Klaas Pieter Hart
Faculteit EWI
TU Delft
Postbus 5031
2600 GA Delft
K.P.Hart@TUDelft.nl

Boekbespreking Matthew Foreman en Akihiro Kanamori: Handbook of Set Theory

Verzamelingenleer naar alle kanten uitgewaaierd

De verzameling vervult al zeker een eeuw een centrale rol in de wiskunde. Het aanvankelijk gemak waarmee men zich van deze notie bediende liep forse deuken op door de paradox van Russell. Met de axiomatisering van Zermelo en Fraenkel werd het een zelfstandig vakgebied dat een eeuw later is uitgewaaierd over alle delen van de wiskunde. Vorig jaar is het meer dan vuistdikke Handbook of Set Theory **van Matthew Foreman en Akihiro Kanamori verschenen. Klaas Pieter Hart, topoloog aan de Universiteit van Delft, bespreekt het boek.**

Het moge onderhand genoegzaam bekend zijn dat Georg Cantor tot de verzamelingenleer kwam door zijn werk aan de uniciteitstelling voor trigonometrische reeksen. En, als u het nog niet wist, dan weet u het nu: Cantor bewees dat indien voor alle $x \in [0, 2\pi]$ de som $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ gelijk aan 0 is, alle coëfficiënten a_n en b_n gelijk aan 0 moeten zijn. Hij ontdekte dat de som niet voor *alle* x gelijk aan 0 verondersteld hoefde te zijn. Laten we de verzameling van punten x waarvoor we niet weten dat de som gelijk is aan 0 even A noemen. Om het resultaat van Cantor te formuleren hebben we de notie van afgeleide verzameling nodig: X' is de verzameling van verdichtingspunten van X, en recursief schrijven we dan $X^{(0)} = X$ en $X^{(n+1)} = (X^{(n)})'$ voor alle n. Cantor bewees: als $A^{(n)} = \emptyset$ voor een natuurlijk getal n, dan volgt nog steeds dat alle a_n en b_n gelijk aan 0 zijn. Dus als A bijvoorbeeld bestaat uit een convergente rij met limiet (dan geldt $A^{(2)} = \emptyset$) of uit een rij convergente rijen waarvan de limieten ook weer convergeren, ..., dan geldt de conclusie nog steeds. Opmerkelijk is dat dit onderzoek Cantor op het spoor van zowel kardinaal- als ordinaalgetallen zette.

Aan de ene kant bleken sommige oneindige verzamelingen wel en andere juist niet weggelaten te kunnen worden. Dat riep als vanzelf de vraag naar het verschil (zo dat er was) tussen die oneindigheden op. De weg te laten verzamelingen konden allemaal worden afgeteld met behulp van de natuurlijke getallen en dat leidde tot de vraag of dat voor elke deelverzameling van $[0, 2\pi]$ zo was. Het negatieve antwoord gaf ons de kardinaalgetallen $\aleph_0$ en $\mathfrak{c}$.

Aan de andere kant bleken er verzamelingen te bestaan met oneindig veel verschillende afgeleiden en de verzameling der natuurlijke getallen bleek niet 'lang' genoeg om die afgeleiden te kunnen indiceren. Cantor had dus behoefte aan nieuwe indexverzamelingen en die groeiden ten slotte uit tot de ordinaalgetallen.

Keuzeaxioma

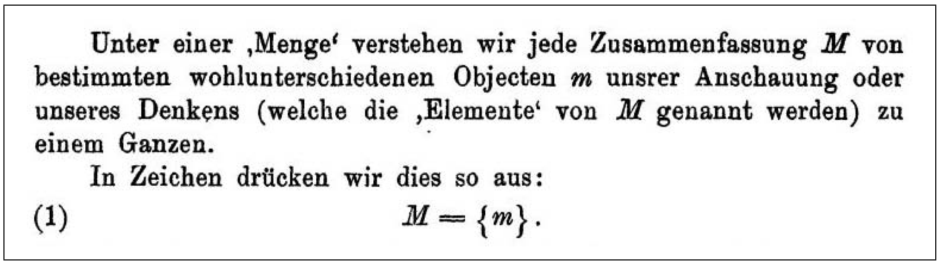
Cantors ruime opvatting van wat een verzameling was, leidde uiteindelijk tot paradoxen, waarvan met name die van Russell — de verzameling $R = \{x : x \notin x\}$ is een element van zichzelf dan en slechts dan als deze dat niet is — aanleiding gaf tot een herbezinning op het begrip verzameling. Zermelo's axiomatisering van de verzamelingenleer uit 1908, met een toevoeging door Fraenkel uit 1922, doet met verzamelingen wat we tegenwoordig vaker doen: niet zeggen wat onze objecten zijn, maar vastleggen wat het gewenste gedrag is.

