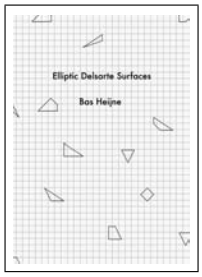
In de verdediging

In defence



Elliptic Delsarte Surfaces
Bas Heijne

Op 16 december 2011 verdedigde Bas Heijne zijn proefschrift *Elliptic Delsarte Surfaces* dat hij schreef onder begeleiding van prof.dr. Jaap Top. Zijn promotieonderzoek deed hij in een voor hem bekende omgeving, aangezien hij ook al aan de Rijksuniversiteit Groningen gestudeerd had. Hij noemt de overgang van studietijd naar promotietijd redelijk vloeiend en heeft geen echte tegenslag gehad tijdens zijn promotietraject. Misschien dat hij mede daardoor zulke goede herinneringen heeft aan zijn promotietijd en in het bijzonder aan de bijeenkomsten van W^4? Dit groepje studenten en promovendi komt geregeld bijeen om wiskundige onderwerpen te bespreken, in een volgens Heijne erg prettige en informele sfeer.

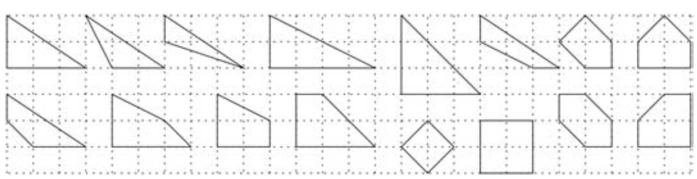
Elliptische oppervlakken

In die plezierige omgeving deed Heijne onderzoek aan elliptische oppervlakken. Deze zijn, zoals de naam suggereert, gelieerd aan elliptische krommen. Een elliptische kromme kan worden beschreven als een vlakke kromme met de eigenschap dat elke rechte lijn hem in precies drie punten snijdt. Op elliptische krommen kan een groepswet worden gedefinieerd door te zeggen dat ieder drietal punten dat op een rechte lijn ligt, optelt tot nul. De groep die je zo verkrijgt wordt de Mordell–Weil-groep genoemd.

Een elliptisch oppervlak is een oppervlak samen met een afbeelding naar een lijn, zodanig dat het inverse beeld van een punt op deze lijn bijna altijd een elliptische kromme is. Zulke elliptische oppervlakken corresponderen op een unieke manier met elliptische krommen over het functielichaam $k(t)$. Daardoor is het ook mogelijk om over de Mordell–Weil-groep van een elliptisch oppervlak te praten. Hierbij is k een algebraïsch afgesloten lichaam. In zijn proefschrift neemt Heijne (behalve in het laatste hoofdstuk) aan dat dit lichaam karakteristiek nul heeft, met als meest gebruikelijke voorbeeld de complexe getallen.

Een open probleem

De vraag hoe groot de rang (dimensie) van de Mordell–Weil-groep van een elliptisch oppervlak kan worden, is een open probleem. In de praktijk is het meestal lastig om deze rang expliciet uit te rekenen. Echter, in de jaren tachtig kwam Shioda voor een specifieke familie van elliptische oppervlakken, de zogenaamde Delsarte-oppervlakken, met een algoritme om de rang te bepalen. Een Delsarte-oppervlak is een op-



Figuur 1 Alle polygonen met precies één inwendig punt

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl

pervlak dat beschreven wordt door een vergelijking waarin precies vier monomen voorkomen. Een voorbeeld is $y^2 + x^3 + t^3x + t^4 = 0$.

Met zijn algoritme construeerde Shioda een elliptisch Delsarte-oppervlak dat Mordell–Weil-rang 68 heeft. Dit is de hoogste Mordell–Weil-rang van een elliptisch oppervlak over de complexe getallen die tot op heden gevonden is.

