Ed de Moor
Sloterkade 22-A
1058 HE Amsterdam
e.w.a.demoor@planet.nl

Sieb Kemme
Educatieve Adviezen Kemme BV
Hoofdstraat 149
9827 PA Lettelbert
siebkemme@educadbv.nl

Geschiedenis

Meetkundeonderwijs op gymnasium en hbs 1900–1968

Tot 1968 vormden meetkunde en algebra de kern van het wiskundeprogramma op gymnasium en hbs. Met de Mammoetwet van 1968 ontstonden de nieuwe schooltypen mavo (thans vmbo), havo en vwo (waaronder het gymnasium). Ed de Moor en Sieb Kemme beschrijven in dit artikel hoe het meetkundeonderwijs er voor de invoering van de Mammoetwet uitzag en welke discussies speelden rond de invulling van dat meetkundeonderwijs. In een vervolgartikel zal beschreven worden wat er in het meetkundeonderwijs veranderde na de invoering van de Mammoetwet.

"Euclides werd mij bijgebracht door een privéleraar en ik weet nog goed welke grote bevrediging de duidelijk meetkundige bewijzen mij gaven." Zo schreef Charles Darwin (1808–1882) in zijn autobiografie. Bertrand Russell (1872–1970) zegt in zijn geschiedenis van de filosofie dat zonder de Griekse meetkunde er geen moderne wetenschap zou zijn ontstaan. Of dit te rechtvaardigen valt, durven wij niet te zeggen, het is in ieder geval zeker dat velen — wetenschappers, denkers, leraren — hun eerste scholing in deductief denken hebben gehad via bestudering van *De Elementen* van Euclides (300 voor Christus).

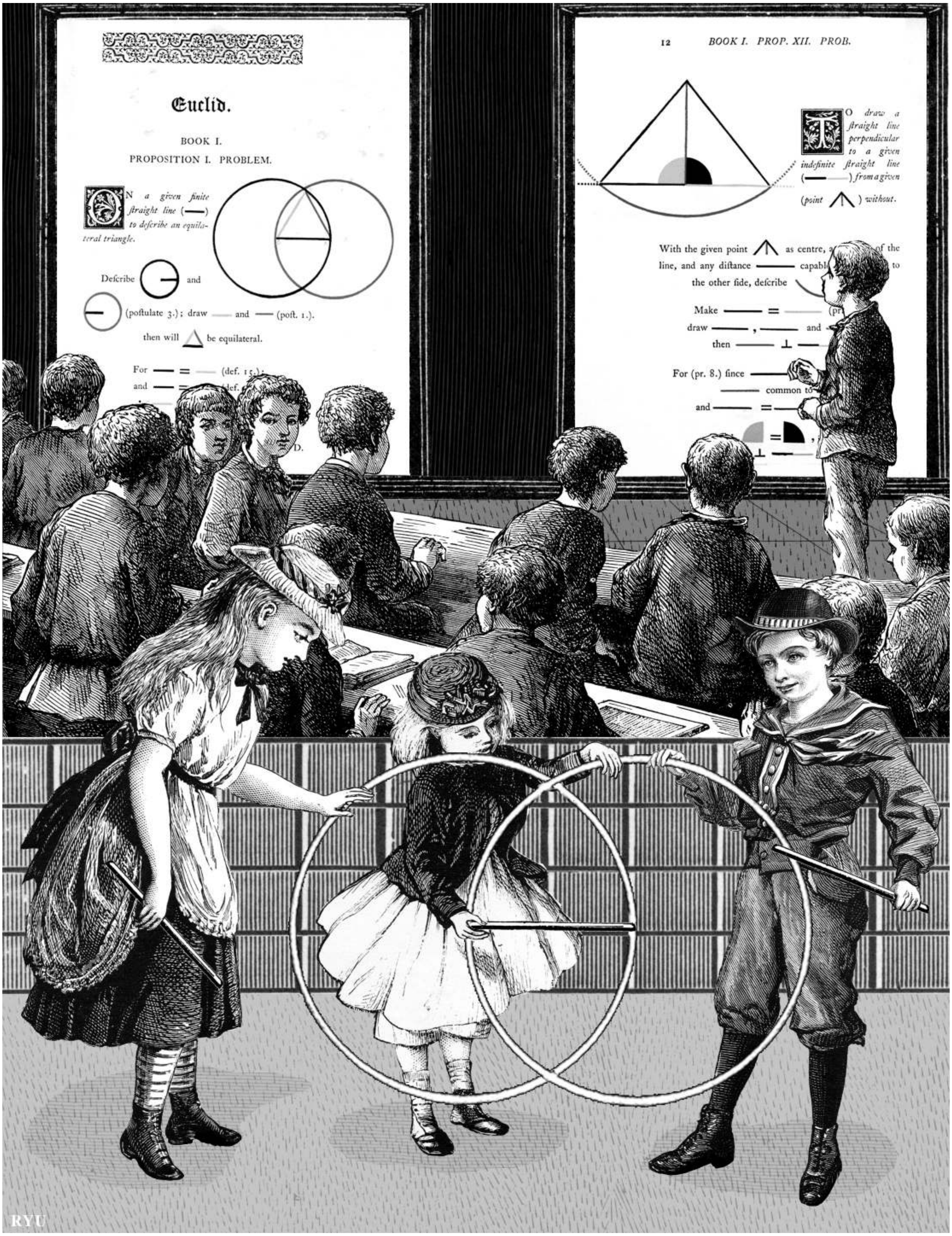
Wiskundeonderwijs, dat was eeuwenlang in feite identiek met een cursus euclidische meetkunde. Tot 1968 bepaalde dit vak ook in Nederland samen met algebra het wiskundeprogramma op hbs en gymnasium. De inhoud voor het eerste leerjaar betrof evenwijdigheid, congruentie, meetkundige plaatsen, constructies met passer en liniaal en de stellingen over bijzondere vierhoeken. Een gemiddeld leerboek uit het begin van de 20ste eeuw omvatte zo'n 50 stellingen en ongeveer 250 vraagstukken. Ze verschilden van logische strengheid, maar qua leerstof en methode ('gegeven – te bewijzen – bewijs' of 'gegeven – te construeren – constructie') scheelde dat niet zo erg veel. In het modale onderwijs hadden de boeken waarin aan de strengheid van een zuiver axiomatische aanpak niet de hoogste eisen werden gesteld het meeste succes.

