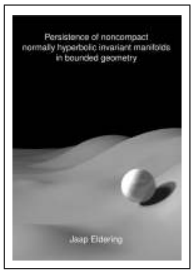
In de verdediging

In defence



Persistence of noncompact normally hyperbolic invariant manifolds in bounded geometry
Jaap Eldering

Het zal je maar gebeuren: halverwege je promotieonderzoek overlijdt opeens je begeleider. Het overkwam Jaap Eldering, die werkte aan de Universiteit Utrecht. Het plotselinge overlijden van zijn promotor Hans Duistermaat in maart 2010 was een heel zware klap. Hij heeft zich daarna meermalen afgevraagd of hij zijn promotie nog wel zou afronden, temeer omdat zijn onderzoek ook al een tijdje in een dip zat. Gelukkig vond Eldering in Erik van den Ban en Heinz Hanßmann twee nieuwe begeleiders met wie hij de draad weer kon oppakken. En in de zomer van 2010 zag hij hoe hij het bewijs van de stelling waar zijn hele proefschrift om draaide moest rondkrijgen. Na een lange tijd van twijfelen was dat een grote opluchting en hét teken dat hij niet op moest geven. Op 27 augustus 2012 werd zijn werk bekroond met de verdediging van zijn proefschrift *Persistence of noncompact normally hyperbolic invariant manifolds in bounded geometry*.

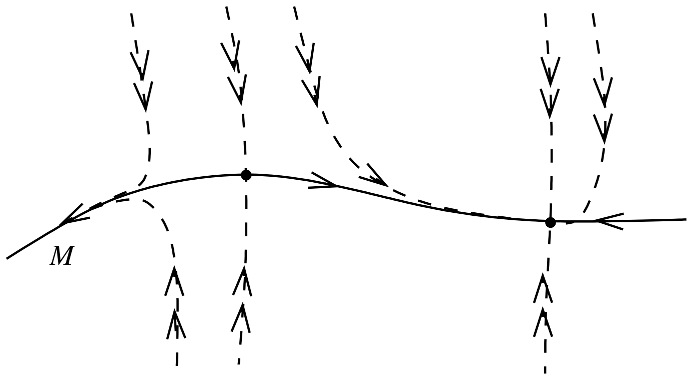
Normaalhyperbolische invariante variëteiten
Eldering werkt aan normaalhyperbolische invariante variëteiten, die een belangrijke rol spelen in dynamische systemen en toepassingen daarvan. Hij legt uit: "Een vast punt van een differentiaalvergelijking is een punt dat invariant is onder de stroming van het systeem. Zo'n punt heet hyperbolisch als de eigenwaarden van de linearisatie van het systeem niet op de imaginaire as liggen. Oplossingskrommen in de buurt van het vaste punt vormen dan hyperbolen. Normaalhyperbolische invariante variëteiten (NHIMs in het Engels) zijn hier generalisaties van. Het zijn variëteiten die als geheel invariant zijn onder de stroming van het systeem en in de dwarse (normale) richting hetzelfde hyperbolische gedrag vertonen als een hyperbolisch vast punt, zie Figuur 1. Een hyperbolisch vast punt is dus simpelweg een nul-dimensionale NHIM."

Persistentie van NIMHs
Elderings hele proefschrift draait eigenlijk om het bewijzen van één stelling, namelijk dat normaalhyperbolisch invariante variëteiten behouden blijven onder kleine storingen van het dynamische systeem. Deze stelling was voor compacte variëteiten al bekend sinds de jaren 70. Eldering heeft deze veralgemeniseerd naar niet-compacte variëteiten onder de aanname van zogenaamde 'begrensde meetkunde' van de omliggende ruimte (Riemannse variëteit).

Hij legt de persistentie heuristisch uit als volgt: "Bij een hyperbolisch vast punt heeft de afgeleide-matrix geen eigenwaarden op de imaginaire as, dus in het bijzonder is deze inverteerbaar. Volgens de impliciete-functiestelling is er dus nog steeds een vast punt na kleine verstoringen. Voor een algemenere NHIM kunnen we ook een *heuristische* impliciete-functievergelijking opstellen: $F(M, v) = \Phi^t(M) - M$, waarbij M de invariante variëteit is, v het vectorveld en Φ^t de stroming die van v afhangt. De eis van expansie- en contractiesnelheden (zie Figuur 1) kan nu gezien worden als conditie dat de afgeleide van

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl



Figuur 1 Schets van een NHIM M. Merk op dat de stroming langs de variëteit (één pijltje) langzamer is dan die er loodrecht op (twee pijltjes).

F naar M inverteerbaar is. Met de impliciete-functiestelling kan men dus weer concluderen dat er een unieke, een beetje verstoorde M blijft bestaan als v een beetje verstoord wordt.”

Een Riemannse variëteit als omliggende ruimte

Eldering generaliseerde de stelling voor de context waarin de omliggende ruimte ook een (niet-compacte Riemannse) variëteit is. Het basisidee van deze generalisatie is simpel: voor eerdere resultaten werd de compactheid van de variëteiten gebruikt om uniforme conclusies te kunnen trekken, dus als de compactheid vervangen wordt door a priori uniformiteit aan te nemen, dan moet alles goed gaan. Deze gedachte was zeker al bekend, maar nog niet uitgewerkt in deze context.

Een voor de hand liggende eis is dat het vectorveld uniform begrensd en continu is, evenals de verstoring. Maar om hogere gladheid te krijgen moet dit ook voor hogere-orde-afgeleiden geëist worden. Dan duikt meteen de vraag op hoe dit überhaupt geformuleerd kan worden op een variëteit. Het bleek dat Eldering een bepaalde uniformiteit van de onderliggende variëteit nodig had, de ‘begrensde meetkunde’ uit de titel van zijn proefschrift. Dit houdt in dat de kromming inclusief afgeleiden begrensd is en dat de zogenaamde injectiviteitsstraal een ondergrens groter dan nul heeft, allemaal globaal.

