Joseph Steenbrink
IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
Postbus 9010
6500 GL Nijmegen
j.steenbrink@math.ru.nl


Joseph Steenbrink

Afscheidsrede

Mijn spectrum

Sinds de invoering van coördinaten door Descartes bestaat er een nauw verband tussen formules en meetkundige figuren. Singulariteiten zijn meetkundige figuren die worden beschreven door formules waarvan constante en lineaire term nul zijn. Een lineaire benadering hebben ze niet, en daarom moeten andere middelen worden aangewend om ze te begrijpen. Op 17 februari 2012 nam Joseph Steenbrink afscheid als hoogleraar wiskunde aan de Radboud Universiteit Nijmegen. In zijn afscheidsrede richt hij de schijnwerper op het singulariteitenspectrum. Hij laat daarbij ook een verband zien met toonreeksen in de muziek. Steenbrink werd in 1978 lector in Leiden, in 1980 hoogleraar aldaar en in 1988 hoogleraar in Nijmegen. Zijn specialisme is algebraïsche meetkunde, in het bijzonder de verbinding tussen Hodgetheorie en singulariteitentheorie. Hij is daarnaast klavecinist, organist en koorzanger.

In deze afscheidsrede kijk ik terug op een hoogleraarschap van ruim twintig jaar aan de Radboud Universiteit Nijmegen. Het was een turbulente periode. Het begin van mijn verblijf in Nijmegen viel samen met de opsplitsing van de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen in twee faculteiten: die der Natuurwetenschappen en die der Wiskunde en Informatica. Aanleiding hiertoe was de verwachte explosieve groei van de instroom in de informatica. Tien jaar later werd de opsplitsing weer ongedaan gemaakt. Een stagnatie in de groei van de informatica, hogere eisen aan de professionaliteit van het facultaire bestuur (integraal management) en gebleken gebrek aan synergie tussen wiskunde en informatica waren hier de belangrijkste redenen voor.

Uit deze terugblik op de bestuurlijke ontwikkelingen blijkt hoe snel de inzichten met betrekking tot het universitaire bestuur kunnen veranderen. Het relatief trage ritme van de wiskunde, haar gerichtheid op de lange termijn, spoort hiermee slecht. Wiskundigen, de Nijmeegse niet uitgezonderd, gaan niet met iedere mode mee. Mogelijke studenten echter wel. De aantallen eerstejaars studenten in de wiskunde daalden tot een kritiek niveau en de opleiding liep het gevaar te verdwijnen. Dit gevaar werd afgewend, dankzij een nieuw faculteitsbestuur dat vertrouwen had in de mogelijkheid tot vernieuwing: de afgelopen zes jaar kenmerken zich door een pijnlijk maar succesvol aanpassingsproces van de Nijmeegse wiskunde aan de moderne eisen. Dit gebeurde onder de bezielende leiding van Klaas Landsman, gesteund door een fantastisch team van studenten.

Ik wil hier echter niet verder ingaan op de bestuurlijke aspecten van de afgelopen periode, hoe belangwekkend die ook zijn. Daarentegen wil ik een poging wagen u een indruk te geven van het onderzoek dat mij in de afgelopen veertig jaar heeft beziggehouden. Want bij het onderzoek lag mijn hart. Het zal duidelijk worden dat ik veel geluk heb gehad, door op het juiste moment de juiste mensen tegen te komen.

Phillip Griffiths, grondlegger van de moderne Hodgetheorie, gaf in het voorjaar van 1970 gastcolleges in Amsterdam. Ik bezocht deze samen met mijn toenmalige promotor Jan de Boer. Op een zomerschool in Oslo dat jaar leerde ik Frans Oort en de theorie van moduli kennen. Een jaar later was ik zijn promovendus aan de Universiteit van Amsterdam, met een onderwerp ontleend aan de cursus van Griffiths. Frans had een enorm netwerk, mede door zijn hoofdredacteurschap van het tijdschrift *Compositio Mathematica*, dat onder zijn leiding een vooraanstaande plaats onder de wiskundetijdschriften wist te verwerven. Zijn promovendi werden geacht vrijelijk van dit netwerk gebruik te maken.

