In de verdediging

In defence

Noncommutative and vector-valued Rosenthal inequalities
Sjoerd Dirksen

"Het ideaal van de Homo Universalis heeft plaatsgemaakt voor het ideaal van de Cycloop: een mens die zich volledig toelegt op het zo goed mogelijk uitoefenen van één taak." Zo luidt de volgens hemzelf mooiste stelling bij het proefschrift van Sjoerd Dirksen, die op 18 oktober 2011 promoveerde aan de Technische Universiteit Delft. Hoewel deze stelling zeker ook op de meeste wetenschappers van toepassing is, hoopt Dirksen wel op een mooie carrière als wiskundige. Hij heeft als aio veel genoten van de grote mate van vrijheid en eigen verantwoordelijkheid die je als onderzoeker hebt en het als een groot genoegen ervaren om met zijn proefschrift een bescheiden bijdrage te kunnen leveren aan de wiskundige literatuur die hem aan het hart gaat. Hij heeft ook hele mooie herinneringen aan twee langdurige verblijven in het buitenland tijdens zijn promotie. Tijdens deze bezoeken heeft hij een frisse onderzoeksneus kunnen halen en veel nieuwe ideeën en inspiratie opgedaan. In Amerika heeft hij bovendien tijdens het voorbereiden van een voordracht voor het eerst echt een 'eureka-moment' in zijn onderzoek beleefd.

In Delft werd van wiskunde aio's ook verwacht om hoorcolleges te geven aan eerstejaars studenten in het 'serviceonderwijs' aan andere faculteiten. De verantwoordelijkheid voor een 'eigen' groep studenten heeft hij als zeer uitdagend en stimulerend ervaren, en hij zet momenteel met veel plezier zijn werk in Delft voort als tijdelijk docent met een gemengde onderzoeks- en onderwijstaak.

Rosenthal-ongelijkheden

In het proefschrift *Noncommutative and vector-valued Rosenthal inequalities*, dat Dirksen schreef onder begeleiding van promotoren prof. dr. Jan van Neerven en prof. dr. Ben de Pagter, staat een klasse van ongelijkheden uit de kansrekening centraal, genaamd Rosenthal-ongelijkheden. De originele ongelijkheden die H.P. Rosenthal rond 1970 ontdekte, luiden als volgt: Als $2 \le p < \infty$ en $(\xi_i)_{i\ge 1}$ een rij onafhankelijke, gecentreerde kansvariabelen is, dan geldt

$$\Big(\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big|^{p}\Big)^{\frac{1}{p}} \simeq_p \max\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|\xi_i|^{p}\Big)^{\frac{1}{p}},\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|\xi_i|^{2}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\}.$$

Hier staat $\mathbb{E}$ voor de verwachtingswaarde en is $a \simeq_p b$ een verkorte notatie voor de ongelijkheden $\alpha_p a \le b \le \beta_p a$, voor zekere constanten $\alpha_p, \beta_p > 0$ die alleen van p afhangen. In toepassingen staat doorgaans aan de linkerzijde de grootheid waarin men geïnteresseerd is en aan de rechterzijde iets wat daadwerkelijk uitgerekend kan worden. Rosenthal ontwikkelde deze ongelijkheden oorspronkelijk voor zijn onderzoek in de meetkunde van Banachruimten. Tegenwoordig kunnen Rosenthals ongelijkheden gerekend worden tot het standaardgereedschap in de kansrekening.