Sommige leraren hadden bezwaren tegen het sjoemelen met de axioma's en streefden een zuiver logische opzet na. De meest extreme vorm daarvan is te vinden in het werk van J.H. Schogt (1892–1958). Diens meetkundecursus omvatte 18 axioma's, 5 postulaten, 266 stellingen, 24 werkstukken en bijna 1500 vraagstukken. In de inleiding van het vraagstukkenboek stelt de auteur dat hij "formeel-logische quaesties" (omkeering, contrapositie) reeds vroeg ter sprake brengt, omdat hij ondervonden had "dat deze onderwerpen den leerlingen opmerkelijk weinig moeilijkheden" gaven. Hoe formeel en anti-aanschouwelijk deze aanpak was zien we in het voorbeeld in Figuur 1.

De wiskundeleraren Eduard Jan Dijksterhuis (1892–1965)[1] en H.J.E. Beth (1880–1952) prezen Schogts werk, maar zijn methode heeft nooit echt voet aan de grond gekregen. In het onderwijs van alledag bestond veel onvrede met een strenge aanpak voor de inleiding in de meetkunde, zelfs in een gematigde vorm, zoals die in de gemiddelde leerboeken werd gehanteerd. Het is Tatja-

> 'Helften van congruente lijnstukken zijn congruent.
> Onderstelde: $AB = A'B'$, PQ is de helft van AB, $P'Q'$ is de helft van $A'B'$.
> Gestelde: $PQ = P'Q'$
> Bewijs: Er zijn drie gevallen denkbaar: $PQ > P'Q'$, $P'Q' > PQ$ en $PQ = P'Q'$.
> Was $PQ > P'Q'$, dan was volgens stelling 7 $PQ + PQ > P'Q' + P'Q'$ en daar $P'Q' + P'Q' = A'B'$, volgens stelling 4 $AB > A'B'$. Dit is in strijd met het onderstelde, dat $AB = A'B'$, dus kan het geval, dat $PQ > P'Q'$ is, zich niet voordoen. Evenzo bewijst men, dat $P'Q' > PQ$ zich niet kan voordoen, omdat daaruit zou volgen, dat $A'B' > AB$, hetgeen ook in strijd is met het onderstelde. Dus moet $PQ = P'Q'$ zijn.
> Hiermede is de stelling bewezen.' (Schogt, 1929a, p. 13)

Figuur 1 De strenge aanpak van Schogt



Illustratie: Ryu Tajiri

na Ehrenfest-Afanasjeva (1876–1964) — verder te noemen mevrouw Ehrenfest — geweest, die hierover met haar brochure *Wat kan en moet het meetkundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?* uit 1924 aandacht trok. Deze publicatie leidde tot een discussie met Dijksterhuis en is de directe aanleiding geweest voor de oprichting van het *Bijvoegsel van Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, dat over didactische vraagstukken handelde en dat later tot het ook nu nog bekende tijdschrift *Euclides* omgedoopt werd.

Hoofdstreven van de aanhangers van de puur logisch-deductieve stroming (Dijksterhuis c.s.) was het zuiver leren denken. Dat was dan ook het kernthema van de discussies, die zich in de beginjaren van het vakblad *Euclides* voltrokken. Het tijdschrift werd geleid door de meest fervente aanhangers van deze richting: Schogt, Beth, Dijksterhuis en de befaamde schoolboekenauteur Piet Wijdenes (1892–1972). Een betere naam dan *Euclides* hadden deze didactici zich niet kunnen wensen. Veel aanhang ontvingen zij uit de academische wereld, hoewel er uitzonderingen zijn te noemen als David van Dantzig (1900–1959) en Gerrit Mannoury (1867–1956).

Nu kwam het ‘probleem van de didactiek’ niet zo maar uit de lucht vallen. Allereerst was aan het eind van de negentiende eeuw door de pedagogische Reformbeweging of Nieuwe Schoolbeweging een ‘nieuw denken’ over onderwijs ontstaan. Hierin kwam het kind centraal te staan en begon didactiek als zelfstandige discipline vorm te krijgen. Op de talloze uitwerkingen hiervan gaan we nu niet in. Ook in universitair-wiskundige kringen ontstond interesse voor het onderwijs op de middelbare scholen. Zo werd in 1908 tijdens het vierde Internationale Congres van Wiskundigen te Rome de CIEM (Commission Internationale de l’Enseignement Mathématique) opgericht. Felix Klein (1849–1925) werd hiervan de eerste voorzitter. Het eerste dat men toen ter hand nam, was het aanvankelijk meetkunde onderwijs. In die tijd kwam in Duitsland ook het denkpsychologische onderzoek op gang, waaruit bleek dat kinderen rond hun twaalfde levensjaar in het algemeen nog niet in staat zijn formeel-logische redeneringen te voltrekken.


PAEDAGOGIESE VOORDRACHTEN

WAT KAN EN MOET

HET MEETKUNDE-ONDERWIJS

AAN EEN NIET-WISKUNDIGE GEVEN

DOOR

T. EHRENFEST–AFANASSJEEWA

f 0,75

BIJ J. B. WOLTERS' U. M. — GRONINGEN, DEN HAAG, 1924

Figuur 2 De gewraakte brochure uit 1924

Wat wilde mevrouw Ehrenfest?

Pogingen om de didactiek van het aanvankelijk meetkundeonderwijs te verbeteren waren in het begin van de twintigste eeuw al verschillende malen ondernomen. Onder meer door Willem Reindersma (1877–1946)[3], met wie mevrouw Ehrenfest al spoedig na haar aankomst in Nederland in contact was gekomen. In de geest van die tijd lag voor de vernieuwers het accent op ‘leren door doen’, waarmee zowel zelfstandig werken als concreet handelen van de leerling werd bedoeld. Mevrouw Ehrenfest sloot zich hier in zekere zin bij aan, maar haar uiteindelijke doel was veel fundamenteler. Zij maakte onderscheid tussen *ruimteleer* en *axiomatiek*. Met het eerste bedoelde zij het ‘begrijpen’ van de ruimte en het kunnen toepassen daarvan, het tweede betreft de meetkunde doorgronden als een formeel logisch systeem van definities, axioma’s en stellingen. Haar stond een drietrapsprogramma voor ogen dat als volgt was ingedeeld:

- propedeutische of inleidende cursus (10 tot 12 jaar)
- systematische cursus (12 tot 16 jaar)
- strikt axiomatische leergang (16 tot 18 jaar)