Zo bezocht ik begin 1972 Pierre Deligne en Nicholas Katz op het Institut des Hautes Études Scientifiques te Bures-sur-Yvette, kortweg het IHES, een onderzoeksinstituut 25 km ten zuiden van Parijs. De directeur van het IHES was Nico Kuiper, tot 1970 hoogleraar meetkunde aan de Universiteit van Amsterdam. Het IHES had slechts vijf vaste stafleden, zonder uitzondering wereldtoppers: de wiskundigen Thom, Deligne en Sullivan en de fysici Ruelle en Michel. Alexander Grothendieck had het IHES in de jaren zestig tot hét centrum van de algebraïsche meetkunde gemaakt en onder Deligne werd deze reputatie nog versterkt. Deligne en Katz reikten mij de juiste hulpmiddelen aan om het probleem van Griffiths aan te pakken.

Een jaar later bezocht ik een conferentie in Cambridge waar Deligne een reeks opzienbarende voordrachten hield: hij had de vermoedens van Weil over aantallen oplossingen van vergelijkingen opgelost. Voor dit werk ontving hij in 1978 de prestigieuze Fields-medaille. Van nog groter belang voor mij persoonlijk was dat David Mumford op deze conferentie een voordracht hield over gemengde Hodgestructuren, een nieuwe theorie die Deligne in de jaren daarvoor had uitgewerkt. Het bleek dat mijn berekeningen naadloos in het kader van de gemengde Hodgetheorie pasten! Daarmee was mijn proefschrift een feit en werd ik plotseling expert in een veelbelovend, onontgonnen gebied.

Op uitnodiging van Deligne bracht ik na mijn promotie een jaar door op het IHES. Ik maakte er een begin met de toepassing van mijn proefschrift op het relatief jonge gebied van de singulariteitentheorie. Ik leerde veel over deze theorie van Norbert A'Campo, met wie ik op het IHES een kamer deelde, en maakte kennis met Bob MacPherson en Mark Goresky, de grondleggers van de Intersectiehomologietheorie, ook volkomen nieuw terrein.

Ik ga u nu in het kort iets vertellen over de singulariteitentheorie. Een beschrijving van dit gebied heb ik reeds gegeven in mijn Leidse oratie van 1978. De technische hulpmiddelen waren destijds erg beperkt: figuren moest ik laten zien door blaadjes uit te delen. Dat gaat tegenwoordig wel anders, zoals u zult zien.

Formules

Als een wiskundige een populairwetenschappelijk artikel gaat schrijven is de eerste stelregel: vermijd formules. Bij iedere formule in de tekst haakt namelijk een deel van de lezers af. Toch verwacht ik dat het belang van formules door een grote meerderheid van u worden onderschreven. Formules beschrijven immers wetmatigheden. Ze vatten in al hun beknoptheid soms zeer gecompliceerde theorieën samen.

Albert Einstein is de geschiedenis ingegaan door zijn relativiteitstheorie. Iedereen associeert de formule

$$E = mc^2$$

met hem. Newton is vooral bekend door zijn theorie van de zwaartekracht, waarvan de tweede wet kernachtig wordt gegeven door

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

In beide formules komen *variabelen* voor met een bepaalde fysische betekenis: zo staat m in beide wetten voor 'massa', en staat c in Einsteins wet voor de lichtsnelheid. Telkens worden twee formules aan elkaar gelijkgesteld. Een ander voorbeeld is de algemene gaswet,

$$pV = nRT.$$

De meest bekende formules uit de middelbareschoolwiskunde zijn misschien wel de Stelling van Pythagoras,

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

voor de lengtes van de zijden in een rechthoekige driehoek en de abc-formule,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

voor de wortels van de vierkantsvergelijking $ax^2+bx+c = 0$. Hier stellen a, b en c getallen voor.

In de abstracte algebra wordt het verband tussen formules bestudeerd onafhankelijk van de betekenis van de letters (variabelen) die erin voorkomen. Zo geldt de gelijkheid

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

voor elk tweetal grootheden A en B die kunnen worden opgeteld en vermenigvuldigd, mits ze voldoen aan $AB = BA$.

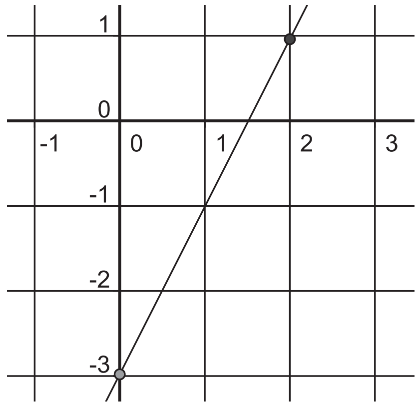
Ook in de singulariteitentheorie zijn formules onderwerp van onderzoek. Het vak heeft derhalve een sterk abstract algebraïsch karakter.

