)$. Ten slotte geeft hij een wiskundige invulling aan het kijken naar het tijd-frequentievlak met de bril van Heisenberg: voor iedere g en iedere t_0 en f_0 is

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[-\frac{2\pi}{\alpha}(t-t_0)^2-\frac{2\pi}{\beta}(f-f_0)^2\Big] \cdot W_{gg}(t,f)\,dt\,df \tag{3}$$

niet-negatief als $\alpha\beta \geq 1$ is. Dus Gaussische gemiddeldes van W, die in zekere zin overeenstemmen met het onzekerheidsprincipe, zijn niet-negatief.

Kwantummechanische context

Terwijl de resultaten in [1] over de Wigner-distributie geïnspireerd zijn door signaaltheoretische vragen, is het artikel [2] van De Bruijn meer gericht op wiskundige strengheid en het naar voren brengen van de fraaie wiskundige eigenschappen van de Wigner-distributie. Een formule als

$$W_{gg}(t,f) = c\,\delta(t-\alpha f)\,, \tag{4}$$

waarbij $g(t)$ de ‘chirp’ $\exp(\pi i\alpha t^2)$ is, is op zich zeer bevredigend omdat het laat zien dat de Wigner-distributie van g volledig geconcentreerd is op de kromme $(t, (\frac{1}{2}\,\alpha t^2)')$ van ‘instantane frequenties’. Om over zulke formules wiskundig netjes te kunnen praten, voerde De Bruijn een ruimte van gegeneraliseerde functies in waarin de invariantie-eigenschappen en symmetrieën van de Wigner-distributie maximaal tot uiting komen. Een centrale rol wordt hierbij gespeeld door de operator $t^2-(\frac{d}{dt})^2/4\pi^2$ die optreedt bij het bestuderen van de kwantummechanische harmonische oscillator. Deze operator is de infinitesimaalgenerator van een semigroep van operatoren waarvan De Bruijns *smoothing operators* speciale gevallen zijn. De ruimte van testfuncties bestaat uit de vereniging van alle beelden van L^2 onder deze smoothing operators en valt samen met een ruimte $(S_{1/2}^{1/2})$ van analytische functies van het Gelfand–Shilov-type. In deze setting kunnen bijvoorbeeld de operatoren die op natuurlijke wijze met symplectische transformaties van het tijd-frequentievlak corresponderen, bestudeerd worden. Het verband tussen operator T en de corresponderende symplectische transformatie M wordt glashelder weerspiegeld door de Wigner-distributie:

$$W_{Tg,Tg}(t,f) = W_{gg}(M(t,f))\,. \tag{5}$$

In dezelfde setting laat De Bruijn zien hoe men in de kwantummechanische context Weyls regel van correspondentie tussen functies gedefinieerd op het fasevlak en operatoren van L^2 kan beschouwen in termen van Wigner-distributies.

Een bloeiend vak

Met de artikelen [1] en [2] heeft De Bruijn wiskundige strengheid gebracht in de theorie van de Wigner-distributie op een manier die inzichtverhogend is voor de gebieden waar die gebruikt wordt. Deze artikelen waren een beginsignaal van een periode van toenemende activiteit op het gebied van de tijd-frequentieanalyse en haar toepassingen. Rond 1980 was dit nogal een Eindhovense aangelegenheid. Vanuit Philips NatLab verschenen artikelen die grote invloed hebben gehad op de populariteit van de Wigner-distributie in de elektrotechnische gemeenschap. Tevens werd daar de Wigner-distributie ingezet als middel om tijd-invariante systemen, zoals luidsprekers, te karakteriseren. Op de TU Eindhoven werd werk gedaan aan de Wigner-distributie bij de beschrijving van optische signalen. Aan de meer wiskundige kant werd daar gewerkt aan gebruik van de Wigner-distributie bij de harmonische analyse van gegeneraliseerde stochastische processen, en aan de functionaal-analytische aspecten van De Bruijns methode om gegeneraliseerde functies met behulp van semigroepen van operatoren in te voeren.

Vanaf 1980 begon de wiskundige tijd-frequentieanalyse wat meer trekken van een discipline te krijgen. Er kwamen beoefenaren in Wenen, Lyon en Brussel, en er werd meer algemeen naar tijd-frequentieverdelingen en -transformaties gekeken. Zo werd in die tijd voor het eerst analytisch werk gemaakt van Gabors idee om signalen voor te stellen als lineaire combinatie van in tijd en frequentie verschoven kopieën van een elementair signaal. In de tweede helft van de tachtiger jaren maakte de discipline-in-wording een enorme groeisprong door omdat ze kon meeliften met het succes van de tijd-schaalanalyse en de wavelets in de signaaltheorie en toegepaste wiskunde. Ook daarna bleef er groei, waarbij bijvoorbeeld in de negentiger jaren de Gabor-analyse tot volle wasdom kwam.

De wiskundige tijd-frequentieanalyse is nu uitgegroeid tot een onderdeel van de (toegepaste) wiskunde waarin elementen terecht zijn gekomen van vakgebieden als

- (mathematische) analyse,
- harmonische analyse en Fourier-analyse,
- complexe-functietheorie,
- theorie van groeprepresentaties,
- functionaalanalyse, (frame)operatortheorie,
- (numerieke) lineaire algebra,
- differentiaalmeetkunde.

Ook zijn er heel wat tekstboeken verschenen, er worden workshops georganiseerd en er zijn tijdschriften met speciale aandacht voor tijd-frequentieanalyse. We kunnen met recht spreken van een bloeiende tak van de toegepaste wiskunde. De Bruijn stond helemaal aan het begin van het ontstaan daarvan.

Referenties

1 N.G. de Bruijn, Uncertainty principles in Fourier analysis, in O. Shisha (ed.), *Inequalities*, Academic Press, New York, 1967, pp. 57–71.

2 N.G. de Bruijn, A theory of generalized functions, with applications to Wigner distribution and Weyl correspondence, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 3/21 (1973), 205–280.

3 D. Gabor, Theory of Communication, *J. Inst. Elec. Engrs.* (London), 93 (1946), 429–457.

4 J. Ville, Théorie et applications de la notion de signal analytique, *Câbles et Transmission*, 2 (1948), 61–74.

5 E. Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Phys. Rev.*, 40 (1932), 749–759.