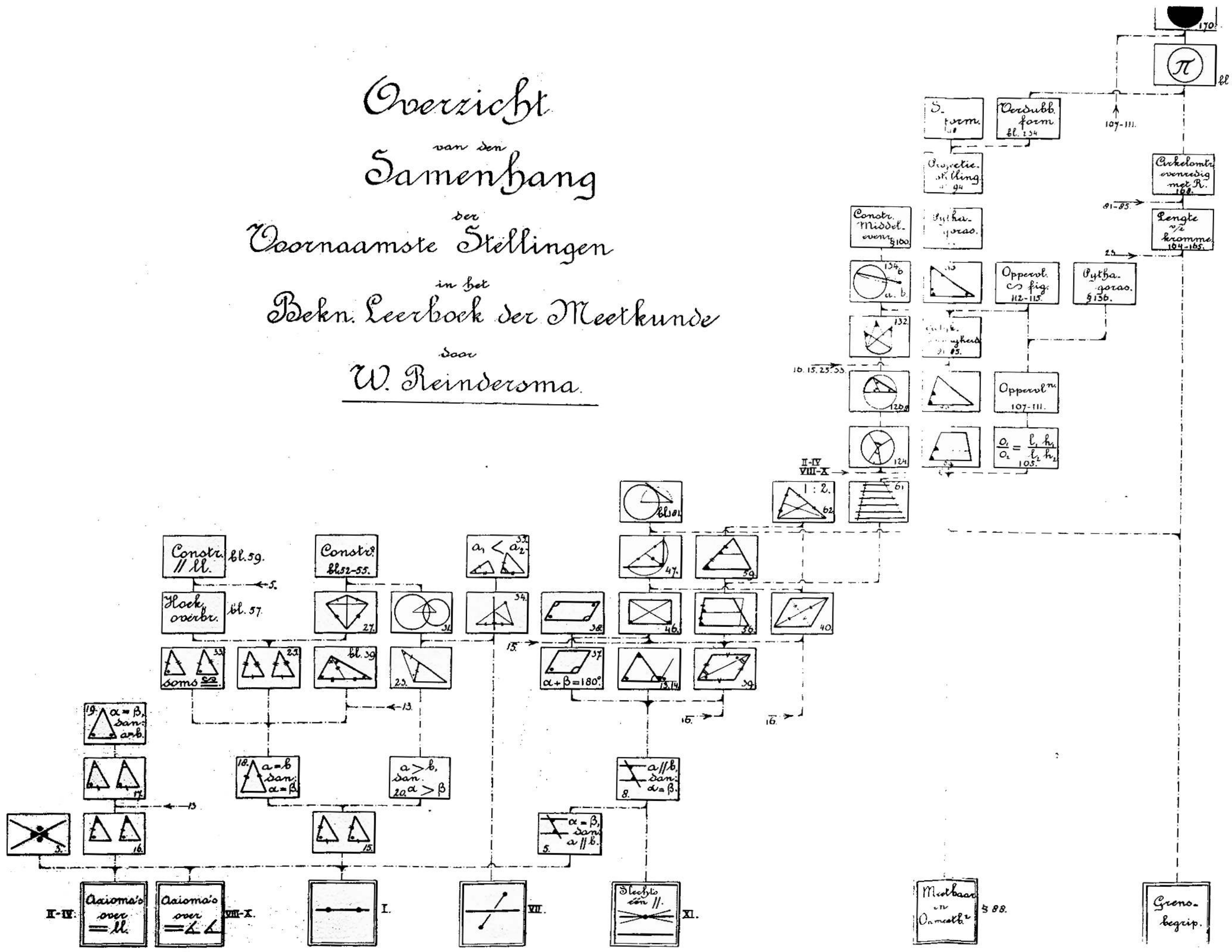
De *propedeutische cursus* diende een aanschouwelijk karakter te hebben, waarbij werd uitgegaan van intuïtieve meetkundige noties, die kinderen op natuurlijke wijze in de realiteit hebben verworven. Een voorbeeld daarvan is een strak gespannen touw als notie van een rechte lijn. Zo kon het voorstellingsvermogen — het vormen van mentale beelden zouden wij thans zeggen — ontwikkeld worden. Deze intuïtieve werkzaamheid achtte zij niet alleen van belang voor het verwerven van begrippen en relaties tussen die begrippen, maar zag zij zelfs als een noodzakelijke voorwaarde voor datgene waar het haar in feite om ging: leren denken. Deze opvatting had zij zelfs tot haar credo verheven: ‘Zonder intuïtie is geen denken mogelijk’.

Zo’n intuïtieve start moest de basis leggen voor de tweede trap in het programma de *systematische cursus*. Daarin kon dan al enige nadruk op het logische redeneren gelegd worden. Niet volgens de traditionele euclidische opbouw, maar aangepast aan het niveau van de leerlingen. Praktisch betekende dit, dat evidente stellingen (zoals, de basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn gelijk) niet bewezen werden, maar voorlopig als aanschouwelijke evidenties (axioma’s) werden opgevat. Verder dat de leerlingen zelf — wel onder leiding van de leraar — de stellingen dienden te formuleren en bewijzen. En ten slotte dat de inhoud van de cursus zo beknopt mogelijk diende te zijn. Alles diende in het teken te staan van de essentie van de theorie. Daartoe zouden ketens van stellingen opgebouwd moeten worden, ook wel stambomen genoemd, waarvan een voorbeeld in Figuur 3 zien. Het opbouwen van zo’n beperkt stukje theorie werd later door Freudenthal ‘lokaal deductief redeneren’ genoemd.

De derde trap in dit ambitieuze plan tot een herziening van het toenmalige meetkundeonderwijs moest een strak opgezette *axiomatische leergang* van de meetkunde worden. Naast het feit dat de leerlingen zouden leren wat de consistentie van een formeel systeem is, zouden zij ook geconfronteerd moeten worden met de betekenis van het parallellen-postulaat van de euclidische meetkunde. Het ging haar in dit programmavoorstel dus vooral om het leren denken. Zij achtte het “van grote praktische beteekenis, dat iemand zich niet alleen voor de juistheid van zijn opvattingen, maar ook voor den oorsprong en de logische reden daarvan interesseert”. In dit verband zij er aan herinnerd, dat de studie van de grondslagen van de wiskunde in het begin van deze eeuw een grote vooruitgang had geboekt en dat mevrouw Ehrenfest deze ontwikkelingen van zeer nabij had meegemaakt, waarbij zij met name gefascineerd was door de ontdekking van de niet-euclidische meetkunden met hun eigen axiomastelsels en bijbehorende modellen. Juist dit laatste zag zij ook als een mogelijk onderwerp van studie voor de derde trap van haar leergang.