Algebra en meetkunde

In het werk van Descartes wordt een direct verband gelegd tussen bepaalde formules en meetkundige figuren. De variabelen in de formules hebben hierbij de betekenis van *coördinaten*, waardoor de locatie van punten in vlak of ruimte wordt vastgelegd.

Gebruik van coördinaten kennen we allemaal uit de topografie: om de locatie van een plaats op aarde te bepalen wordt gebruikgemaakt van de geografische lengte (ooster- of westerlengte) en breedte (noorder- of zuiderbreedte). Descartes geeft de positie van een punt in het vlak aan met twee getallen. Hij beschouwt hiertoe twee onderling loodrechte getallenlijnen in het vlak, de x-as en de y-as. De projecties van een gegeven punt in het vlak op deze beide assen leveren twee getallen, de x-coördinaat of abscis en de y-coördinaat of ordinaat.

Een vergelijking zoals $y = 2x - 3$ bepaalt nu een figuur in het vlak, bestaande uit die punten waarvan de x- en y-coördinaat aan



Figuur 1

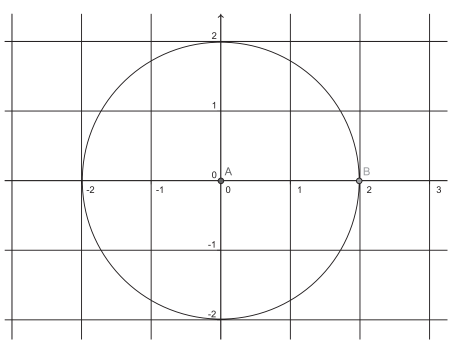
deze vergelijking voldoen. Dit is een rechte lijn door de punten $(0, -3)$ en $(2, 1)$, zie Figuur 1. De vergelijking $x^2 + y^2 = 4$ bepaalt een cirkel met straal 2, zie Figuur 2.

Zodoende wordt door iedere vergelijking (dat is, een relatie tussen formules) een meetkundig object bepaald, bestaande uit die punten waarvan de coördinaten voldoen aan de gegeven vergelijking. De algebra wordt hierdoor concreet gemaakt: de meetkundige objecten zijn een afspiegeling van de algebraïsche vergelijkingen.

Men moet ermee rekening houden dat een plaatje niet steeds alle informatie over de vergelijking weergeeft. Dit is een gevolg van het feit dat wij doorgaans werken met de getallen waar we aan gewend zijn geraakt: de zogeheten *reële getallen*. Het is een diep inzicht uit de twintigste eeuw dat dit informatieverlies geheel kan worden ondervangen door te werken met complexe getallen!

De reële getallen bevatten de natuurlijke getallen $1, 2, 3, \ldots$, maar ook de negatieve getallen, breuken en getallen als π en $\sqrt{3}$. Men kan deze voorstellen als kommagetallen (waarbij we oneindig veel getallen achter de komma toelaten) of als punten op een getallenlijn.

De complexe getallen hebben hun plaats in de wiskunde pas rond het jaar 1800 ingenomen. Ze waren noodzakelijk om te komen tot een goed begrip van de oplossingen



Figuur 2

van vergelijkingen van graad drie. In feite komen ze al om de hoek kijken bij vierkantsvergelijkingen met negatieve discriminant. In de abc-formule komt namelijk de wortel uit de discriminant voor. Als die negatief is, dan zijn de twee wortels complexe getallen, die niet reëel zijn. Complexe getallen kan men voorstellen als punten in een vlak. Dit vlak bevat twee onderling loodrechte lijnen, te weten de reële as en de imaginaire as. Het punt $(0, 1)$ wordt meestal i genoemd (de *imaginaire eenheid*) en voldoet aan $i^2 = -1$.

Singulariteitentheorie

Veeltermen
Laten we eens kijken naar een bepaald soort formules in twee variabelen, bijvoorbeeld x^2y of $y - 4x^2$. Deze formules ontstaan door de variabelen x en y met een getal, zichzelf of elkaar te vermenigvuldigen, en de zo ontstane termen bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken. Zulke formules noemt men *veeltermen* of *polynomen*.

In zo'n veelterm kan men aan de variabelen getalswaarden toekennen: door invullen in de formule krijg je dan een getal als resultaat van een berekening. Een formule kan dus worden opgevat als rekenvoorschrift.

