

Frans Oort

Mathematisch Instituut

P.O. Box. 80.010

3508 TA Utrecht

f.oort@uu.nl

Onderzoek

Dynamica en periodieke rijen

In dit artikel belicht Frans Oort een eenvoudig probleem over periodieke rijen. Hij introduceert de term D-rij en geeft twee bewijzen voor de periodicititeit van zulke rijen.

We bestuderen rijen $\xi = \{x_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ met

$$x_i \in \mathbb{R}, \quad |x_i| = x_{i+1} + x_{i-1}, \quad \forall i.$$

Omdat deze rijen in dynamische processen worden bestudeerd, introduceren we de naam ‘een D-rij’ voor dit begrip. We zullen laten zien dat elke D-rij periodiek is; het zal blijken dat dit eenvoudig te bewijzen is. Voor de lezer is het wellicht aardig om dit eerst zelf te laten zien.

De rij $\{\dots, 0, 0, \dots\}$ zullen we de nul-D-rij noemen. Deze rij wordt (gemakshalve) van verdere beschouwingen uitgesloten.

We zeggen dat D-rijen $\xi = \{x_i\}$, en $\eta = \{y_j\}$ *equivalent* zijn, notatie $\xi \sim \eta$, als er een $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ en een $t \in \mathbb{Z}$ bestaan zodanig dat

$$y_{i+t} = \lambda \cdot x_i,$$

dat wil zeggen, na eventueel schalen en verschuiven van de indices zijn ze gelijk. Voor een D-rij $\xi = \{z_i\}$ schrijven we $\xi^{-1} = \{z_{-i}\}$; merk op dat dit weer een D-rij is. Als z_i en z_{i+1} gegeven zijn, voor een keuze van i , dan ligt de bijbehorende D-rij vast.

We bestuderen eerst een bijzondere D-rij, gegeven door $x_0 = 0$ en $x_1 = 1$:

$$\sigma := \{\dots, 0, 1, 1, 0, -1, 1, 2, 1, -1, 0, 1, \dots\}.$$

We zien dat deze rij 9-periodiek is.

Lemma 1. *Als een D-rij η niet de nul-rij is, en η bevat tenminste één element gelijk aan nul, dan is $\eta \sim \sigma$.*

Het eenvoudige bewijs laten we aan de lezer over. Een dergelijke D-rij noemen we *speciaal*.

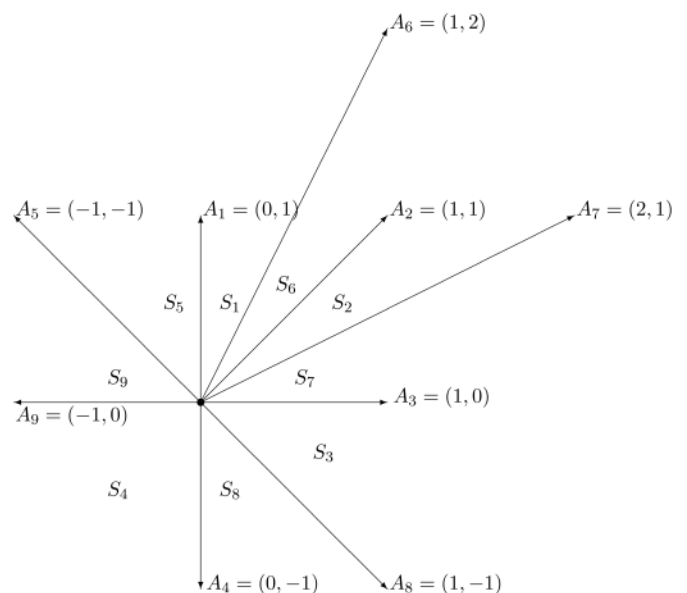
Stelling 2. *Elke D-rij is 9-periodiek.*

We gaan twee bewijzen geven. En we laten ook zien dat de periode van een niet-nul-D-rij precies 9 is. We zien dat dit al bewezen is voor speciale rijen.

Eerste bewijs. Neem de speciale rij $\sigma = \{x_i\}$ gegeven door $x_0 = 0$ en $x_1 = 1$. We definiëren voor elke i de vector

$$A_i := (x_i, x_{i+1}) \in \mathbb{R}^2.$$

Zie Figuur 1. Deze vectoren lopen met de klok mee voor groeiende i , en A_{i+5} is gelegen tussen A_i en A_{i+1} (indices modulo 9). We verdelen



Figuur 1 Vectoren en sectoren voor de speciale rij met $x_0 = 0$ en $x_1 = 1$

het vlak $\mathbb{R}^2$ in gesloten sectoren:

$$S_i := \{v = \alpha \cdot A_i + \beta \cdot A_{i+5} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

We definiëren

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) := (y, |y| - x).$$

We zien dat voor elke D-rij $\{z_i\}$ geldt dat $\varphi(z_i, z_{i+1}) = (z_{i+1}, z_{i+2})$. Voor de speciale rij σ geldt $\varphi(A_i) = A_{i+1}$ en $\varphi^9(A_i) = A_i$.

Merk op: elke sector ligt óf geheel in het bovenhalfvlak $H^+ := \{x, y \mid y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$, óf geheel in het onderhalfvlak $H^- := \{x, y \mid y \leq 0\}$, de afbeelding φ is lineair op H^+ , en φ is lineair op H^- , en $\varphi(S_i) = S_{i+1}$ voor all i .