De axioma's van Zermelo en Fraenkel, kortweg ZF genoemd, zijn goed genoeg gebleken om de gangbare wiskunde te omvatten. Zermelo nam ook al het keuzeaxioma in zijn lijst op, maar tegenwoordig wordt dat apart vermeld: met ZFC duiden we ZF *plus* het keuzeaxioma aan. In 1940 liet Gödel zien dat dat niet problematisch was: als uit ZFC een tegenspraak af te leiden zou zijn, dan zou dat ook al uit ZF kunnen. Eigenlijk twijfelt niemand aan de consistentie van ZF, maar dankzij Gödel weten we wel dat een bewijs van die consistentie niet binnen ZF zelf te formaliseren is. In 1963 liet Cohen zien dat het keuzeaxioma niet uit ZF af te leiden is en dat het die theorie dus echt versterkt.

De methoden die Gödel en Cohen gebruikten vormen het eigenlijke startpunt van het onderhavige handboek; in een lange inleiding legt redacteur Kanamori uit wat vooraf ging aan het materiaal dat de lezer te wachten staat. Hij neemt ook de moeite de artikelen voor ons samen te vatten, zodat iemand die wil weten wat er in de verzamelingenleer aan de hand is vooral die inleiding moet lezen; hoewel het diezelfde lezer op den duur wel kan gaan duizelen bij het aantal noties dat over haar uitgestort wordt. Want als dit boek iets duidelijk maakt, is het wel dat de verzamelingenleer naar alle kanten is uitgewaaierd.

Combinatorische zaken

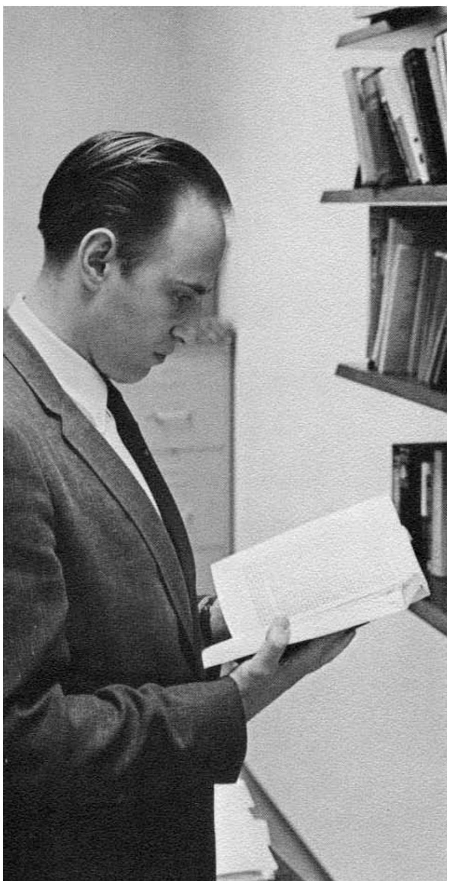
Het boek opent met een aantal hoofdstukken van combinatorische aard. Deze zijn voor 'de werkende wiskundige' verreweg het interessantst, want hier vindt men gereedschappen die bij het werk aan overaftelbare structuren grote diensten kunnen bewijzen. Stationaire verzamelingen onderscheiden het overaftelbare van het aftelbare en helpen vaak bij het terugbrengen van een probleem tot een analoog probleem, maar dan voor een kleiner kardinaalgetal. Partitiestellingen laten zien dat wanorde in de regel binnen de perken blijft, in termen van grafen: als we de lijnen van een voldoend grote volledige graaf kleuren met een beperkt aantal kleuren, dan is er een grote deelgraaf waarin alle lijnen dezelfde kleur hebben. De stelling van Ramsey zegt dat indien we groot met 'aftelbaar oneindig' en beperkt met 'eindig' interpreteren dat 'aftelbaar oneindig' ook voldoende groot is. De eenvoudigste vorm van de stelling van Erdős en Rado zegt dat bij één stap hoger — groot is 'kardinaliteit $\aleph_1$' en beperkt is 'aftelbaar oneindig' — de opvolger van $\mathfrak{c}$ 'voldoende groot' is. Dat het niet beter kan, volgt met een oud voorbeeld van Sierpiński, maar in het artikel 'Coherent Sequences' wordt uitgelegd dat het nog erger kan; in dat artikel wordt de combinatorische kern van $\aleph_1$ blootgelegd en gebruikt voor diverse constructies, waaronder die van een kleuring van de lijnen in de volledige graaf op $\aleph_1$ punten met $\aleph_1$ kleuren, die zo chaotisch is dat *elke* deelgraaf met $\aleph_1$ punten lijnen van alle kleuren heeft.


Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

In Zeichen drücken wir dies so aus:

(1) $$M = \{m\}.$$

Cantors definitie van verzameling in 'Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre', *Mathematische Annalen*, 1895


Paul Cohen

Een kort artikel over Borel-equivalentierelaties laat zien dat een equivalentierelatie op $\mathbb{R}$ (of een andere volledige separabele metrische ruimte) die een Borelverzameling is óf heel eenvoudig óf heel ingewikkeld is: de quotiëntverzameling is (Borel-isomorf met) een deelverzameling van $\mathbb{R}$ of bevat een kopie van de quotiëntgroep $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$; dat deze laatste ingewikkeld is, blijkt wel uit het feit dat elke volledige transversaal niet Lebesgue-meetbaar is (Vitali).

Na een artikel over 'Proper Forcing' keren we even terug naar combinatorische zaken die met $\mathbb{R}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ te maken hebben: families deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ en $\mathbb{N}$ met extreme eigenschappen, maat nul, eerste categorie, bijna disjunct, onafhankelijk, ultrafilter, ..., geven aanleiding tot definities van wat nu kardinaalkarakteristieken van het continuüm worden genoemd. Deze karakteristieken zijn welgedefinieerde kardinaalgetallen met onbepaalde waarden; die onbepaaldheid is analoog aan die van $\mathfrak{c}$: we weten dat $\mathfrak{c} = \aleph_\alpha$ voor een α, maar ZFC is niet sterk genoeg om te beslissen wélke α. Dit neemt niet weg dat zo'n karakteristiek vaak helpt bij het formuleren van een resultaat (of het maken van een tegenvoorbeeld) zonder dat men gevallen hoeft te onderscheiden.

Twee artikelen over forcing laten zien dat de lezer geacht wordt deze techniek eerder geleerd te hebben. 'Proper Forcing' is een goed geschreven overzicht over het gebruik van partiële ordeningen die de eigenschap 'proper' hebben; deze is door Shelah geformuleerd en heeft de laatste decennia in de toepassingen van forcing de boventoon gevoerd. Het andere artikel, 'Constructibility and Class Forcing', gaat over de (mogelijke) relaties tussen Gödels construeerbare universum en het 'echte' universum van verzamelingen; het bevat een stuk zwaardere kost.

De fijne structuur van Gödels universum is daarna aan de beurt. Vanaf dit moment komt men niet meer weg met algemeen wiskundige kennis: het gebruik van mathematische logica neemt hand over hand toe bij het uiteenrafelen van de wijze waarop verzamelingen gemaakt worden als dat universum wordt opgebouwd.

Kardinaalgetallen

In deel 2 is het hek geheel van de dam: een groot deel van de moderne verzamelingenleer hangt van elementaire inbeddingen aan elkaar: bestudering van meetbare en andere 'grote' kardinaalgetallen kan niet zonder. Maar ook dit gebied is niet zonder toepassingen: werk aan composities van elementaire inbeddingen leidde tot beter inzicht in de structuur van braid-groepen van Artin; die omweg langs grote kardinaalgetallen bleek achteraf niet nodig, maar de vraag is wannéér men zonder die omweg op het juiste idee gekomen zou zijn.

Midden in deel 2 staat nog een aanrader: 'Cardinal Arithmetic'. Hierin wordt de pcf-theorie van Shelah duidelijk uitgelegd; deze is ontwikkeld om meer vat op het machtsverheffen van kardinaalgetallen te krijgen. Die onderzoekingen hebben weer veel combinatorisch moois opgeleverd, maar los van dat is het gewoon fraai om te zien hoe een ongrijpbaar geachte macht als $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ getemd wordt:

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} < \max\{(2^{\aleph_0})^+, \aleph_{\omega_4}\}.$$

De $\aleph_{\omega_4}$ is een strikte bovengrens voor de cofinaliteit van de familie van aftelbare deelverzamelingen van $\aleph_\omega$, geordend door inclusie — het harde (en mooie) werk zit in het bewijs van die ongelijkheid.

Georg Cantor

Daarna komen in deel 2 nog twee hoofdstukken over opvolgers van singuliere kardinaalgetallen en (forcing)methoden om de cofinaliteit van kardinaalgetallen te veranderen, het liefst zonder dat kardinaalgetallen verloren gaan.

