

Wim Pijls

Econometrisch Instituut  
Erasmus Universiteit Rotterdam  
Postbus 1738  
3000 DR Rotterdam  
pijls@ese.eur.nl

## Onderzoek

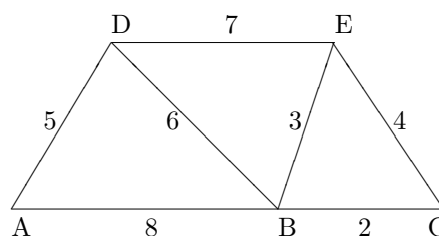
# Het minimale opspannend bos

In vrijwel elk leerboek over grafentheorie wordt het probleem van het minimale opspannend bos behandeld. Hetzelfde onderwerp komt ook aan de orde in de literatuur over datastructuren en algoritmen, een populair gebied binnen de informatica dat mogelijk meer boektitels kent dan de grafentheorie. In het decembernummer van 2010 werden de lezers van dit blad in een artikel van Stefan van Zwam ingeleid in het relatief onbekende gebied der matroïden. Wim Pijls gebruikt de theorie van de matroïden om het probleem van het minimale opspannend bos te behandelen. Een benaderingswijze die men in de informatica-literatuur niet aantreft. Tevens geeft hij hiermee een voorbeeld van optimalisatie in matroïden.

We recapituleren eerst enkele definities uit de grafentheorie. Een *graaf*  $G(V, E)$  bestaat uit een eindige verzameling  $V$  van knopen ('vertices') en een verzameling  $E$  van kanten ('edges'). Een kant is een verbinding tussen twee knopen. De definities van *pad* en *cykel* (of *circuit*) in een graaf spreken voor zich. Een *bos* definiëren we als een verzameling van kanten die geen cyclen bevat. Een graaf heet *samenhangend* als tussen elk tweetal knopen een pad bestaat. Een *deelgraaf*  $G'(V', E')$  met  $V' \subseteq V$  en  $E' \subseteq E$  heet een *component* van  $G$  als  $G'$  samenhangend is en niet tot een grotere samenhangende deelgraaf uitgebreid kan worden. Een *sneede* in een graaf  $G$  is een verzameling  $S$  van kanten zodanig dat na verwijdering van  $S$  het aantal componenten van  $G$  toeneemt. Een sneede kan als volgt verkre-

gen worden. Geef elke knoop naar willekeur een A- of een B-label. De kanten tussen een A- en een B-label vormen een sneede.

Een *gewogen graaf* is een graaf  $G(V, E)$  met een functie  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  die elke kant van een gewicht voorziet. Een *opspannend bos*  $B$  in graaf  $G(V, E)$  is een bos, zodanig dat elke knoop in  $V$  aan tenminste één kant van



Figuur 1 Een gewogen graaf

$B$  grenst. Een minimaal opspannend bos is een opspannend bos met minimaal gewicht. In plaats van 'minimaal opspannend bos' gebruiken wij de in de Engelstalige literatuur gebruikelijke afkorting MSF ('minimal spanning forest').

Een voorbeeld van een gewogen graaf is te vinden in Figuur 1. Een MSF bestaat uit de verzameling van kanten  $\{AD, BC, BD, BE\}$ , een sneede is bijvoorbeeld  $\{AB, BD, DE\}$ .

### Het Blauw-rood algoritme

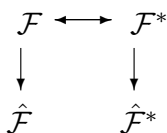
Terwijl al meerdere algoritmen voor de MSF bekend waren, voegde Tarjan er nog een aan toe in de tachtiger jaren [12]:

**Blauw-rood algoritme.** Herhaal de blauwe en de rode stappen in willekeurige volgorde, totdat alle kanten gekleurd zijn.

**Blauwe stap:** zoek een sneede zonder blauwe kanten; kleur de kant met minimaal gewicht blauw.

**Rode stap:** zoek een cykel zonder rode kanten; kleur de kant met maximaal gewicht rood.

De klassieke algoritmen voor de MSF zijn gemakkelijk als bijzonder geval af te leiden,



Figuur 2 Schema van families

zoals we verderop in dit artikel zullen zien. Het Blauw-rood algoritme roept enkele vragen op. Allereerst is daar natuurlijk de vraag naar de correctheid. Ten tweede: hoe is de symmetrische rol van cykel en snede te duiden? Deze vragen zijn het beste te beantwoorden met behulp van de theorie der matroïden. In de volgende paragraaf wordt deze theorie beschreven. Daarna wordt een generiek algoritme voor optimalisatie in matroïden gepresenteerd, dat volledig equivalent is met het Blauw-rood algoritme.