De maximale rang van een elliptisch Delsarte-oppervlak is 68

In zijn proefschrift maakte Heijne voor het eerst een classificatie van alle elliptische Delsarte-oppervlakken. Hierbij valt elk elliptische Delsarte-oppervlak in één van elf klasses. Voor elk van deze klasses is het hem vervolgens gelukt de maximale rang binnen die klasse uit te rekenen. Deze classificatie diende als basis voor Heijnes belangrijkste stelling: "De Mordell–Weil-rang van elliptische Delsarte-oppervlakken is begrensd door 68."

De classificatie is gemaakt op basis van zogenaamde Newton-polygonen, een standaard hulpmiddel voor de studie van polynomen. Dit zijn polygonen op een rooster met in het geval van Heijne precies één inwendig roosterpunt, zie Figuur 1. In totaal bestaan er op equivalentie na zestien dergelijke polygonen: vijf driehoeken, zeven vierhoeken, drie vijfhoeken en één zeshoek. De vijfhoeken en zeshoeken corresponderen niet met elliptische oppervlakken. Bij elke vierhoek hoort precies één klasse oppervlakken, bij elke driehoek horen meerdere klasses. Op basis hiervan vond Heijne 42 klassen elliptische Delsarte-oppervlakken. Hierbij zaten echter wel veel dubbeltellingen, waardoor er uiteindelijk nog elf klassen overbleven.

Heijnes classificatie is niet perse de enige mogelijke classificatie van elliptische Delsarte-oppervlakken, maar het is wel een classificatie die goed lijkt te werken om dingen mee uit te rekenen. Zo heeft hij uit elke klasse van elliptische Delsarte-oppervlakken een representatief oppervlak gekozen en voor dat oppervlak in tien van de elf gevallen een maximaal aantal lineair onafhankelijke elementen gevonden. (Dat betekent dat hij op een eindige index na de voortbrengers van de Mordell–Weil-groep heeft gevonden.)

De vraag dringt zich dan natuurlijk op wat dat ene geval anders maakt dan de andere. Simpel gezegd hakte Heijne voor ieder canoniek oppervlak het probleem in stukjes, waarbij hij makkelijke elliptische Delsarte-oppervlakken verkreeg. Van al deze stukjes heeft hij met behulp van de computer een maximale verzameling lineair onafhankelijke elementen gevonden, aannemend dat die elementen niet al te moeilijk zijn. In het geval dat hij niet heeft opgelost, kon hij wel alles in stukjes hakken, maar voor één van de stukjes geen elementen vinden. Blijkbaar zijn de elementen hier iets ingewikkelder dan in de andere gevallen, waardoor hij en zijn computer het probleem (nog) niet aan konden.

Vervolg in Hannover

Tijdens de vier jaar van zijn promotieonderzoek is er veel veranderd in Heijnes leven. Hij is in die tijd getrouwd en is vader geworden; dat alles heeft veel meer betekenis gehad dan zijn promotie. Met vrouw en zoon is hij inmiddels naar Hannover verhuisd om daar als post-doc te werken in de onderzoeksgroep van een van de leden van zijn leescommissie. Hij gaat daar wederom onderzoek doen naar algebraïsche oppervlakken, dus qua onderzoek verwacht hij geen grote veranderingen.

Als uitsmijter geeft Heijne nog een van de stellingen bij zijn proefschrift: "Het feit dat aanwezigheid bij een bepaald college verplicht wordt gesteld, is doorgaans veelzeggend over het nut van dit college." Een mooie stelling voor het onderwijsdebat!

Use of ICT for acquiring, practicing and assessing algebraic expertise
Christian Bokhove

Christian Bokhove is docent wiskunde aan het St. Michael College in Zaandam en heeft daarnaast de afgelopen vier jaar promotieonderzoek gedaan aan de Universiteit Utrecht. Hij voerde zijn onderzoek uit in het kader van het DUDOC-programma van het Platform Bèta Techniek, een programma waarbij eerstegraads docenten promotieonderzoek doen naar vernieuwingen in de bètavakken. En alsof die combinatie van lesgeven en promoveren nog niet genoeg was, is Bokhove daarnaast ook nog eens gelukkig getrouwd en heeft hij vijf kinderen, én zit hij namens de SP in de gemeenteraad van Enkhuizen.