Vlakke krommen
Bekijk de veelterm $y - x^2$. We vullen in: $x = 2$ en $y = 4$. Het resultaat van de berekening is dan $4 - 2 \times 2 = 0$. Daarom heet het paar $(2, 4)$ een *nulpunt* van $y - x^2$. We kunnen nu in het vlak alle nulpunten van $y - x^2$ proberen te tekenen. Het resultaat is een parabool. Een vlakke kromme is nu de collectie nulpunten van een veelterm in de variabelen x en y.

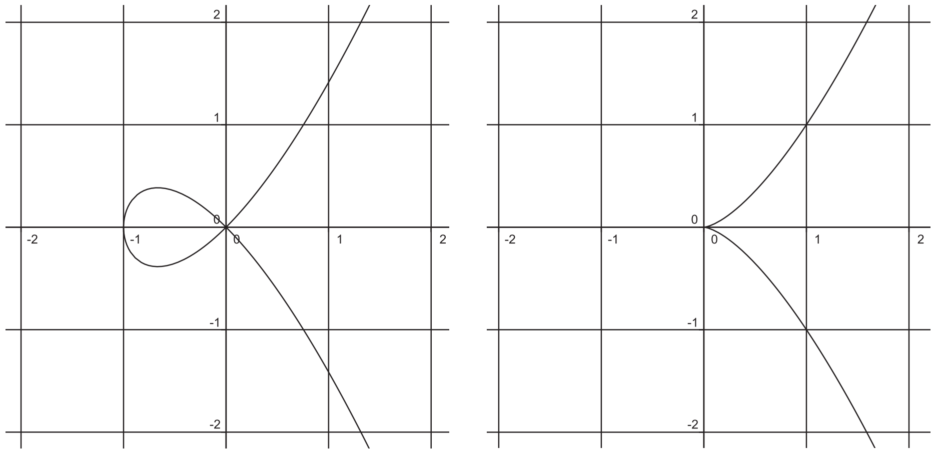
Constante en lineaire term
Het getal dat men verkrijgt als voor de variabelen x en y beide de waarde nul wordt ingevuld, heet de *constante term* van de veelterm. Van de veelterm

$$3 - 5x + 2y + x^2 - 7xy + 5y^2$$

is 3 de constante term, en $-5x + 2y$ heet de *lineaire term*. In de overige termen van de veelterm worden telkens minstens twee variabelen met elkaar vermenigvuldigd.

Een *singulariteit* is nu een veelterm waarvoor zowel de constante term als de lineaire term nul zijn. De nulpuntenverzameling van een singulariteit bevat steeds het punt $(0, 0)$, en dit is een speciaal punt! Zie Figuur 3.

Inzoomen
Laten we eens met een factor 1000 inzoomen



Figuur 3. De nulpuntenverzamelingen van $y^2 - x^2 - x^3$ (links) en $y^2 - x^3$ (rechts)

op beide singulariteiten uit Figuur 3. Dan krijgen we de afbeeldingen in Figuur 4. Hieraan is het volgende op te merken. De linker afbeelding is niet meer te onderscheiden van twee onderling loodrechte lijnen. Het is alsof we met de vergelijking $y^2 = x^2$ waren gestart, in plaats van $y^2 = x^2 + x^3$. Omdat we x en y beide erg klein hebben genomen, kan de term x^3 worden verwaarloosd. In de rechter afbeelding is nog steeds het keerpunt zichtbaar en doet de term x^3 er wel degelijk toe.

In de singulariteitentheorie zijn we geïnteresseerd in eigenschappen van figuren die ook bij inzoomen op een gegeven punt van kracht blijven.

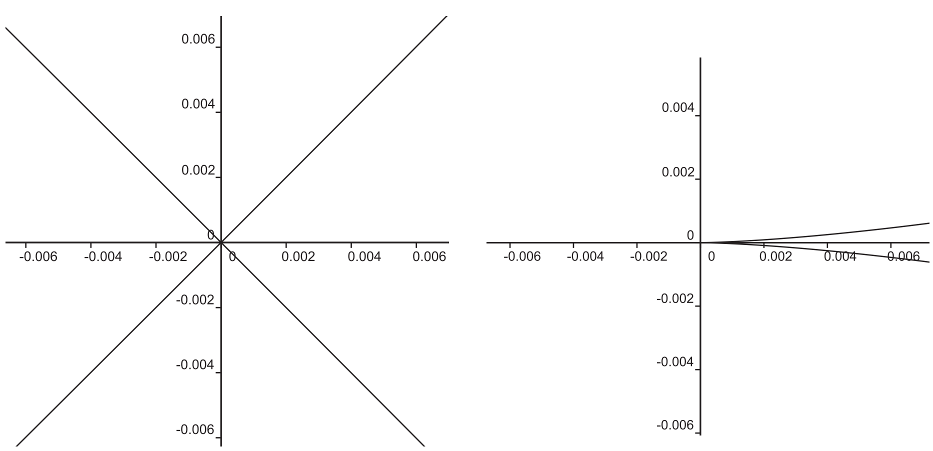
Meer variabelen
Tot nu toe hebben we veeltermen in twee variabelen x en y beschouwd. Dat is echter een onnodige beperking: in de algebra kan men zonder meer veeltermen en singulariteiten in meer variabelen bekijken. Nulpuntenverzamelingen van zulke veeltermen hebben dan hogere dimensie: men krijgt oppervlakken, lichamen of nog hogerdimensionale objecten.