Onderzoeksvraag ‘per ongeluk’ geboren.

Elderings oorspronkelijke onderzoeksvraag ging over een toepassing van singuliere perturbatietheorie (waarbij NHIMs gebruikt kunnen worden) op klassiek mechanische systemen. Toen hij de literatuur hierover bestudeerde, suggereerde Hans Duistermaat dat er ook een alternatieve methode (de Perron-methode in plaats van Hadamards *Graph Transform*) gebruikt zou moeten kunnen worden voor het persistentiebewijs voor compacte NHIMs. Dat bleek toch lastiger dan eerst gedacht, maar Eldering beet zich erin vast. Hij stond er in eerste instantie niet bij stil of hij het niet-compacte geval wilde of kon aanpakken; hij probeerde vooral de Perron-methode werkend te krijgen. Hij zag zich daarbij gedwongen om een heleboel details voor zichzelf opnieuw uit te vinden. Naarmate hij de literatuur verder ontdekte, is hij zich bewust gaan focussen op het niet-compacte geval in algemene Riemannse variëteiten, omdat dat geval nog nergens behandeld was.

Toen hij zich expliciet ging richten op dit niet-compacte geval, had hij al door dat het algemene principe was dat compactheid vervangen moest worden door uniforme aannamen.

Een vernieuwend inzicht

Rond die tijd had hij een bepaalde conditie nodig, namelijk dat de holonomie van de Levi-Civita-connectie langs twee naburige oplossingskrommen niet al te sterk mocht groeien met de lengte van deze krommen. Het inzicht dat hij dat onder controle kon krijgen door te eisen dat de Riemannse kromming begrensd is, gaf Eldering het idee dat bovengenoemde uniforme aannamen ook aan de onderliggende ruimte opgelegd moeten worden in termen van ‘begrensde meetkunde’ (bounded geometry). Dat inzicht was een eye-opener en was ook de reden waarom hij in de zomer van 2010 niet langer twijfelde aan een goede afloop van zijn promotiewerk.

Eldering denkt ook dat dit idee het vernieuwende is aan zijn werk: tot dan toe had men nog niet bedacht dat voor een generalisatie naar het niet-compacte geval de uniformiteit ook aan de onderliggende ruimte opgelegd zou moeten worden.

Eldering vindt zijn ‘hoofdstelling’ zelf mooi, omdat er een combinatie van theorie uit de dynamische systemen, globale analyse en differentiaalmeetkunde bij komt kijken.

Het bewijs van deze stelling is technisch behoorlijk gecompliceerd. Aan de ene kant is hij er wel trots op dat voor elkaar te hebben gekregen; aan de andere kant is hij er ook achter dat een deel van de complicaties achterwege gelaten hadden kunnen worden door een compleet andere methode te gebruiken. De Perron-methode is namelijk niet erg handig voor dit probleem; de Graph Transform had hem achteraf waarschijnlijk een behoorlijke hoeveelheid technische details bespaard. Dat is iets waar Eldering zich gaandeweg bewust van werd. Ook al had hij de ideeën om het bewijs af te ronden in zijn hoofd zitten, bij het uitwerken daarvan kwam hij veel technische problemen tegen, waarvan de oplossing conceptueel duidelijk was, maar nogal wat voeten in de aarde had om precies uit te werken.

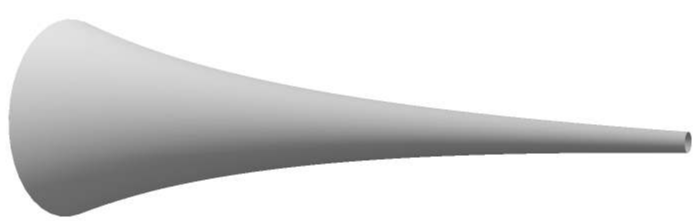
De keuze om te wisselen van methode heeft hij nooit durven maken omdat die keuze ook onzekerheid met zich mee zou brengen. Het inzicht dat de Graph Transform handiger was, vorderde bovendien samen met zijn vooruitgang met de Perron-methode. Hij bleef daarom altijd het gevoel houden dat doorgaan met de Perron-methode de veiligere keuze was om binnen afzienbare tijd zijn bewijs af te ronden.

Verder in de wetenschap

Over het algemeen beviel het leven als aio hem wel. Aan de ene kant voelde het vele werken in zijn eentje soms wel eenzaam, aan de andere kant heeft hij een hele gezellige tijd gehad met zijn kamergenoten en mede-aio’s. Ze dachten vaak samen na over wiskundige problemen van elkaar en organiseerden verschillende uitjes.

De conferenties maakten het ook leuk: het reizen naar nieuwe plekken, inspiratie opdoen, en nieuwe en bekende mensen ontmoeten met interesse in zijn onderzoek. Een goed voorbeeld dichtbij huis was het minisymposium bij de promotie van Alef Sterk in Groningen, waar Robert MacKay een voordracht gaf over niet-compacte normaalhyperbolische invariante variëteiten. Dit was de eerste keer dat Eldering iemand ontmoette die vergelijkbare dingen deed en dit contact gaf hem het gevoel dat hij toch niet in zijn eentje op een eiland werkte.

Al met al een positieve balans. Eldering is inmiddels postdoc aan het Imperial College in London en hoopt voor de toekomst op een mooie carrière in de wetenschap.



Figuur 2 Variëteit met globale injectiviteitsstraal gelijk aan nul: je kunt rond de krimpende cilinder steeds kortere gesloten rondjes lopen.