Dijksterhuis’ kritiek

Na de Eerste Wereldoorlog was in intellectuele kringen in West-Europa een zekere anti-mathematische stemming ontstaan. In sommige kringen wilde men de wiskundeprogramma’s beknotten — voor enkele schooltypen zelfs afschaffen. Iets wat Dijksterhuis in het geheel niet beviel. In het bijzonder stuitte



Figuur 3 Stamboom van stellingen

hem het streven naar een informele start van het meetkundeonderwijs tegen de borst. Het was dan ook niet verwonderlijk dat hij de pen opnam tegen mevrouw Ehrenfest. 'Moet het meetkundeonderwijs gewijzigd worden?' was het artikel van zijn hand in het eerste nummer van het *Bijvoegsel van Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*. Hierop volgde nog een weerwoord van mevrouw Ehrenfest, direct gevolgd door het 'laatste woord' van Dijksterhuis.

Het zal niet verbazen, dat Dijksterhuis zich door mevrouw Ehrenfests brochure "in zijn meest fundamenteele mathematische overtuigingen (voelde) aangetast". Het antwoord op de door hem zelf gestelde vraag was dan ook een hartgrondig en onomwonden 'neen'. Het omvangrijke, nog immer zeer leesbare artikel, is een felle, in scherpe bewoordingen gestelde kritiek op mevrouw Ehrenfests opvattingen. Niet alleen betreffende enkele vorm- en begripskwesties, maar vooral ook ten aanzien van de feitelijke strekking van het geschrift. Dit betrof op de eerste plaats het feit dat Dijksterhuis bezwaren had tegen het aannemen van evidente stellingen. Dit zou tot een verkeerde habitus kunnen leiden, waardoor het meetkundeonderwijs zou worden ontdaan van het belangrijke doel, namelijk leren redeneren. Het tweede bezwaar richtte zich op de door Ehrenfest zo belangrijk geachte intuïtieve ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht. Weliswaar erkende ook Dijksterhuis het belang van een zekere intuïtieve fase, maar hij meende dat "meetkundig denken (ook) mogelijk is zonder ruimtelijk voorstellingsvermogen". Als voorbeeld haalt hij de 'stereometrische constructies' aan, die alleen door middel van redeneringen op te lossen zijn, zoals: "Gevraagd moge worden een rechte x te construeren, die twee gegeven kruisende rechten l en m onder gelijke hoeken kruist, die evenwijdig is aan een vlak V en twee geven kruisende rechten p en q snijdt." Voor de zwakkere leerling zag hij dit zelfs als een goede oefening in het leren redeneren, zo argumenteerde hij: "Men kan juist den niet wiskundig aangelegden leerling geen sterkeren moreelen steun geven, dan wanneer men hem de overtuiging weet bij te brengen, dat alles wat hij op H.B.S. van wiskunde heeft te leeren (...) voor hem bereikbaar is door zuiver logisch redeneeren en dat een goed voorstellingsvermogen weliswaar voor hem, die het bezit, een machtig hulpmiddel vormt, maar dat het gemis aan dat vermogen nooit een onoverkomelijk struikelblok kan zijn."

Kortom er viel in de jaren '20 met Dijksterhuis niet te praten over een andere start van het meetkundeonderwijs. Hij bleef bij zijn standpunt dat ook de aanvang volgens een strak logisch-deductieve opbouw moest plaatsvinden. Hij achtte de axiomatisch opgestelde meetkunde, eerst planimetrisch, daar-

32. De leerling moet op weg van huis naar school bij elke straathoek de hoek die hij maakt, opmeten en deze optekenen. Op grond daarvan de hoek bepalen die de voorgevel van zijn huis en die van de school maken. Dit controleren met de stadsplattegrond. Wat te doen als de wegen niet recht zijn? Iets analoogs als oefening vooraf binnen het schoolgebouw doen.

53. Welke richting moet een vliegtuig in Berlijn nemen om via de kortste weg in Moskou te komen? En hoe van Berlijn naar Java? Maak gebruik van een globe en een touwtje. Is de boog van een parallelcirkel op de bol de kortste afstand ?

69. Waarom loopt de maan met je mee? Als je in een rijdende trein zit, waarom schieten de dingen die dichter bij zijn dan sneller voorbij dan die welke verder weg zijn? Maak een schematische tekening.

101. Houd een beker zó dat je de rand als een rechte lijn ziet. (Kijk met één oog.) Daarna langzaam naar beneden bewegen. Wat gebeurt er nu met de vorm ven de rand? Hoe moet je die tekenen? Zet een glasplaat tussen je oog en de beker en teken daarop de rand van de beker. Hoe moet je de beker houden opdat de rand precies een cirkel wordt?

155. Men wil een grote vloer met één soort tegels volledig bedekken. Welke vorm kunnen deze tegels hebben? Kunnen het driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken zijn? Kunnen ze ook willekeurige hoeken hebben?

162. Maak schematische tekeningen van de methode om de straal van de aarde te bepalen. Evenzo voor de afstand van de maan als je de straal van de aarde kent.

170. Je moet een rok en een broek van gelijke lengte naaien. Waarvoor heb je het meeste stof nodig? Je kunt dit ongeveer schatten, als je de rok als een koker opvat en de broek als twee kokers.

Figuur 4. Enkele voorbeelden uit de *Übungensammlung*

na in de ruimte, daartoe hét geijkte middel, ook voor de allerjongste kinderen in het voortgezet onderwijs. Verder beriep hij zich voor zijn standpunt op de historische betekenis, zowel van de euclidische meetkunde zelf als van de onderwijskundige traditie en ook op het esthetische aspect. De opvoedende waarde, zoals het kweken van discipline en karaktervorming, werd hogelijk door hem geprezen, maar bovenal was het aspect van de vormende waarde, die er van het wiskundeonderwijs uit zou gaan, zijn leidend motto: “Wat ik als doel van het meetkunde-onderwijs zie, oefening in zuiver denken en spreken (...).”

Moeten we een winnaar in deze ‘strijd’ aanwijzen dan is dat overduidelijk Dijksterhuis. Zo kwam een officiële commissie onder leiding van Dijksterhuis en H.J.E. Beth in 1926 met een voorstel voor een nieuw hbs-programma, waarin vastgehouden werd aan een logisch-deductieve inleiding in de meetkunde. De geest van dit voorstel wordt het meest duidelijk uit het volgende citaat: “Hoofddoel van het wiskundeonderwijs is het bijdragen tot geestelijke ontwikkeling: nevendoel het aanbrengen van nuttige kennis.” Zo bleef alles voorlopig bij het oude.