Deformeren
Vaak is niet snel aan plaatjes te zien of twee singulariteiten werkelijk verschillen. Dit is bijvoorbeeld het geval bij de singulariteiten $y^2 - x^5$ en $y^2 - x^3$ (zie Figuur 5): men zou kunnen zeggen dat het eerste keerpunt wat scherper is dan het tweede, maar het is zeer de vraag of dit een eigenschap is die bij inzoomen standhoudt.

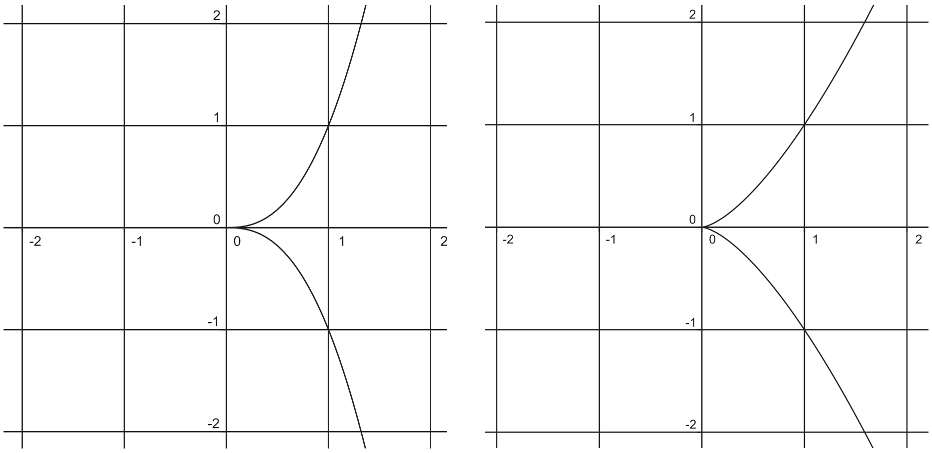
Er is een andere meetkundige techniek beschikbaar om deze singulariteiten te onderscheiden. We kunnen bekijken wat er gebeurt als we de vergelijking een beetje verstoren. Zie Figuur 6. Uit een kleine verstoring van de eerste singulariteit kunnen twee lussen voortkomen, terwijl de tweede singulariteit hoogstens één lus kan produceren. Zodoende onderscheidt men de singulariteiten aan hun 'buren': de singulariteiten die er door kleine verstoringen uit kunnen ontstaan!

Het singulariteitenproject

Het idee dat er in Nederland kansen lagen voor een zwaartepunt in de singulariteitentheorie is afkomstig van Nico Kuiper. Op een bijeenkomst in Metz in februari 1974 wa-



Figuur 4. De singulariteiten uit Figuur 3 een factor 1000 ingezoomd



Figuur 5. De singulariteiten $y^2 - x^5$ (links) en $y^2 - x^3$ (rechts)

ren drie promovendi uit Amsterdam van dat jaar aanwezig: Dirk Siersma, Eduard Looijenga en ikzelf. Ons werk kwam op verschillende wijzen in de voordrachten aan de orde. Deligne gaf er een toepassing van een stelling uit mijn proefschrift. Kuiper constateerde doodleuk dat er sprake was van een Nederlandse Singulariteitenschool. Belangrijke mentoren van ons jonge driemanschap waren Kuiper zelf, de Amsterdamse hoogleraren Van Est en Oort en Norbert A'Campo, die enige jaren eerder naar Frankrijk was uitgeweken. In het voorjaar van 1974 promoveerden wij drieën in Amsterdam en Chris Peters in Leiden. Binnen enkele jaren was Looijenga hoogleraar in Nijmegen, Siersma lector in Utrecht en ik lector in Leiden.