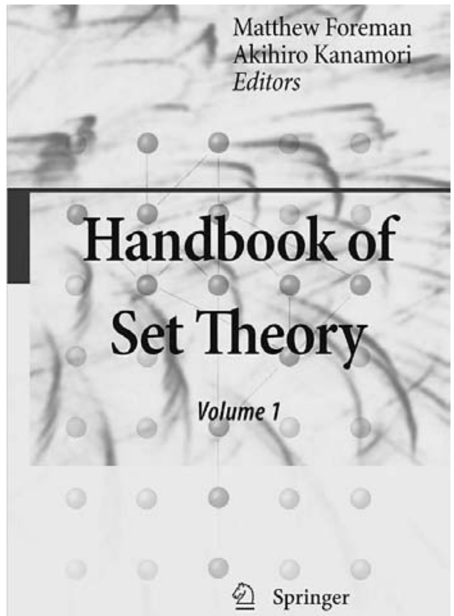
Gedetermineerdheid

Deel 3 behandelt twee onderwerpen: inwendige modellen en het Axioma van gedetermineerdheid (AD, 'Axiom of Determinacy'). Gödels construeerbare universum is het standaardvoorbeeld van een inwendig model: je beschrijft een constructieproces en neemt alleen die verzamelingen die door het itereren van dat proces voortgebracht worden; als je proces sterk genoeg is vormen die verzamelingen een universum waarin alle axioma's van ZF(C) gelden en als dat universum niet het hele universum is, noemen we het een inwendig model. Die modellen hebben allerlei interessante eigenschappen, maar worden ook vaak gebruikt om grenzen aan bewijsbaarheid te stellen. Het komt vaak voor dat een onschuldig ogende aanname leidt tot de conclusie dat er een inwendig model met een groot kardinaalgetal (onbereikbaar, meetbaar, ...) moet zijn. Een mooi voorbeeld komt uit de theorie der bomen, partiële ordeningen waarin voorgangersverzamelingen welgeordend zijn. Het oneindigheidslemma van Kőnig zegt dat een oneindige boom met eindige niveaus een oneindige tak moet hebben; als we dit naar $\aleph_1$ proberen op te tillen loopt het mis: er is een boom van kardinaliteit $\aleph_1$ met aftelbare niveaus maar zonder tak ter lengte $\aleph_1$, een Aronszajn-boom (probeer er zelf maar een te maken, met gebruik van strikt stijgende rijen reële getallen, geordend door 'is beginstuk van'). Onder aanname van de Continuümhypothese laat zich zo'n boom ook voor $\aleph_2$ construeren, maar de uitspraak 'er zijn geen $\aleph_2$-Aronszajn-bomen' impliceert dat $\aleph_2$ in een inwendig model zwak compact is. Nu is uit ZFC plus 'er is een zwak compact kardinaalgetal' de consistentie van ZFC af te leiden en dus ook uit ZFC plus 'er zijn geen $\aleph_2$-Aronszajn-bomen'. Dit maakt dat de toevoeging van die 'onschuldige' aanname aan ZFC een echt sterkere theorie creëert.

Het axioma AD zegt dat alle spelletjes van de volgende vorm gedetermineerd zijn: twee spelers spreken een deelverzameling A van $[0,1]$ af en kiezen om en om een 0 of een 1. Speler I wint als de rij zo een reëel getal representeert dat tot A behoort; anders wint speler II. Een resultaat van Martin zegt dat elke Borelverzameling een *gedetermineerd* spel oplevert: één van beide spelers heeft een winnende strategie; en AD poneert dit voor alle deelverzamelingen van $[0,1]$. Dit is incompatibel met het keuzeaxioma; het is niet zo moeilijk met transfinite recursie een A te maken waarvoor geen enkele strategie winnend is. Aan de andere kant, AD heeft allerlei fraaie gevolgen voor de structuur van $\mathbb{R}$: alle deelverzamelingen zijn Lebesgue-meetbaar bijvoorbeeld. Er is een mooie wisselwerking tussen AD en inwendige modellen: de consistentie van AD met ZF is via inwendige modellen vastgesteld.

Lijvig boek

Ten slotte: er staat heel veel moois in dit handboek; het is alleen jammer dat het zo dik is. Sommige hoofdstukken zouden heel goed als aparte boekjes uitgegeven kunnen worden. In zekere zin zijn ze dat ook: U kunt de pdf-files op SpringerLink apart kopen — iets mooier zou een print-on-demand-faciliteit zijn waarmee men een paar artikelen tot één boekje kan laten bundelen. Intussen ga ik dat hoofdstuk over 'Cardinal Arithmetic' nog eens nauwkeurig doorlezen.



Matthew Foreman and Akihiro Kanamori, *Handbook of Set Theory*, Springer, 2010, 2197 p., ISBN 9781402048432 (gebonden, drie delen), prijs € 599,00.