**Matroïden**

De eerste definitie betreft het begrip familie, het fundament onder de matroïde.

**Definitie 1.** Een familie  $\mathcal{F}$  bij een gegeven verzameling  $E$  is een collectie van deelverzamelingen met de eigenschap: als  $I \in \mathcal{F}$  en  $I' \subset I$ , dan ook  $I' \in \mathcal{F}$ .

Een familie is dus gesloten onder inclusie. Een verzameling  $I \in \mathcal{F}$  heet maximaal als er geen  $I' \in \mathcal{F}$  bestaat met  $I \subset I'$ , dus als  $I$  geen superset heeft in de familie.

Elke familie  $\mathcal{F}$  heeft een anti-familie  $\hat{\mathcal{F}}$  gedefinieerd als de collectie van deelverzamelingen van  $E$  die niet tot  $\mathcal{F}$  behoren. Een anti-familie is gesloten in omgekeerde richting: elke superversameling van een verzameling behoort tot de anti-familie. Een anti-familie kent derhalve minimale verzamelingen.

Elke familie  $\mathcal{F}$  bij een verzameling  $E$  heeft ook een duale familie  $\mathcal{F}^*$ . Een verzameling  $I^* \subseteq E$  behoort tot de duale familie  $\mathcal{F}^*$  als  $I^*$  disjunct is met tenminste één maximale verzameling van  $\mathcal{F}$ . Het is gemakkelijk na te gaan dat  $\mathcal{F}^*$  ook gesloten is onder inclusie. De maximale verzamelingen in  $\mathcal{F}^*$  zijn precies de complementen van de maximale verzamelingen in  $\mathcal{F}$ . Daaruit volgt:  $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}$ . De duale familie heeft ook zijn anti-familie. Zo komt men tot het schema van Figuur 2. Een direct verband tussen  $\hat{\mathcal{F}}$  en  $\hat{\mathcal{F}}^*$  is niet eenvoudig vast te stellen. We komen hier aan het einde van deze paragraaf op terug. Een belangrijke stelling is de volgende.

**Stelling 1.** Elke verzameling  $\hat{I} \in \hat{\mathcal{F}}$  heeft een niet-lege doorsnede met elke maximale verzameling uit  $\mathcal{F}^*$ .

Het bewijs is triviaal: als  $\hat{I}$  disjunct zou zijn met een maximale verzameling in  $\mathcal{F}^*$ , dan behoorde  $\hat{I}$  tot  $\mathcal{F}$ . De stelling geldt natuurlijk ook dual. In de theorie van de hypergrafen wordt  $\hat{I}$  een transversaal van  $\mathcal{F}^*$  genoemd [1].

De eerder geïntroduceerde begrippen passen naadloos in het schema van Figuur 2. We beschouwen verzamelingen van kanten en nemen voor  $\mathcal{F}$  de familie van bossen. Een opspannend bos is een maximale verzameling in  $\mathcal{F}$ . Het complement van een maximaal of opspannend bos is snede-vrij, want na verwijdering van dit complement neemt het aantal componenten in de graaf niet toe. Een snedevrije verzameling van kanten noemen we een vulling. Een bos en een vulling kan men opvatten als het geraamte en het vlees van de graaf. Figuur 3 is een specifieke invulling van Figuur 2. We ontdekken hier de dualiteit van cyclen en snedes.

Het zal blijken dat het Blauw-rood algoritme in feite een optimalisatie-algoritme voor matroïden is. We introduceren het begrip matroïde in de volgende definitie. De notaties  $A + b$  en  $A - b$  staan respectievelijk voor  $A \cup \{b\}$  en  $A \setminus \{b\}$ .