Übungensammlung

Mevrouw Ehrenfest gaf echter niet op. Zo kwam zij in 1931 met haar *Übungensammlung* waarmee zij een praktische handreiking wilde geven voor de uitwerking van de propedeutische cursus. Dit in het Duits geschreven boekje bevat 194 ideeën, geordend naar 19 onderwerpen. Het is geen lineaire leergang; de losse activiteiten zijn bedoeld als ideeën voor lessen, die door de leraar uitgewerkt dienen te worden. Het hoofddoel is het ontwikkelen van het ruimtelijk voorstellingsvermogen. Mentale activiteiten worden gepropageerd boven het concrete handelen. Empirische activiteiten dienen betekenis te hebben voor het denken. Als voorbeeld hiervoor noemt zij het vinden van de constante verhouding tussen omtrek en middellijn van de cirkel door middel van meten versus de methode van de ingeschreven zeshoek, twaalfhoek, enzovoort.

Naast activiteiten in het platte vlak wordt vooral ook in de ruimte gewerkt, ook op gekromde oppervlakken. De begrippen worden zoveel mogelijk ontleend aan objecten en verschijnselen uit de realiteit, met inbegrip van machines en werktuigen. Bij het onderwerp afstanden komt het schatten, kiezen van een maat en de relativiteit van maten aan de orde. Het begrip hoek ontstaat uit de beweging van de wijzers van de klok, waardoor meteen draaiing en draaiingszin ter sprake komen. In Figuur 4 zien we en aantal voorbeelden (vertaling van de auteurs).

Het begrip kortste afstand wordt aan de hand van allerlei reële situaties onderzocht. Voor de ontwikkeling van het begrip rechte lijn wordt uitgegaan van intuïtieve ervaringen bij viseren, het spannen van een touw, de gang van een lichtstraal, maar ook van de lijn als rotatie-as, die een lichaam invariant laat. Doorsneden met behulp van vloeistoffen in ruimtelijke vormen, onderzoek van schaduwen, perspectivische beelden en het maken van aanzichten, maken duidelijk wat zij wilde: inzicht verwerven in ruimtelijke begrippen en relaties op grond van aanschouwelijkheid.

In veel van deze opgaven wordt duidelijk dat mevrouw Ehrenfest eerst en vooral natuurkundige was. De aangehaalde voorbeelden laten zien hoe de ‘opgaven’ qua inhoud en vorm afweken van de gewone schoolboekopgaven. Ook het niveau van de verschillende oefeningen onderling is sterk verschillend. Redenen waarom dit boek bepaald niet erg geschikt was (en dat ook nu niet zou zijn) voor de modale leraar. Toch zou dit obscure boek een belangrijke betekenis gaan krijgen voor de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs in Nederland. Hans Freudenthal (1905–1990) maakte Pierre van Hiele (1909–2010)[4] al in 1931 attent op dit geschrift. In 1951 schreef Freudenthal: “(...) dat haar helaas tot verregaande onbekendheid gedoemde *Übungensammlung* het beste is dat ik op mathematisch-didactisch gebied ooit heb gezien (...).” We wijzen er nogmaals op dat de propedeutische cursus als doel had om op aanschouwelijke wijze de basis — en in feite kon dat grotendeels al op de lagere school — te leggen voor de tweede trap: een systematische meetkundecursus.

De Wiskunde Werkgroep

Sinds 1915 bestond de *New Educational Fellowship* (NEF), waarin nieuwe onderwijsvormen een gemeenschappelijk internationaal platform hadden gevonden. In 1936 richtte Kees Boeke (1884–1966) de Nederlandse tak van de NEF op onder de naam *Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* (WVO). Voor het wiskundeonderwijs ontstond toen vrijwel meteen een aparte afdeling: de Wiskunde Werkgroep. Tot de eerste leden behoorden mevrouw Ehrenfest, in wier huis in Leiden de meeste bijeenkomsten werden gehouden, de wiskundeleraar Piet J. van Albada (1905–1997)[5], de logicus Evert W. Beth (1908–1964), de fysicus en pedagoog Philip Kohnstamm (1875–1990) en Dijksterhuis. Men ging direct aan het werk en men nam niet de eenvoudigste problemen ter hand. Hoe zijn denkprocessen bij het oplossen van wiskundeopgaven bij de leerlingen te bevorderen, welke zijn de taalmoeilijkheden daarbij, hoe leer je kinderen een probleemstelling organiseren en zijn er mogelijkheden om het voorstellingsvermogen te oefenen. Deze vraagstellingen kwamen van de kant van Kohnstamm, die samen met de Wiskunde Werkgroep aan het Nutsseminarium in Amsterdam werkte aan de zogenoemde aansluitingsproblematiek tussen lager en middelbaar onderwijs.

In 1938 werden nog eens drie studiegroepen ingesteld met de volgende opdrachten:

1. Uitwerking van de propedeutische cursus in de geest van mevrouw Ehrenfest.
2. Meetkundeonderwijs aan twaalfjarigen, in verband met de ontwikkeling van de denkpsychologie.
3. Minimum-eisen (...) om de culturele waarde van het planimetrie-onderwijs tot zijn recht te doen komen.

Evert Beth deed op eigen kracht een onderzoek naar het tweede punt en gaf daarvan in 1939 in *Euclides* een verslag met tamelijk teleurstellende resultaten.

Een heel bijzondere bijdrage was die van Van Albada, die op geheel eigen wijze de ideeën van de *Übungensammlung* voor de eerste klas van het Montessori Lyceum in Rotterdam had uitgewerkt. De vorm was die van werkkaarten, die de leerlingen zelfstandig moesten afwerken. De aard van de activiteiten wordt gekenmerkt door het werken met concrete materialen, modellen en foto's, door tekenen, meten, construeren, knippen en kleuren zonder dat dit alleen om concreet handelen gaat. Het is een cursus van bijzonder hoog niveau. Helaas is het materiaal nooit officieel uitgegeven. Later heeft Van Albada nog een beschrijving gegeven van een vijfjarig programma, waarin hij de beoogde drietrapsaanpak van mevrouw Ehrenfest gebruikte, maar ook dit geschrift is helaas nooit gepubliceerd.