In 1979 zetten wij gedrieën, op instigatie van de Eindhovense hoogleraar Jaap Seidel, die toen een belangrijke rol in de Nederlandse wiskunde vervulde, het project Singularity Theory op. Dit was het eerste grootschalige project in de wiskunde van ZWO, de toenmalige organisatie voor de tweede geldstroom. Onder de vlag van dit project voltooiden Wil Janssen, Duco van Straten, Theo de Jong en Ruud Pellikaan hun proefschrift, terwijl diverse anderen, zoals Jan Stevens en Hans Sterk, veel steun ondervonden van de colleges, seminaria en de talrijke bezoekers van onze groep. Binnen Singularity Theory was namelijk sprake van landelijk onderwijs aan promovendi en onze activiteiten stonden model voor diverse grote NWO-projecten zoals Moduli, Arithmetische Algebraïsche Meetkunde en de latere onderzoeksclusters. Het aio-onderwijs kreeg een vervolg in de Master Classes binnen de onderzoekschool MRI, die op hun beurt mede de aanzet hebben gegeven tot het landelijk onderwijsaanbod van mastercolleges binnen Mastermath.

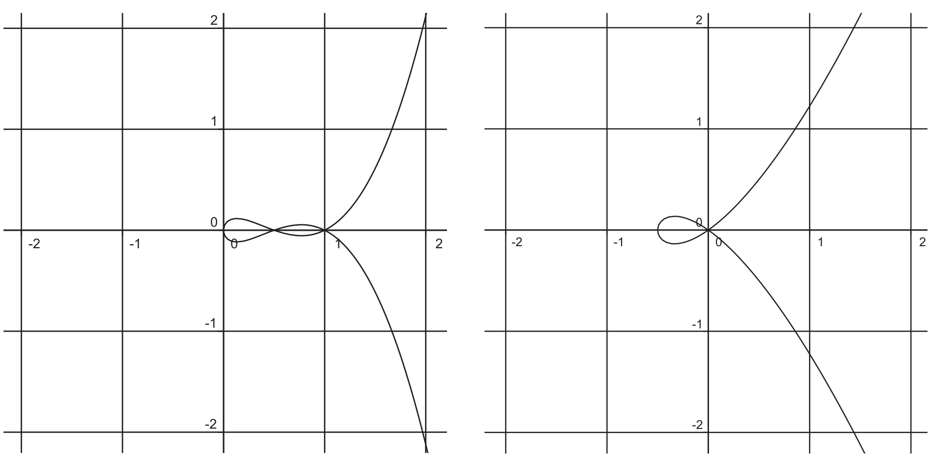
Het singulariteitenspectrum

In juni 1975 bezocht ik voor het eerst de Arbeitstagung in Bonn. Stelt u zich voor: een conferentie zonder een van tevoren vastgesteld programma. Friedrich Hirzebruch heeft de leiding en neemt voorstellen voor onderwerpen en sprekers in ontvangst die uitgebreid bediscussieerd worden. Na een aantal stemmingen ontstaat dan een boeiend actueel programma. Vast onderdeel zijn ook een ontvangst door de rector en een boottocht op de Rijn met de Carmen Silva.

Op die boot ontmoette ik voor het eerst Alexander Varchenko. Hij was een leerling van Vladimir Arnol'd, een van de leidende wiskundigen uit Moskou en een van de grondleggers van de singulariteitentheorie. Varchenko vertelde mij dat in het seminarium van Arnol'd over mijn werk was gesproken en legde mij een vraag van Arnol'd voor. Daarmee ging ik de maanden daarna aan de slag. Er kwam een tiental voorbeelden in aanmerking om te worden doorgerekend. Het met de hand doorrekenen van het eerste voorbeeld kostte mij een halve dag werk. Ik besloot dat ik beter met de primitieve computer aan de slag kon gaan die het IHES rijk was, al kostte het ook een halve dag om hiermee te leren werken. Nadat de computer enkele uren had gerekend, werd een patroon zichtbaar, dat leidde tot het idee van het singulariteitenspectrum.

Ons regionale dagblad *De Gelderlander* heeft elke zaterdag een bijlage met de naam Spectrum. Daarin worden diverse onderwerpen uitvoeriger belicht dan doorgaans mogelijk is. De wetenschappelijke term 'spectrum' is afkomstig uit de natuurkunde en heeft betrekking op de vele kleuren die zichtbaar worden door breking van licht: de kleuren van de regenboog. Door breking blijkt dat het witte licht is samengesteld uit vele onderdelen. Met het begrip 'spectrum' associeer ik derhalve het uitlichten van bepaalde interessante facetten of details.