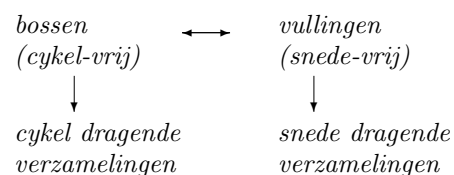
**Definitie 2.** Een matroïde  $M$  is een paar  $(E, \mathcal{F})$  met  $\mathcal{F}$  een familie bij de verzameling  $E$  zodanig dat geldt: als  $I, J \in \mathcal{F}$  met  $|I| < |J|$ , dan is er een  $j \in J \setminus I$  zodat  $I + j \in \mathcal{F}$ .

De volgende twee stellingen laten zien dat zowel bossen als vullingen matroïden zijn.

**Stelling 2.** De matroïde  $(E, \mathcal{F})$  met  $\mathcal{F}$  de familie van bossen in een graaf  $G(V, E)$  is een matroïde.

*Bewijs.* Beschouw twee bossen  $I$  en  $J$  met  $|I| < |J|$  en de bijbehorende deelgrafen bepaald door de paren  $(V, I)$  en  $(V, J)$ . Als elke kant van  $J$  binnen een component van  $I$  ligt, is het aantal componenten van  $J$  tenminste gelijk aan het aantal componenten van  $I$ . Dit is in tegenspraak met de volgende stelling uit de grafentheorie: elk bos  $B$  in een graaf  $G(V, E)$  voldoet aan  $|V| = |B| + c$ , waarbij  $c$  het aantal componenten van  $B$  aanduidt. We concluderen dat er een kant  $j \in J$  moet zijn die twee componenten van  $I$  verbindt. Dan is  $I + j$  cykel-vrij.  $\square$

Uit de definitie van een matroïde volgt meteen: de maximale verzamelingen van  $\mathcal{F}$  bevatten hetzelfde aantal elementen, immers twee maximale verzamelingen  $Z_1, Z_2$  met  $|Z_1| < |Z_2|$  kunnen niet bestaan. Ook de volgende eigenschap is duidelijk: als  $Z$  maxi-



Figuur 3 Verzamelingen van kanten

maal is in  $\mathcal{F}$  en  $I$  niet, dan is  $I$  met elementen van  $Z \setminus I$  uit te breiden tot een maximale verzameling.

De duale matroïde  $M^*$  wordt bepaald door het paar  $(E, \mathcal{F}^*)$ .

**Stelling 3.** De duale van een matroïde is ook een matroïde.

*Bewijs.* Beschouw  $I^*$  en  $J^*$  uit  $\mathcal{F}^*$  met  $|I^*| < |J^*|$ . Dan is er een maximaal element  $J$  uit  $\mathcal{F}$  dat disjunct is met  $J^*$  en een maximaal element  $I$  uit  $\mathcal{F}$  dat disjunct is met  $I^*$ . Verwijder uit  $J$  de elementen van  $I^*$ , dus construeer  $J \setminus I^*$ . Omdat  $J \cap J^* = \emptyset$ , worden hoogstens  $|I^* \setminus J^*|$  elementen verwijderd. Breid de gereduceerde  $J$  uit tot een nieuw maximaal element  $Z$  in  $\mathcal{F}$  door aan te vullen met elementen uit  $I$ . Dan is  $Z$  disjunct met  $I^*$ . Omdat elke maximale verzameling hetzelfde aantal elementen heeft, vergt deze uitbreiding ten hoogste  $|I^* \setminus J^*|$  elementen. Vanwege  $|I^* \setminus J^*| < |J^* \setminus I^*|$  zal deze uitbreiding niet de gehele verzameling  $J^* \setminus I^*$  beslaan. Er is dus een  $j \in J^* \setminus I^*$  zodat  $j \notin Z$ . Er volgt dat  $I^* + j$  disjunct is met  $Z$  en dus in  $\mathcal{F}^*$  zit.  $\square$

Omdat we de matroïde van Figuur 3 bestuderen, hanteren we in dit artikel de terminologie uit die figuur, ofschoon dit niet geheel de algemene matroïden-terminologie is. De elementen van  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{F}^*$  in een willekeurige matroïde noemen we respectievelijk bossen en vullingen. De minimale elementen van  $\hat{\mathcal{F}}$  en  $\hat{\mathcal{F}}^*$  heten respectievelijk cyclen en snedes. (Deze laatste begrippen treden wél in de matroïden-literatuur op.)