Na de oorlog zouden de activiteiten van de werkgroep weer opgevat worden. De groep groeide doordat veel wiskundedidactici zich aansloten bij de werkers van het eerste uur. Het is geen overdrijving te stellen dat de jaren '50 het decennium van de meetkundedidactiek waren. Henk Mooij schreef een proefschrift over het klassengesprek in de meetkundeles, Chris Boermeester behandelde dit onderwerp voor de mulo. De denkpsycholoog A.D. de Groot (1914–2006) — oprichter van het Cito — stelde onderzoek in naar opbrengsten van het meetkundeonderwijs. Rudolf Troelstra voerde onder supervisie van De Groot een experiment met transformatiemeetkunde in de brugklas uit. Hoogtepunten als nevenresultaat van het werk van de werkgroep waren de proefschriften van Pierre van Hiele en Dina van Hiele-Geldof (1911–1958)[6] in 1957 over denkniveau's en de toepassing daarvan op een inleidende meetkundecursus, die gebaseerd was op het werk van mevrouw Ehrenfest. In praktische zin gaven de Van Hieles dit vorm in hun *Werkboek der Meetkunde*, later in *Van Figuren naar Begrippen*. Het doel voor het eind van de eerste klas was nog steeds dat de stellingen over parallellogrammen en hun bijzonderheden gekend moesten worden. Er werd ook na de oorlog nog steeds uitgegaan van het hbs-leerplan uit 1937, dat weer gestoeld was op dat van Beth en Dijksterhuis uit 1925.

De Wiskunde Werkgroep wilde echter een structurele verandering en stelde eind 1948 vijf commissies (algebra, meetkunde, analytische meetkunde, goniometrie en beschrijvende meetkunde) in met als doel een eensluidend programma voor gymnasium bèta en hbs B op te stellen. Dit heeft geleid tot 'Het wiskundeprogramma voor het vwo', een rapport dat in 1953 werd gepubliceerd. Uiteindelijk heeft dit werk in 1958 tot een officiële herziening van het leerplan geleid. Beschrijvende meetkunde verdween van het hbs-programma, analytische meetkunde kwam er voor in de plaats.

Een compromis

Over de aard van het aanvankelijk meetkundeonderwijs was nog lang niet het laatste woord gesproken. In het aanbevelingsrapport voor deze leerplanherziening lezen we:

"Naar de mening van de Commissie zullen de resultaten van het aanvangsonderwijs verbeteren, als niet te spoedig wordt overgegaan tot de opbouw van een logisch systeem. De bedoeling van een dergelijke opbouw met behulp van definities, axioma's en stellingen moet door de leerlingen worden ingezien alvorens het zin heeft hen deze te laten bestuderen. Hiertoe dient de meetkundecursus met een intuïtieve inleiding aan te vangen. Deze inleiding behoeft niet van lange duur te zijn en kan geleidelijk overgaan in het logisch-systematische gedeelte. (...)"

Dit lijkt een zekere honorering van de gedachten van mevrouw Ehrenfest, maar uit latere bronnen blijkt dat hier sprake was van een compromis tussen de Dijksterhuis-aanhangers en de Ehrenfest-protagonisten. Er werd alle mogelijkheid gelaten om toch weer snel over te stappen naar een logisch-deductieve opbouw van de vertrouwde euclidische meetkunde. In het officiële programma van 1958 werd dan ook alleen nog over een 'inleiding' tot de meetkunde gesproken. Vrijwel alle meetkundeboeken voor het vhmo begonnen toen met een korte 'intuïtieve' of 'inductieve' inleiding. Bekende boeken voor het aanvankelijk meetkundeonderwijs in die periode waren die van Vredenduin, Alders en Van der Neut. In feite was de uitwerking van de oorspronkelijke ideeën van mevrouw Ehrenfest op het aanvankelijk meetkundeonderwijs in het vhmo marginaal, maar de didactische en onderwijskundige discussies waren in de jaren '50 in een veel breder kader geplaatst, vooral omdat de didactiek van de meetkunde ook een onderwerp van wetenschappelijk onderzoek was geworden.

Nekslag voor de oude meetkunde

Terwijl het programma van 1958 nog maar net ingevoerd was, kondigden zich al weer nieuwe ontwikkelingen aan. De jaren zestig kwamen namelijk in het teken van de wereldwijde New Math-beweging te staan. De artikelen in *Euclides* gingen in die jaren steeds meer over dé 'modernisering' van het wiskundeonderwijs. Analyse en lineaire algebra moesten de kern van het leerplan worden. Voor meetkunde leek nauwelijks nog plaats. Door de leerplanherziening van 1958 was het planimetrie-programma al vereenvoudigd. Maar er moest volgens de aanhangers van de moderne wiskunde meer veranderen. De wiskundige Dieudonné (1906–1992) had reeds in 1959 zijn befaamde "À bas Euclide!" uitgesproken. Meetkunde diende alleen nog als een structuur behandeld te worden en wel vanuit de algemenere structuur der afbeeldingen, dus als transformaties.

Wellicht nog belangrijker achtte men in de New Math de vectormeetkunde, die de weg kon openen naar lineaire algebra. Weliswaar werd er tot 1968 nog klassieke meetkunde gegeven, maar met de acceptatie van de moderne wiskunde was de nekslag voor dit vak al gevallen. Slechts een enkeling verzette zich tegen het slechten van het eens door Dijksterhuis zo bewierookte euclidisch-meetkundige 'gebouw van zoo groote schoonheid'. De wiskundige Herman Duparc (1918–2002) was één van die weinigen:

"Wie dan ook heel radicaal is zou misschien de gehele meetkunde willen bannen van ons schoolonderwijs. Ik kom hier ten sterkste tegen op (...) Redeneringen die gebruik maken van wat men in een figuur meent te zien, verkrijgen pas hun waarde als het 'geziene' wordt aangetoond. (...) Dit dooreenlopen van intuïtie, aanschouwing en een zakelijke redenering vindt men bij de ingenieur terug (...) Het meetkundeonderwijs nu kan

Van links naar rechts: Tatjana Ehrenfest-Afanasjeva, Eduard Jan Dijksterhuis, Willem Reindersma, Piet J. van Albada, Pierre van Hiele en Dina van Hiele

naast het belang dat het op zichzelf heeft, dit type gedachtegang op een prachtige wijze aan de leerlingen bijbrengen.”