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl

Niet-commutatieve kansrekening

In zijn proefschrift breidt Dirksen deze ongelijkheden uit in twee verschillende richtingen. In het eerste deel van zijn proefschrift bekijkt hij de situatie waar de ξ_i vectorwaardig zijn, dat wil zeggen ze nemen waarden aan in een Banachruimte. Hierbij kan men denken aan kansvariabelen met waarden in een L^p-ruimte of matrices waarvan de elementen kansvariabelen zijn ('random matrices'). In het tweede deel kijkt hij naar Rosenthal-ongelijkheden voor niet-commutatieve kansvariabelen. Niet-commutatieve kansrekening is een uitbreiding van het klassieke kansrekeningsmodel dat oorspronkelijk ontwikkeld is om experimenten in de kwantummechanica te kunnen modelleren waarvoor het klassieke kansrekeningsmodel niet toereikend is. In dit model worden kansvariabelen niet gegeven door Lebesgue-integreerbare functies, maar door operatoren op een Hilbertruimte. Dirksen heeft gekeken naar Rosenthal-ongelijkheden waarbij de niet-commutatieve kansvariabelen elementen zijn van een zogenaamde symmetrische ruimte behorend bij een von Neumann-algebra. Als voorwerk voor de uiteindelijke stelling heeft hij nieuwe resultaten voor andere kansrekeningsongelijkheden in niet-commutatieve symmetrische ruimten bewezen, met name voor Khintchine- en Burkholder–Gundy-ongelijkheden, alsmede nieuwe resultaten in interpolatietheorie.

In beide gevallen ontwikkelt hij de uitbreiding van Rosenthals originele ongelijkheden met het doel om zogenaamde Itô-isomorfismen te bewijzen. Dit zijn normafschattingen voor stochastische integralen in termen van de integrand. Itô-isomorfismen voor vectorwaardige stochastische integralen spelen een belangrijke rol in de analyse van partiële differentiaalvergelijkingen met een stochastische ruiscomponent. In de afgelopen paar jaar is door de Delftse onderzoeksgroep veel voortgang geboekt in de analyse van dit soort vergelijkingen waarbij de ruis Gaussisch is. Het uiteindelijke idee is dat de resultaten in Dirksens proefschrift gebruikt kunnen worden in de analyse van stochastische PDV's met Lévy-ruis (ruis die ook spronggedrag kan vertonen), maar dit is strikt genomen geen onderdeel meer van zijn proefschrift.

De mooiste stelling

Dirksen wil zich er niet aan wagen om een stelling als de 'belangrijkste' aan te merken, maar heeft wel een favoriete stelling in zijn proefschrift. Deze stelling geeft een uitbreiding van Rosenthal-ongelijkheden voor kansvariabelen met waarden in een L^p-ruimte en luidt als volgt: Als $1 < p, q < \infty$ en $(\xi_i)_{i\geq 1}$ een rij van onafhankelijke, gecentreerde stochasten is die waarden aannemen in $L^q(S)$, met S een σ-eindige maatruimte, dan gelden de tweezijdige ongelijkheden

$$\left(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big\|_{L^q(S)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \eqsim_{p,q} \left|\left|\left|(\xi_i)_{i=1}^{n}\right|\right|\right|_{p,q},$$

voor een geschikt gekozen norm $|||\cdot|||_{p,q}$. Deze norm neemt zes verschillende vormen aan, afhankelijk van de relatieve positie van de parameters p, q en 2. Als bijvoorbeeld $2 \leq q \leq p < \infty$, dan wordt $\left|\left|\left|(\xi_i)_{i=1}^{n}\right|\right|\right|_{p,q}$ gegeven door het maximum van de drie normen

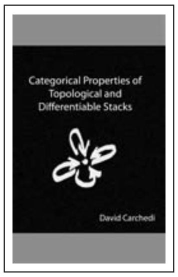
$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\|\xi_i\|_{L^q(S)}^{p}\Big)^{\frac{1}{p}},\ \Big(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\|\xi_i\|_{L^q(S)}^{q}\Big)^{\frac{1}{q}} \text{ en } \Big\|\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{L^q(S)}.$$

Bovenstaande afschattingen spelen een prominente rol in het bewijs van de eerder genoemde vectorwaardige Itô-isomorfismen.

Flink puzzelen

De stelling kent bovendien een verdere uitbreiding waarin $L^q(S)$ vervangen wordt door een niet-commutatieve L^p-ruimte behorend bij een von Neumann-algebra. Dit resultaat kan vervolgens gebruikt worden om nieuwe afschattingen te vinden voor de grootste singuliere waarde van een matrix met onafhankelijke kansvariabelen als elementen.