We besluiten met twee stellingen die in de volgende paragraaf nodig zijn.

**Stelling 4.** Voor elk paar  $C, S$  met  $C$  een cykel en  $S$  een snede geldt  $|C \cap S| \neq 1$ .

*Bewijs* (uit het ongerijmde). Stel  $C \cap S = \{x\}$ . Dan zijn de disjuncte verzamelingen  $C - x$  en  $S - x$  respectievelijk cykel-vrij en snede-vrij. Er is een maximale vulling  $Z_0$  die disjunct is met  $C - x$ . De verzameling  $S - x$  is met elementen uit  $Z_0$  uit te breiden tot maximale vulling  $Z_1$ . Deze bevat  $x$  niet, omdat  $Z_1$  dan de snede  $S$  zou bevatten. Omdat  $C - x$  disjunct is met

$S - x$  en met  $Z_0$ , is  $C - x$  ook disjunct met  $Z_1$ . De cykel  $C$  is dan ook disjunct met  $Z_1$  en dit is in strijd met Stelling 1.  $\square$

**Stelling 5.** *Als  $Z \in \mathcal{F}$  een maximaal bos is en  $e \notin Z$ , dan bevat  $Z + e$  een unieke cykel  $C$ . Na verwijdering van tenminste één element uit  $C$  wordt weer een maximaal bos verkregen.*

*Bewijs* (uit het ongerijmde). Stel  $Z + e$  bevat twee verschillende cyclen  $C_1$  en  $C_2$ . Kies een  $e'$  uit  $C_1 \setminus C_2$ . Breid  $C_1 - e'$  uit tot een maximaal bos in  $\mathcal{F}$ . De uitgebreide verzameling is cykelvrij, maar is ook een superverzameling van  $C_2$ . Tegenspraak.

Als men een element uit de unieke cykel verwijdert, ontstaat een cykel-vrije verzameling met hetzelfde aantal elementen als een maximale verzameling en deze is dus zelf ook maximaal.  $\square$

Merk op dat Stelling 4 een verband aanbrengt tussen  $\hat{\mathcal{F}}$  en  $\hat{\mathcal{F}}^*$ . Het omgekeerde van deze stelling geldt ook: als een verzameling  $S$  de eigenschap  $|C \cap S| \neq 1$  heeft voor elke cykel  $C$ , dan is  $S$  een snede. Zie [11] voor een bewijs.

### Een generiek algoritme

In deze paragraaf presenteren wij een generiek algoritme voor het optimaliseren van een gewogen matroïde, een matroïde met een gewichtsfunctie. Dit algoritme maakt gebruik van zogeheten minoren van matroïden. Een minor wordt verkregen door de verzameling  $E$  van een gegeven matroïde  $M = (E, \mathcal{F})$  te verkleinen. Stel een verzameling  $D \subset E$  wordt verwijderd uit de verzameling  $E$ . De minor-matroïde is gedefinieerd als  $M' = (E \setminus D, \mathcal{F}')$  met  $\mathcal{F}' = \{I' \mid I' \in \mathcal{F} \wedge I' \subseteq E \setminus D\}$ . De familie van deelverzamelingen wordt dus beperkt tot de gereduceerde verzameling  $E \setminus D$ . De minor-matroïde wordt genoteerd als  $M \setminus D$ ; de bijbehorende operatie wordt *restrictie* genoemd. (De term *restrictie* ontleen we aan [13]. De Engelstalige literatuur gebruikt ook 'deletion'.) Men kan ook uitgaan van de duale matroïde  $M^*$ . Als men hier de verzameling  $D \subset E$  verwijdert, is de resulterende matroïde  $M^* \setminus D$ . De duale hiervan is een transformatie van de oorspronkelijke  $M$  en wordt genoteerd als  $M/D$ . Deze transformatie van  $M$  wordt *contractie* genoemd. Op grond van deze definities is duidelijk dat  $M^* \setminus D = (M/D)^*$  en dus  $M^*/D = (M \setminus D)^*$ .