Verder prees Duparc de mogelijkheden om in kennis te komen met het logisch-deductieve systeem, maar hij noemde ook het praktische nut en de cultuurhistorische waarde. Interessant is dat hij voor een goed begrip van de vectoranalyse en vectoralgebra een goed ruimtelijk inzicht noodzakelijk achtte. Met name deze laatste opmerking over de noodzaak van de ‘ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht’ was de voorgaande decennia altijd een belangrijk punt geweest. Maar kennelijk werd dit in de eufore vernieuwingsdrang gemakkelijk vergeten.

Zo ontstond in 1968 een situatie in het wiskundeonderwijs, waarbij de leraren van het gehele vo, die leerstofinhoudelijk en didactisch nauwelijks voorbereid waren, voor de zware taak gezet werden om tegelijk met de invoering van de Mammoetwet, een nieuw programma te gaan onderwijzen, dat geënt was op de ‘moderne wiskunde’. Aldus kreeg de New Math ook in Nederland, althans in het vo, voet aan de grond. Spoedig verschenen er nieuwe methoden op de markt: *Van A tot Z* (Van Hiele, Boermeester) en *Moderne Wiskunde* (Krooshof en anderen). Het principe van gescheiden leerboeken voor algebra, meetkunde en verdere onderwerpen was verlaten, waarmee uitdrukking gegeven werd aan het uniforme karakter van de wiskunde. Hoewel in deze leerboeken nog wel enige aandacht aan meetkundige figuren besteed werd, kunnen we wel stellen dat 1968 het rampjaar voor de klassieke meetkunde is geweest.

Reflectie

Kijken we terug op de zogenoemde vete tussen mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis, dan kan men zich afvragen of hun opvattingen eigenlijk wel erg verschilden. In 1934 publiceerde Dijksterhuis namelijk een artikel over epistemisch (inzichtelijk) onderwijs, waarin hij zijn standpunt over een formele start van het meetkundeonderwijs relativeert:

“Men kan zich (...) een heele scala van opvattingen voorstellen, die tusschen het standpunt van mevrouw Ehrenfest en dat van J.H. Schogt als uitersten inliggen en die men toch alle epistemisch zou kunnen noemen. Persoonlijk zou ik er het meest voor voelen, in de beginstadia van het meetkunde-onderwijs wel vrij spoedig deductief te werk te gaan door stellingen te bewijzen, maar alleen dan, wanneer een bewijsbehoefte óf spontaan optreedt, óf door het stellen van de vraag, gemakkelijk kan worden gesuggereerd. (...) Na eenigen tijd wordt het dan al mogelijk en wenschelijk, tot een partieele ordening van stellingen te komen (...). Ik zou dan echter het meetkunde-onderwijs niet willen laten eindigen, zonder dat de basis nog eens opnieuw in behandeling is genomen, dat wil zeggen ik zou de beginselen der vlakke meetkunde in de hoogere klassen, eventueel gelijktijdig met die der stereometrie, nog eens in een correct logisch systeem willen ordenen, waarin dan axiomata nog wel uitdrukking zouden zijn van meetkundige inzichten, die voor het natuurlijke denken inductief evident zijn, maar waarin hun aantal zoveel mogelijk zou worden beperkt en het bewijzen uitsluitend als kriterium voor logische ordening zou dienen.”

Afgaande op dit citaat zou men kunnen zeggen dat de opvattingen van mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis niet strijdig waren. Beiden hadden eenzelfde einddoel voor ogen: inzicht in een axiomatische opbouw van de meetkunde, en wel aan het eind van de gehele cursus, dus voor de leeftijdsgroep van 16 tot 18 jaar. Mevrouw Ehrenfest ging daarin zelfs nog verder dan Dijksterhuis, waar zij ook pleitte voor eventuele bestudering van niet-euclidische axiomastelsels. Zowel Dijksterhuis als mevrouw Ehrenfest geloofden in de scholing van het denken door middel van de meetkunde. En midden jaren dertig blijken beiden zich uit te spreken voor een aanschouwelijke start.

Het verschil lag in de uitwerking. Dijksterhuis nam de traditionele euclidische vlakke meetkunde als uitgangspunt, terwijl mevrouw Ehrenfest om didactische redenen de ruimtelijke realiteit als startpunt koos, teneinde de elementaire meetkundige noties te ontwikkelen. Mevrouw Ehrenfest wilde het keurslijf van de euclidische opbouw aan het begin van het onderwijsleerproces afleggen, terwijl Dijksterhuis slechts een minieme knieval wilde doen voor het aanschouwelijke element van de meetkunde. Dijksterhuis hield dus ook voor het aanvangsonderwijs vast aan de logische structuur van de meetkunde, terwijl Ehrenfest uit wilde gaan van een psychologische ordening, waarbij rekening gehouden werd met de cognitieve ontwikkeling van de leerling. Bij Ehrenfest herkennen we zowel het historisch-genetische als het psychologisch-genetische principe, terwijl Dijksterhuis dit geheel vreemd scheen te zijn. Mevrouw Ehrenfest benadrukte voor haar propedeutische cursus het principe van ‘leren door doen’. Ook in concreet praktische zin, iets waarover Dijksterhuis zich nimmer openlijk heeft uitgelaten. Wij vermoeden echter, gezien zijn welbevinden in louter theoretische wetenschap, dat hij daaraan weinig waarde hechtte. In feite school het verschil in beider opvattingen slechts in het idee van de propedeutische cursus van mevrouw Ehrenfest. Dijksterhuis hield bij zijn beschouwingen altijd het oog gericht op de hbs- en gymnasiumleerlingen, en naar onze mening daarvan weer de meest begaafden, terwijl mevrouw Ehrenfest toch aan een meer heterogeen samengestelde groep dacht.

Tijdens de promotie van Dina van Hiele-Geldof in 1957 sprak Dijksterhuis zeer waarderend over dit onderwijsexperiment en noemde het ‘een stuk pionierswerk’. Zou het beleefdheid geweest zijn of was Dijksterhuis toen op het punt van de intuïtieve inleiding bijgedraaid? Gezien door de bril van het heden lijkt het wat wonderlijk dat Dijksterhuis zich in de jaren twintig zo opwond over de ideeën van een propedeutische cursus à la

Ehrenfest, die hij als een werkelijk gevaar zag voor het wiskundeonderwijs. Mogelijk dat mevrouw Ehrenfest toen te weinig benadrukt heeft dat zij met de propedeutische cursus slechts een inleiding op het oog had, die ook, althans voor een deel, geschikt was voor de lagere school. Een voor de hand liggende reden kan gezocht worden in het feit dat Dijksterhuis elke vorm van toepasbaarheid of samenhang met de realiteit uit de wiskunde wilde weren. Tenslotte was hij een platonist van het zuiverste water. In feite werden noch de ideeën van Dijksterhuis noch die van mevrouw Ehrenfest in praktisch onderwijs omgezet. In de modale onderwijspraktijk werd gebruik gemaakt van modale boeken van een of andere logisch-deductieve snit.