Dirksen heeft flink moeten puzzelen om de 'juiste' normen in deze stelling te vinden. De stelling heeft, net als Rosenthals originele ongelijkheden, voor hem persoonlijk een esthetisch karakter en bovendien twee zeer verschillende toepassingen. Kortom, alles wat een mooie stelling in zich moet hebben!



Categorical properties of topological and differentiable stacks

David Carchedi

On September 13th, 2011, David Carchedi successfully defended his Ph.D. thesis *Categorical properties of topological and differentiable stacks*, which he wrote under the guidance of prof.dr. Ieke Moerdijk at Utrecht University.

Topological and differentiable stacks

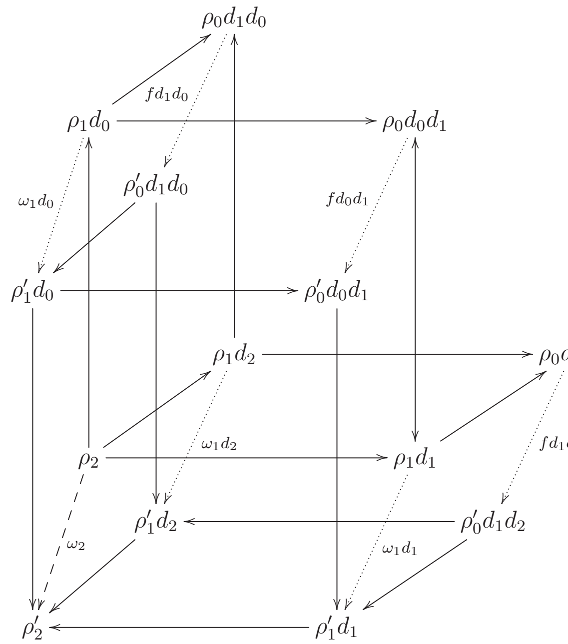
Carchedi's main research topic concerned foundational issues of the theory of topological and differentiable stacks. Such stacks are meant to model 'spaces' whose points themselves possess intrinsic symmetries. They are analogous to algebraic stacks, which play an important role in algebraic geometry.

All topological and differentiable stacks arise by 'identifying' points of a topological space or smooth manifold, that are related to one another by a symmetry. If these points were naively glued together, this could introduce singularities, and more importantly, most of the information about the symmetries would be lost. The naive quotient associated to a topological stack exists as a topological space; however it lacks important information about the different ways in which a point is related to itself, or to other isomorphic points. Therefore, instead of actually identifying points, a 'stacky quotient' is constructed: to every symmetry relating a point x to a point y in a space X one adds an arrow from x to y (and also an arrow in the opposite direction inverse to this arrow). In this way, one not only remembers *that* x and y are glued, but also *how* these points are glued.

Continuing in this way, a *category* is constructed, whose objects are just the points of the space X and in which every arrow is an isomorphism. A category in which every arrow is an isomorphism is known as a *groupoid*. So in this sense a groupoid is a special kind of category. However, a groupoid with only one object is the same as a group, and in this sense, groupoids are a generalisation of groups (and hence their name). The resulting groupoid (internal to spaces) encodes all the information about the local geometry of the 'stacky quotient'.

Compactly generated stacks and étale stacks

In his thesis, Carchedi introduces *compactly generated stacks*, which



This half of a commuting hypercube is part of a proof that maps out of a topological or differentiable stack can be expressed as certain cocycles.

play the same role for topological stacks as compactly generated Hausdorff spaces do for topological spaces. They all have *mapping stacks*, a key concept in his work, as well as infinite (fibered) products. It is his hope that his results will help topologists avoid the technical shortcomings of topological stacks.

The rest of the thesis concentrates on the development of an abstract framework to study sheaves and stacks over étale stacks. Étale stacks are stacks which are not very far away from being spaces, in that each point has only a discrete collection of symmetries. Carchedi uses his machinery to show a surprising connection between the way in which these symmetries act locally and gerbes. (Roughly, gerbes are to stacks what groups are to groupoids.)