De operaties 'restrictie' en 'contractie' zijn gemakkelijk voor te stellen in onze voorbeeldmatroïde  $M(E, \mathcal{F})$  van bossen in een graaf. Restrictie betekent dat de kanten in  $D$  wor-

den verwijderd en contractie betekent dat de kanten van  $D$  worden samengeknepen.

In geval van restrictie, de overgang van  $M$  naar  $M \setminus D$ , gaan de cyclen door  $D$  verloren, maar de sneden door  $D$  blijven in afgeslankte vorm (zonder  $D$ ) bestaan. In geval van contractie, blijven cyclen verkleind behouden maar gaan sneden verloren.

Het onderstaande algoritme genereert een cykel-vrije verzameling met minimaal gewicht, alsmede een snede-vrije verzameling met maximaal gewicht. Het algoritme gaat uit van een matroïde  $M_0 = (E_0, \mathcal{F}_0)$ . Vanwege de contractie- en restrictie-operaties slinken  $E$  en  $\mathcal{F}$  tijdens executie. De verzamelingen  $R$  en  $B$  zijn deelverzamelingen van de initiële verzameling  $E_0$ .

**Generiek algoritme.**  $M := M_0$ ;  $R := B := \emptyset$ . Herhaal de volgende operaties in willekeurige volgorde totdat  $E = \emptyset$ .

*Contractie:* selecteer een kant  $x$  met minimaal gewicht in een snede  $S$ ;  $B := B + x$ ;  $M := M/\{x\}$ .

*Restrictie:* selecteer een kant  $x$  met maximaal gewicht in een cykel  $C$ ;  $R := R + x$ ;  $M := M \setminus \{x\}$ .

Het bewijs van het algoritme wordt gegeven in Stelling 6, die door drie lemma's wordt voorbereid. Een triviale invariant is:  $E_0 = E \cup B \cup R$ .

**Lemma 1** (invariant).

(a)  $C$  is cykel van  $M_0$  en  $C \subseteq E \cup B \Rightarrow C \setminus B$  is cykel van  $M$ .

(b)  $S$  is snede van  $M_0$  en  $S \subseteq E \cup R \Rightarrow S \setminus R$  is een snede van  $M$ .

*Bewijs.* We bewijzen alleen (a). Deel (b) is dual. Bij contractie ofwel overheveling van  $x$  uit  $E$  naar  $B$  blijft een cykel door  $x$  in afgeslankte vorm (zonder  $x$ ) bestaan. Na de restrictie ofwel de overheveling naar  $R$  is een cykel  $C$  door  $x$  niet langer een cykel, maar een dergelijke cykel  $C$  ligt in  $E \cup R$ .  $\square$

**Lemma 2** (invariant). *Er is een partitie van  $E_0$  zodat  $E_0 = B_0 \cup R_0$  en*

(a)  $B_0$  is een maximaal bos van  $M_0$  met minimaal gewicht en  $B \subseteq B_0$ ;

(b)  $R_0$  is een maximale vulling van  $M_0$  met maximaal gewicht en  $R \subseteq R_0$ .

*Bewijs.* De invariant geldt bij aanvang. Vanwege dualiteit bewijzen we de invariant alleen ingeval contractie wordt uitgevoerd. Als een  $x \in B_0$  geselecteerd wordt, wordt de invariant behouden.

Stel een  $x$  met  $x \notin B_0$  wordt geselecteerd. In  $B_0 + x$  bevindt zich volgens Stelling 5 een unieke cykel  $C$  met  $x \in C$ . Vanwege de invariant zelf ( $B_0$  is disjunct met  $R_0$  en dus met  $R$ ) bevindt  $C$  zich in  $E \cup B$ . Volgens Lemma 1 is  $C \setminus B$  een cykel in  $M$ . De doorsnede in  $M$  van  $S$  en  $C \setminus B$  heeft behalve  $x$  nog een doorsnede-element  $y$  dat tot  $C - x \subseteq B_0$  behoort. Na de contractie-operatie wordt de invariant hersteld door  $x$  toe te voegen aan  $B_0$  en  $y$  te verwijderen uit  $B_0$ . Volgens Stelling 5 is  $B_0$  nu een maximaal bos. Het complement van de nieuwe  $B_0$  is de nieuwe  $R_0$ . (Deze twee verzamelingen hebben  $x$  en  $y$  onderling geruild.) Omdat  $y$  ook in  $S$  is, is zijn gewicht niet kleiner dan dat van  $x$ . De nieuwe  $B_0$  heeft dus ook een minimaal gewicht.  $\square$