Al meende mevrouw Ehrenfest dat zij weinig succes had geboekt, toch hebben haar activiteiten invloed gehad op de ontwikkeling van de vakdidactiek voor wiskunde, in het bijzonder die van de meetkunde. Van Albada ontwierp een unieke propedeutische cursus, Pierre van Hiele maakte wereldnaam met zijn niveautheorie. Dina van Hiele-Geldof werkte één idee uit de *Übungensammlung* uit tot een inleidende cursus, Adriaan de Groot deed methodologisch onderzoek naar de vorderingen van de leerlingen, Chris Boermeester propageerde een vorm van interactief onderwijs: het klassengesprek. Van Hiele had bewondering voor haar ideeën, maar ook ernstige bezwaren. Zo zei hij ter gelegenheid van haar 85ste verjaardag in 1961 dat haar 'methode onuitvoerbaar en ook ongewenst' was. In haar dankwoord bevestigde mevrouw Ehrenfest dit: "(...) ik heb niemand van de Hollandse wiskundeleraren van mijn opvattingen betreffende het wiskundeonderwijs overtuigd." Zij kon toen niet vermoeden dat precies tien jaar later haar *Übungensammlung* opnieuw als vertrekpunt gebruikt zou gaan worden voor het meetkundeonderwijs op de basisschool en de brugklas van mavo en vmbo.

In 1964 is mevrouw Ehrenfest overleden. Het meetkundeonderwijs was toen al bijna de nek omgedraaid. Hoe wonderlijk kan de geschiedenis gaan. Bijna vijftig jaar lang werd er wiskundig, didactisch en pedagogisch 'gebakkeleid' over opzet en aanpak van het oudste wiskundevak, in feite ging het om een relatief kleine methodische wijziging van het aanvangsonderwijs — en toen werd het hele programma als het ware van de ene op de andere dag rigoureus gewijzigd. Met die wijziging van 1968 zijn het specifieke logisch-deductieve redeneren en het opbouwen van een consistent systeem voor het onderwijs verloren gegaan. Dat dit in het algemeen te moeilijk is voor kinderen van twaalf jaar was eigenlijk de inzet van de discussies. Deze psychologische hobbel werd later bevestigd. Er zijn pogingen gedaan om een opzet te maken waarmee deze belangrijke doelen, zoals Darwin, Russell en vele anderen dit ervaren hebben, wel bereikt konden worden. Maar we hebben gezien dat dit niet gelukt is. Wat er daarna van meetkunde voor het onderwijs als vak terechtgekomen is, zal in een volgende aflevering worden beschreven.

Nawoord

Dit stuk is gebaseerd op een deel van een hoofdstuk uit *Van vormleer naar realistische meetkunde*, een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw van E.W.A. de Moor (1999). De auteurs doen onderzoek naar het werk van Tatjana Ehrenfest-Afanasjeva met als doel een vertaling en heruitgave van haar *Übungensammlung* uit 1931.

Noten

1 Dijksterhuis was vanaf 1916 tot 1953 leraar wiskunde aan de Rijks-hbs Willem ll in Tilburg. In 1953 werd hij buitengewoon hoogleraar in de geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen aan de Universiteit van Utrecht. In 1952 ontving hij voor zijn werk de P.C. Hooftprijs. Als wetenschapshistoricus verwierf hij wereldfaam met *De mechanisering van het wereldbeeld*. Zijn bijdragen aan het wiskundeonderwijs bepaalden zich in hoofdzaak tot de uitgangspunten, doelstellingen en programmatische uitwerking. De geleerde, nauwgezette, hardwerkende en met de pen vaardige Dijksterhuis was geknipt voor allerlei commissiewerk, dat hij vele malen op zich nam.

2 Tatjana Afanasjeva, geboren in het (toen nog) Russische Kiev, groeide op en studeerde in St. Petersburg. In het toenmalige Mekka van de wiskunde, het Duitse Göttingen, waar zij bij Felix Klein en David Hilbert (1862–1943) studeerde, leerde zij haar man, de Oostenrijkse fysicus Paul Ehrenfest (1880–1933), kennen. In 1912 kwamen zij naar Leiden, waar Paul Ehrenfest de opvolger werd van Hendrik Lorentz (1853–1928). Zij kwam in contact met Willem Reindersma (1877–1946), die wiskundeleraar was aan het Nederlandsch Lyceum te Den Haag en die toen al een vernieuwend meetkundeboek op zijn naam had staan. Al spoedig vonden er onder haar leiding bijeenkomsten over didactiek plaats. In 1915 verscheen in het *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs* haar eerste artikel in het Nederlands en in 1924 volgde de genoemde brochure.

3 Willem Reindersma was een Groningse boerenzoon. Hij begon als onderwijzer en studeerde tegelijkertijd wis- en natuurkunde. Daarna was hij leraar aan het Nederlandsch Lyceum te Den Haag, van welke school hij later rector werd.

4 Pierre M. van Hiele studeerde wis- en natuurkunde en is zijn gehele leven leraar geweest. Hij heeft veel gepubliceerd over de didactiek van de wiskunde. Tevens auteur van schoolboeken. In 1957 promoveerde hij op *De problematiek van het inzicht*. Met zijn theorie over de denkniveau's bij het leren van wiskunde, heeft hij in de wiskundedidactiek wereldfaam verkregen.

5 Piet J. van Albada is leraar geweest aan het Montessori Lyceum te Rotterdam. In 1955 is hij gepromoveerd op een wiskundig onderwerp. Van 1951 tot 1958 was hij hoogleraar te Bandoeng (Indonesië). Daarna wetenschappelijk medewerker aan de TU te Eindhoven. Voor meer informatie zie E.W.A. de Moor (2001), Het kistje van Van Albada, *Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 21(2), pp. 32–43.

6 Dina van Hiele-Geldof was leraar wiskunde. Zij is in 1957 gepromoveerd op een praktische uitwerking van een van de ideeën (gebruik van tegelvloeren) van mevrouw Ehrenfest voor een aanschouwelijke inleiding voor de planimetrie. Zij komt in dit proefschrift onder meer tot een gunstige conclusie over de theorie van de denkniveau's van Pierre van Hiele.