Technical shortcomings

Recently, there have been many applications of topological and differentiable stacks in various areas of pure mathematics, such as equivariant geometry, twisted K-theory and foliation theory, and they also play an important role in quantum field theory, string theory and higher gauge theory. However, there are some technical shortcomings of the theory of topological stacks.

For example, many natural constructions may fail to exist for topological stacks, such as taking infinite products or mapping stacks. If $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ are two topological stacks, the mapping stack $\mathbb{M}\mathrm{ap}\,(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ (if it exists) is 'the topological stack of maps from $\mathcal{X}$ to $\mathcal{Y}$'. The first main result in Carchedi's thesis is the construction of a convenient theory of topological stacks, the above-mentioned compactly generated stacks, in which these natural constructions exist.

Frustrations and results

Carchedi had originally set out to prove that mapping stacks exist for all topological stacks and thought he had a proof. He had worked on this for about a year, and then presented the result at a conference, in his first conference talk ever. During the talk, some people in the audience did not believe the result, and as it turned out they were right. Carchedi was devastated, as he had not expected this at all. Until then, even his advisor had been convinced that his original approach should work, and with him many experts were also surprised to hear that the construction did not yield a positive result. Indeed the reason that the original proof was incorrect is quite subtle.

Anyway, at that point he really had no idea of what to do next. He thought he had wasted all this time and was really frustrated. He turned his attention to other questions to clear his head. But luckily, about four months later, he decided to turn back to the problem with a completely different approach, and he then figured out a way to modify topological stacks so that the result was true. This led him to develop the theory of compactly generated stacks, which has become the most important result in his thesis. He was even invited to a workshop in Göttingen, Germany, to talk about it.

His theory of compactly generated stacks is a convenient one, as these stacks enjoy much nicer categorical properties than ordinary topological stacks. The story starts in ordinary topology, where it became clear, much to the embarrassment of topologists, that mapping spaces (with the correct universal property) did not always exist. To remedy this, in 1967, Normand Steenrod popularised compactly generated Hausdorff spaces, which *do* all have mapping spaces, and infinite (fibered) products. Carchedi's result is a generalization of this to the setting of topological stacks.

Mapping stacks

The problem of mapping spaces (or in this case mapping stacks) persists for topological stacks, but the situation is much more technical. Stacks, unlike spaces, do not form a category, but form a bicategory. That is, given two such stacks $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ and two morphisms $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ and $f':\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, it is possible for f and f' to be related by a 2-morphism $\alpha: f\Rightarrow f'$. Any such 2-morphism must have an inverse, so for any two such stacks $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$, there exists a groupoid of maps between them, $\mathrm{Hom}\,(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ (a groupoid is a category consisting of only isomorphisms).

If $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ are two topological stacks, their *mapping stack* $\mathbb{M}\mathrm{ap}\,(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ is a topological stack for which there is a natural equivalence of groupoids

$$\mathrm{Hom}\,(\mathcal{Z},\mathbb{M}\mathrm{ap}\,(\mathcal{X},\mathcal{Y}))\simeq\mathrm{Hom}\,(\mathcal{Z}\times\mathcal{X},\mathcal{Y})\,,$$

for every other topological stack $\mathcal{Z}$. Unfortunately, unless $\mathcal{X}$ satisfies a rigid compactness condition, this mapping stack need not exist. However, mapping stacks *do* exist for all compactly generated stacks.

The Netherlands and beyond

Carchedi very much enjoyed being a student in the Netherlands. First and foremost because of the lack of separation between Ph.D. students and professors that he experienced in his research group in Utrecht. Being American, he was used to a certain hierarchy and distance. In Utrecht, he felt like being a peer, or a 'researcher in training' rather than a student. He was free to approach various postdocs and professors with mathematical questions and learnt very much from them. This all really helped him develop confidence as a mathematician, and he decided to continue his career in mathematics. Since October, he has been a postdoctoral researcher at the Max Planck Institute for Mathematics in Bonn.

Besides the difficulties after his first conference talk, he experienced the traditional hard last year, full of postdoc applications, writing up results and writing grant applications. But at the very end there was the reward: holding his doctoral degree in his hand was probably the best moment of the past four years.