**Lemma 3.** *Het algoritme termineert.*

*Bewijs.* Als een nog niet geselecteerd element  $x$  in  $R_0$  is, dan bevat  $B_0 + x$  een cykel  $C$ . Op dezelfde manier als in Lemma 2 volgt dat  $C \setminus B$  een cykel is in  $M$ . De restrictie-operatie kan worden toegepast. Het geval  $x$  in  $B_0$  is dual. Zolang  $E \neq \emptyset$ , kan dus een  $x$  geselecteerd worden.  $\square$

**Stelling 6.** *Het generieke algoritme is correct.*

*Bewijs.* Lemma 2 impliceert dat het algoritme de juiste postconditie heeft. Lemma 3 betreft de terminatie.  $\square$

Het generieke algoritme en het Blauw-rood algoritme zijn gelijkwaardig. De verzameling  $B$  in het generieke algoritme komt overeen met de blauwe kanten, de verzameling  $R$  met de rode. Een cykel in  $M$  is een cykel in de oorspronkelijke  $M_0$  zonder rode kanten, of zonder kanten die bij een restrictie betrokken zijn geweest. Evenzo is een snede in  $M$  een snede in  $M_0$  zonder blauwe kanten, of zonder kanten die bij een contractie betrokken zijn geweest. Met behulp van Stelling 4 is gemakkelijk aan te tonen dat de kanten met minimaal gewicht in een snede niet alle rood kunnen worden.

### Algoritmen

In de literatuur over algoritmieken, vooral gericht op informatici, vindt men altijd de algoritmen van Kruskal en van Jarnik-Prim-Dijkstra, zie bijvoorbeeld [2, 5]. Deze zijn geschikt voor implementatie. Van historisch belang is verder het algoritme van Boruvka. De hier genoemde 'klassiekers' zijn geheel buiten de matroïdentheorie om ontwikkeld. Voor een historisch overzicht, zie [4].

**Algoritme van Kruskal.** Herhaal de volgende stappen totdat  $|B| = |V| - 1$ . Kies een niet eerder gekozen kant  $k$  met minimaal gewicht. Als  $B + k$  geen cykel bevat, voeg  $k$  toe aan  $B$ , anders aan  $R$ .

**Algoritme van Jarnik–Prim–Dijkstra.** Kies een willekeurige knoop  $v$  en voeg de lichtste kant  $k$  grenzend aan  $v$  toe aan  $B$ . Herhaal de volgende stappen totdat  $|B| = |V| - 1$ . Kies de lichtste (niet eerder gekozen) kant  $k$  grenzend aan  $B$ . Als  $B + k$  geen cykel bevat, voeg  $k$  toe aan  $B$ , anders aan  $R$ .

**Algoritme van Boruvka.** We starten met de graaf  $G(V, B)$  met  $B = \emptyset$ . Deze bevat  $|V|$  componenten elk bestaande uit één punt. Neem bij elke component  $C_i$  zijn lichtste aangrenzende kant  $k_i \in E$  (dus  $k_i$  heeft slechts één punt in  $C_i$ ). Voeg de kanten  $k_i$  toe aan  $B$ . (Een kant  $k_i$  kan al vanuit een andere component aan  $B$  zijn toegevoegd.) De graaf  $G(V, B)$  met de nieuwe  $B$  heeft minder componenten. Herhaal de actie op de componenten totdat  $|B| = |V| - 1$ .

Merk op dat dit laatste algoritme niet goed werkt als de graaf onderling gelijke kanten bevat. Het is dan mogelijk dat bij voorbeeld drie  $k_i$ 's een driehoek vormen.

We kunnen hieraan nog het Duaal Kruskal algoritme toevoegen.

**Duaal Kruskal algoritme.** Verwijder een kant  $k$  met maximaal gewicht uit de graaf, tenzij daardoor nieuwe componenten ontstaan. Voeg  $k$  toe aan  $R$ . Herhaal dit totdat  $|V| - 1$  kanten overgebleven zijn. Deze vormen dan de verzameling  $B$ .