Zij $\{z_j\}$ een D-rij. Dan is er een index i zodanig dat $(z_0, z_1) \in S_i$; we schrijven

$$(z_0, z_1) = \alpha \cdot A_i + \beta \cdot A_{i+5}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} \varphi^9(z_0, z_1) &= \alpha \cdot \varphi^9(A_i) + \beta \cdot \varphi^9(A_{i+5}) \\ &= \alpha \cdot A_i + \beta \cdot A_{i+5} \\ &= (z_0, z_1) \end{aligned}$$

waarbij de tweede gelijkheid volgt uit het feit dat φ lineair is op elke sector. $\square$

We merken op dat de afbeelding $\zeta : (x, y) \mapsto (y, y - x)$ orde 6 heeft, en gelijk is aan φ op het bovenhalfvlak. De afbeelding $\delta : (x, y) \mapsto (y, -y - x)$ heeft orde 3 en is gelijk aan φ op het onderhalfvlak. Deze curieuze, niet-lineaire φ , een mix van ζ en δ , blijkt precies orde 9 te hebben.

We zien dat voor elke niet-speciale D-rij in elke 9-cykel het tekenpatroon $- - + + + - + + +$ heeft, op cyclische permutatie na.

Tweede bewijs. Zij $\eta = \{y_i\}$ een D-rij die niet de nul-rij is, en niet speciaal is (met andere woorden, alle y_i zijn ongelijk aan 0). Als drie opeenvolgende termen positief zijn, dan is de volgende negatief: voor $\{\dots, a, b, c, \dots\}$ geldt dan $b = a + c$, en de volgende term is $c - b = -a < 0$; we concluderen dat de rij tenminste één negatief getal bevat. (In dit argument, en in de volgende redeneringen geldt $a, b, c > 0$.) Als er één negatieve term te midden van twee positieve termen staat, dan komt er verderop een tweetal negatieve termen: voor $\{\dots, a, -b, c, \dots\}$, geldt $b = a + c$, er komt $\{\dots, a, -b, c, c + b, b, -c, c - b, \dots\}$ en we weten $c - b = -a < 0$. Conclusie: elke niet-speciale D-rij bevat twee opeenvolgende negatieve termen.

Voor $\eta = \{\dots, -a, -b, \dots\}$ met $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ is die rij

$$\eta = \{\dots, -a, -b, a + b, a + 2b, b, -a - b, a, 2a + b, a + b, -a, -b, \dots\}$$

en we hebben bewezen dat elke D-rij 9-periodiek is. $\square$

De D-rijen

$$\sigma \sim \sigma' := \{\dots, 0, 1, 1, 0, -1, 1, x_0 = 2, x_1 = 1, -1, 0, 1, \dots\}$$

en

$$\epsilon := \{\dots, -1, -1, 2, 3, 1, z_0 = -2, z_1 = 1, 3, 2, -1, -1, \dots\}$$

hebben de eigenschap $(\sigma')^{-1} = \sigma'$ en $\epsilon^{-1} = \epsilon$. Zijn dit de enige met deze eigenschap?

We merken op dat elke speciale σ'' de eigenschap heeft dat $(\sigma'')^{-1} \sim \sigma''$ en $\sigma'' \sim \sigma' \sim \sigma$. We zien dat elke speciale σ'' , op verschuiven van de indices na, de eigenschap $(\sigma'')^{-1} = \sigma''$ heeft.

Propositie 3. Voor een niet-nul, niet-speciale D-rij τ met de eigenschap $\tau^{-1} \sim \tau$ geldt $\tau \sim \epsilon$. Omgekeerd, als $\tau \sim \epsilon$ dan geldt, na eventueel verschuiven van de indices, dat $\tau^{-1} = \tau$.

Bewijs. In τ komt $\dots, a, -b, -c, d, \dots$ voor met $a, b, c, d > 0$. Uit $\tau^{-1} \sim \tau$ en uit het feit dat in elke 9-cykel het patroon $- - +$ precies één keer voorkomt, volgt dat $b = c$. Na schalen zien we dat $\tau \sim \{\dots, -1, -1, \dots\} \sim \epsilon$.

Omgekeerd, omdat $\epsilon^{-1} = \epsilon$, volgt de tweede conclusie. $\square$

Het bovenstaande probleem noemde ik aan een aantal collega's, vooral om te zien welke oplossingen er gekozen werden. Meetkundigen vonden de oplossing vermeld in het eerste bewijs. Wiskundigen met affiniteit voor getaltheorie en combinatoriek vonden meestal het tweede bewijs. Ook kreeg ik een oplossing waar *Mathematica* een bewijs leverde.

Het probleem hier behandeld is eenvoudig. Het werd in [1] gesteld en opgelost ("The problem turned out to be rather elementary"). In [3] worden dynamische systemen van dergelijke afbeeldingen bestudeerd, en φ hierboven is het bijzondere geval $\mu = 1, \nu = 0$ in (1.5) van [3]. Verdere studie van zulke afbeeldingen vinden we in [2]. $\leftarrow$

Dankwoord

Maxim Kontsevich noemde dit probleem in zijn voordracht op de Mathematische Arbeitstagung 2011 in Bonn. Don Zagier had het onder zijn aandacht gebracht. Ik dank Maxim Kontsevich voor het geven van informatie over dit probleem en voor de referenties.

Referenties

- 1 M. Brown, Problem 6349, *Amer. Math. Monthly* **90** (1983), 569. [Solution, **92** (1985), 218.]
- 2 M. Herman, Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, *Astérisque* **144**, Soc. Math. France, 1986.
- 3 J. Lagarias en E. Rains, Dynamics of a family of piecewise-linear area-preserving plane maps I. Rational rotation numbers, *Journal of Difference Equations and Applications* **11** (2005), 1089–1108.