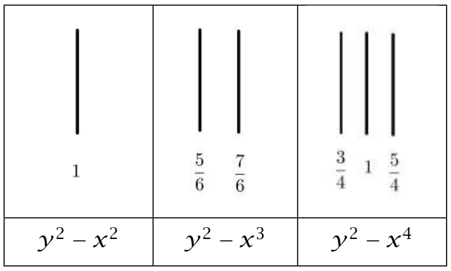
Ook elke singulariteit heeft een spectrum. Dit kan men zich voorstellen als bestaande uit een aantal verschillende golflengtes, elk met zijn eigen intensiteit. Iedere optredende golflengte is een rationaal getal (breuk) dat ligt tussen 0 en n, waarbij n het aantal variabelen is. Voor twee variabelen ligt elke golflengte dus tussen 0 en 2. Verder wordt elke intensiteit weergegeven door een positief geheel getal. Als we alle intensiteiten van alle golflengtes in het spectrum van een singulariteit bij elkaar optellen, krijgen we het *Milnorgetal* van de singulariteit, één van de eerste invarianten van singulariteiten uit de recente literatuur. Het werd gedefinieerd door John Milnor, in diens boek uit 1968, dat een enorme invloed heeft gehad. Bovendien bepaalt het spectrum de karakteristieke veelterm van de monodromie, ook reeds in het boek van Milnor gedefinieerd. De monodromiestelling kent een lange historie. Landman, Grothendieck, Katz, Clemens, Brieskorn en vele anderen hebben erover gepubliceerd. Uit deze



Figuur 6. De singulariteiten uit Figuur 5 een klein beetje verstoord

Musica spectralis

Figuur 7. Bladmuziek van een toonreeks die tijdens de afscheidsrede van Joseph Steenbrink ten gehore werd gebracht door Vocaal Ensemble PANiek uit Nijmegen. Dit optreden is te beluisteren op www.vocaalensemblepaniek.nl.



Figuur 8

stelling volgt dat de golflengtes in het spectrum rationale getallen zijn. Uit voorbeelden blijkt dat het spectrum wezenlijk meer informatie bevat dan de karakteristieke veelterm van de monodromie.

Hoe ingewikkelder een singulariteit is, hoe groter het Milnorgetal en des te meer informatie het spectrum kan bevatten. Zie Figuur 8. De singulariteiten $y^2 - x^2$, $y^2 - x^3$ en $y^2 - x^4$ hebben Milnorgetallen 1, 2 en 3. Hun spectra vertonen een steeds grotere spreiding. Bovendien valt de symmetrie op ten opzichte van golflengte 1.

Er is een mooie analogie tussen het spectrum van singulariteiten en toonreeksen in de muziek. De golflengtes uit het spectrum bepalen hierbij de toonhoogte van een muzieknoot. De intensiteit ervan kan men laten corresponderen met de klanksterkte of met de klankduur. Voor de frequentie van de toon die correspondeert met de 'golflengte' b kies ik de formule

$$f = 2^b \cdot 440 \text{ Hz}.$$

Als we de golflengte b dan met één eenheid verhogen, klinkt de corresponderende toon precies een octaaf hoger. Om de spectra van singulariteiten van krommen tot klinken te brengen, is dus een bereik van twee octaven nodig. De betreffende tonen passen echter niet steeds in ons gebruikelijke muzieksysteem. Daarvoor is nodig dat iedere golflengte een geheel getal wordt als je deze met 12 vermenigvuldigt. Laten we die singulariteiten vandaag 'muzikaal' noemen.

Kennis van de karakteristieke veelterm van deze singulariteiten is equivalent met de kennis van de notennamen in dit klankspectrum: a, b, c, cis, enzovoorts. De informatie in welk octaaf deze tonen moeten klinken, is daar echter niet bij inbegrepen: daarvoor is het singulariteitenspectrum nodig. Ter illustratie is in Figuur 7 bladmuziek te zien van een toonreeks die tijdens de rede ten hore werd gebracht door Vocaal Ensemble PANiek.