Het is dus wellicht niet verwonderlijk dat hij gevraagd naar de favoriete stelling bij zijn proefschrift kiest voor de politiek-inhoudelijke: " 'Never waste a good crisis' may be correct in the context of this research, but it is immoral with regard to the conduct of bankers and politicians." Ten eerste omdat zijn onderzoek een pleidooi is voor ongewone, crisis-achtige opgaven: we leren veel van zaken die niet goed gaan. Bokhove citeert hierbij de Engelse dichter John Keats die zei: "Failure is the highway to success." Ten tweede vanwege zijn politieke werkzaamheden: in de politiek worden crises volgens hem helaas ingezet om onnodige hervormingen door te voeren.

ICT en algebraïsche vaardigheden

Bokhoves onderzoek ging over de rol die ICT kan spelen bij het verwerven, oefenen en toetsen van algebraïsche *expertise*, waaronder Bokhove zowel vaardigheden als inzicht verstaat. Hij voerde zijn onderzoek uit aan het Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen (FIsme) onder begeleiding van prof.dr. Jan van Maanen en dr. Paul Drijvers en verdedigde op 12 december 2011 succesvol het resulterende proefschrift *Use of ICT for acquiring, practicing and assessing algebraic expertise*.

Bokhove combineerde twee recente ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs: ten eerste de toenemende aandacht voor algebraïsche vaardigheden en ten tweede het toenemende gebruik van ICT. In de eerste fase van zijn onderzoek formuleerde hij criteria om bestaande software voor algebra tegen het licht te kunnen houden. Vervolgens selecteerde hij een tool en ontwierp hij een online, prototype lesmodule die hij testte in een reeks een-op-eensessies met vijf leerlingen. Op basis van de bevindingen is het prototype bijgesteld en daarna eerst ingezet in twee klassen 6 vwo wiskunde B en tenslotte in vijftien klassen aan negen verschillende scholen. Die momenten waarop zijn materiaal daarwerkelijk in de les werd gebruikt, voelden echt als een soort eerste beloning voor Bokhove. Het was erg mooi om te zien hoe leerlingen ermee werkten.

Uitgangspunten bij het ontwerp

Het eerste uitgangspunt bij het onderzoek was communicatie tussen computer en leerlingen: de computer moet de leerling feedback kunnen geven op de stappen die deze maakt. Als een leerling dan bijvoorbeeld thuis vastloopt met een opgave, kan hij dankzij gerichte feedback weer verder. In de ontworpen leeromgeving varieert de aard en de hoeveelheid feedback, afhankelijk van de invoer. Bovendien neemt de hoeveelheid feedback af naarmate de leerling verder is gevorderd, zodat die aan het eind hopelijk 'op eigen benen kan staan' en niet afhankelijk blijft van feedback.

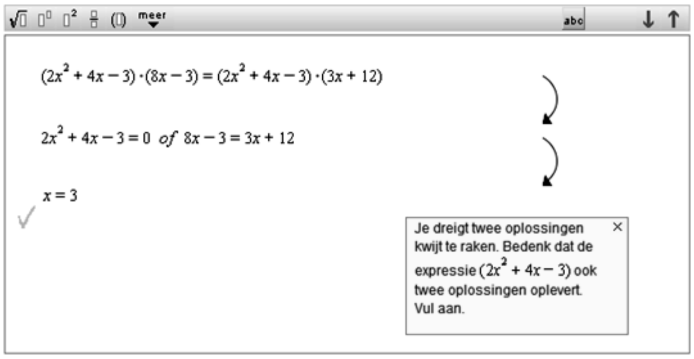
Een tweede uitgangspunt was dat de algebraopgaven — in dit onderzoek noodzakelijkerwijs slechts een klein deelgebied van de algebra — niet allemaal voorspelbaar waren. Een leerling die de module doorloopt, wordt op een gegeven moment geconfronteerd met een zogenaamde 'crisis'-opgave, een opgave die op de automatische piloot waarschijnlijk fout zou worden gemaakt. Na een dergelijke opgave volgt in de lesmodule extra uitleg in de vorm van feedback en films.