In de literatuur over matroïden treft men gewoonlijk het *Greedy algoritme* aan, dat vrijwel gelijk is aan Kruskal: kies, zolang mogelijk, een kant  $x$  met minimaal gewicht zodanig dat  $B + x$  geen cykel bevat.

De simpelste afgeleide van het generieke algoritme laat zich als volgt formuleren: breek alle cyclen open en wel bij hun zwaarste schakel.

Het algoritme van Kruskal maakt meteen duidelijk: als alle gewichten verschillend zijn, is de MSF eenduidig bepaald.

Uit het Blauw-rood algoritme is de volgende eigenschap af te leiden. De langste kant in een cykel kan altijd buiten een MSF gehouden worden; voor de kortste kant  $e$  van een snede is altijd een MSF te vinden die  $e$  bevat. De laatste uitspraak vindt men ook als volgt [3, 5]: geef elke knoop in een graaf naar willekeur een A- of een B-label; voor de kortste kant tussen een A-knoop en een B-knoop is altijd een MSF te vinden. Deze uitspraak kan weer specifiek gemaakt worden: voor de kortste kant  $e$  grenzend aan een knoop  $v$  is altijd een MSF te vinden.

### Slotopmerkingen

In dit artikel is theorie bijeengebracht die slechts in gefragmenteerde vorm in de literatuur te vinden is. Algemene theorie over matroïden is te vinden in [9] en [11], maar het generieke algoritme wordt daar niet vermeld. Het bewijs van Stelling 2 komt ook voor in [14]. De bewijzen van de Stelling 3 en 4 zijn parafrasen van bewijzen uit [11].

De blauw-rood-formulering van het generieke algoritme is zoals gezegd afkomstig van Tarjan [12], die echter in zijn bewijs geen gebruik maakt van de dualiteit, maar de blauwe en de rode stap afzonderlijk behandelt. De tekstboeken over algoritmiëk zoals [2, 5–6, 12] richten zich gewoonlijk op een informatica-publiek en vermelden niet het begrip matroïde en benutten dus ook niet de dualiteit. In [7] wordt het Blauw-rood algoritme met behulp van matroïden behandeld. Het bij mijn weten oudste tekstboek dat het generieke algoritme, zonder bewijs, beschrijft, is [8] dat [10] als bron aanwijst.

We hebben alleen in Stelling 2 een eigenschap van grafen gebruikt. Voor de rest is algemene matroïdentheorie behandeld. De waarde van abstractie in de wiskunde wordt hiermee opnieuw geïllustreerd. ◀

### Referenties

- 1 C. Berge, *Hypergraphs, Combinatorics of finite Sets*, North-Holland Publishing Company, 1973.
- 2 Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein, *Introduction to Algorithms*, Third Edition. MIT Press, 2009.
- 3 E.W.Dijkstra Archive, nr. 1273, beschikbaar op: <http://www.cs.utexas.edu/~EWD/ewd12xx/EWD1273.pdf>
- 4 R.L.Graham and Pavol Hell, On the History of the Minimum Spanning Tree Problem, *Annals of the History of Computing*, Vol. 7, Nr. 1, January 1985.
- 5 M.T. Goodrich and R. Tamassia, *Algorithm Design*, Wiley, 2002.
- 6 Jon Kleinberg and Eva Tardos, *Algorithm design*, Addison Wesley, 2005.
- 7 Dexter Kozen, *The Design and Analysis of algorithms*, Springer, 1991.
- 8 E. Lawler, *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rhinehart and Winston, New York, 1976.
- 9 J.G. Oxley, *Matroid theory*, Oxford University Press, 1992.
- 10 P. Rosenstiehl, L'Arbre Minimum d'un Graphe, in: *Theory of Graphs*, Rosenstiehl, ed., Gordon and Breach, New York 1967.
- 11 A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Vol. 2, Springer, 2003.
- 12 R.E Tarjan, Data Structures and Network Algorithms, *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, 1983.
- 13 R.J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Longman, 1972.
- 14 Stefan van Zwam, Matroïden en hun representaties, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/11 nr. 4, december 2010.