De berekening van het spectrum vereiste aanvankelijk de resolutie van singulariteiten, een tijdrovend proces dat alleen voor singulariteiten van krommen goed te overzien is. Varchenko produceerde echter rond 1980 een nieuwe aanpak, die meer analytisch van aard was. Zijn methode was verwant aan de wijze waarop Brieskorn rond 1970 de monodromie van singulariteiten had bestudeerd. Deze aanpak heeft uiteindelijk geleid tot een algoritme voor de berekening van het singulariteitenspectrum dat een tiental jaren geleden door Matthias Schulze, een student uit Kaiserslautern die deelnam aan de Masterclass van het MRI, werd geïmplementeerd in het computeralgebraprogramma SINGULAR. De eerste aanzet tot dit algoritme lag in Nijmegen, waar Peter Nacken, een student van Ton Levelt, een rekenmethode voor de monodromie had ontwikkeld. Levelt kan worden beschouwd als één van de pioniers van de computeralgebra in Nederland. Het algoritme is verder gebaseerd op mijn gezamenlijke artikel met John Scherk uit 1985, waarin wij Varchenko's werk herformuleren in de taal van D-modulen.

Semicontinuïteit

Een heel subtiele vraag is, hoe men kan beslissen of de ene singulariteit meer singulier is dan de andere. Daarmee bedoelen we dat de andere uit de ene kan ontstaan door een kleine verstoring van de vergelijking. Een voorwaarde die dan moet zijn vervuld, is dat het ene Milnorgetal groter is dan het andere.

Vladimir Arnol'd bedacht op grond van een groot aantal voorbeelden hoe deze relatie aan de spectra van de singulariteiten kon worden afgelezen. Tegelijkertijd was Egbert Brieskorn met een andere methode bezig. Er werd toen een voorbeeld gevonden waarvoor beide methodes met elkaar in tegenspraak waren! Een van beiden moest het dus mis hebben. Uiteindelijk werd in 1985 de strijd in het voordeel van Arnol'd beslecht, door de stelling over de *semicontinuïteit van het spectrum*. Deze stelling werd door Varchenko bewezen voor een speciale klasse van singulariteiten en door mij in het algemeen, doordat ik de aanpak van Varchenko kon combineren met een stuk Hodgetheorie dat door Philippe du Bois uit Nantes was ontwikkeld. Deze stelling beschouw ik als het fraaiste resultaat uit mijn wetenschappelijke loopbaan.

Series van singulariteiten

In de Arnol'd-classificatie van singulariteiten treedt een groot aantal reeksen van singulariteiten op, naast talrijke individuele gevallen. Arnol'd merkte op dat deze reeksen samenhangen met niet-geïsoleerde singulariteiten. In zijn fundamentele artikel 'Isolated line singularities' uit 1981 legde Dirk Siersma de basis voor een diepgaande studie van deze singulariteiten, die werd voortgezet door Ruud Pellikaan, Duco van Straten en Theo de Jong. De vraag deed zich voor hoe de spectra van singulariteiten uit eenzelfde reeks met elkaar samenhangen.

In de trein op de terugweg van een conferentie in Nancy discussieerden Dirk Siersma en ik over dit probleem. Dirk loste binnen korte tijd het gerelateerde probleem over de karakteristieke veelterm van de monodromie op. Een vermoeden dat ik formuleerde over de samenhang van het spectrum voor singulariteiten binnen een reeks werd enige tijd later bewezen door Morihiko Saito, als toepassing van zijn zeer gecompliceerde theorie van gemengde Hodgemodulen. Op grond van deze formules konden diverse tegenvoorbeelden worden gevonden voor bestaande vermoedens.

De singulariteitentheorie had inmiddels een graad van complexiteit bereikt die het voor jonge onderzoekers steeds moeilijker maakte om in te stappen. In mijn periode als hoogleraar aan de Radboud Universiteit heb ik dan ook steeds naar promotieonderwerpen in de algebraïsche meetkunde buiten de singulariteitentheorie gezocht, waarin wél toepassingen van singulariteitentheorie een rol speelden. Het onderzoek naar singulariteiten sec deed ik grotendeels in samenwerking met ervaren onderzoekers als Andras Némethi en Wolfgang Ebeling. Met deze laatste slaagde ik erin het begrip singulariteitenspectrum voor een veel bredere klasse van singulariteiten te definiëren, met behoud van de symmetrie-eigenschap en de semicontinuïteit. Hierbij maakten wij gebruik van Saito's theorie.

Ook werkte ik samen met Chris Peters, die me als mede-auteur hielp eindelijk, na 25 jaar, het handboek *Mixed Hodge Structures* af te maken. Dat was een mooi moment om met prepensioen te gaan.