Resultaten

Leerlingen maakten voor aanvang van de lesmodule een pretoets en na afloop een posttoets. De resultaten van het onderzoek laten een significante verbetering zien van algebraïsche expertise. De factoren die een positievere score het meest voorspellen, zijn de voorkennis van de leerling, de aan testonderdelen van de module bestede tijd, en de algemene houding tegenover wiskunde. Bokhove zelf vindt een opvallende uitkomst van zijn onderzoek dat examenresultaten van de school, sekse van de leerling, de houding ten opzichte van computers en de hoeveelheid oefentijd thuis of op school geen voorspellende waarde voor de uitkomst van de posttoets hadden. Oftewel: het effect was significant, maar dit effect leek niet te zijn veroorzaakt door allerlei andere variabelen. Hij trekt daaruit voorzichtig de conclusie dat een school de module 'gewoon' kan inzetten, en zich daarbij minder hoeft druk te maken over allerlei invoeringsvoorschriften. Zie verder www.algebrametinzicht.nl.

Voortdurend schakelen

Als docent in een onderzoeksomgeving bevond Bokhove zich in een bijzondere positie, maar hij voelde zich zeker geen eenling. Hij was niet alleen onderdeel van het FIsme waar hij werd begeleid door zijn promotoren, maar ook van de groep DUDOC-docenten voor wie er geregeld bijeenkomsten werden georganiseerd. Het leven als promovendus vond hij erg leuk en enerverend, vooral omdat hij diep in een onderwerp kon duiken. Hij waardeerde de mogelijkheid om theorie en praktijk



Een oplossingsproces uit de lesmodule

te kunnen combineren, maar vond het vele 'schakelen' tussen zijn werk als onderzoeker, zijn werk als docent, zijn gezin en de politiek wel lastig.

Toch vond hij het nog moeilijker om steeds te moeten schakelen tussen de diverse promotiewerkzaamheden. Als voorbeeld noemt hij een moment waarop hij volop data aan het verzamelen was, maar zich opeens ook moest bezighouden met een artikel dat terugkwam van een reviewer.

Inmiddels is het onderzoek afgerond en het proefschrift verdedigd. Hij bewaart goede herinneringen aan de plechtigheid. Hij vond het vooral mooi om bij zijn binnenkomst met pedel, promotoren en hoogleraren op de eerste rij (een deel van) zijn gezin te zien zitten.

Het liefst blijft Bokhove theorie en praktijk combineren als docent-onderzoeker. Volgens hem moeten theorie (onderzoek) en praktijk (lesgeven) elkaar aanvullen en heeft hij op beide vlakken de expertise om het wiskundeonderwijs te kunnen verbeteren. Het is momenteel niet makkelijk wat te vinden, maar er lopen wat aanvragen voor vervolgonderzoek. Persoonlijk zou hij het jammer vinden als een deel van de DUDOC-onderzoekers datgene waarin ze het beste zijn — lesgeven — kwijtraken doordat ze bevorderd worden in een managementfunctie op school. Carrière maken binnen het onderwijs is nog steeds het management in gaan. Ook is hij er bang voor dat de DUDOC'ers binnen vijf jaar na hun promoveren worden binnengesloten in de kring van wetenschappers. Hij hoopt juist dat hij en zijn mede DUDOC'ers vooral in de praktijk kunnen laten voortleven wat ze hebben geleerd als onderzoeker, of als onderzoekers echt affiniteit houden met de praktijk.