

Eef van Dongen

Pastoor Jeukenstraat 6
5966 NM America
eefvandongen@gmail.com

Jill Vervoort

Vossenheuvel 9
5966 RG America
jill.vervoort2@hotmail.com

Walter D. van Suijlekom

IMAPP
Radboud University Nijmegen
Heyendaalseweg 135
6525 AJ Nijmegen
waltervs@math.ru.nl

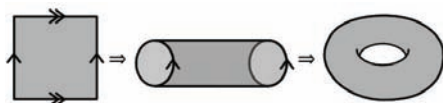
Onderwijs Vwo-profielwerkstuk

Ricci-stroming in 2D

Dit artikel is gebaseerd op het profielwerkstuk van Eef van Dongen en Jill Vervoort, twee zojuist geslaagde vwo-scholieren van het Dendron College in Horst. Zij hebben de masterclass Topologie aan de Radboud Universiteit Nijmegen gevolgd, gegeven door Jozef Steenbrink en Walter van Suijlekom. Aansluitend hebben zij hun profielwerkstuk over Ricci-stroming in twee dimensies geschreven, onder begeleiding van Walter van Suijlekom, zelf als mathematisch fysicus verbonden aan het IMAPP op de Radboud Universiteit. Eef van Dongen is in september 2011 begonnen aan een studie natuur- en wiskunde (TWIN-programma) aan de Universiteit Utrecht en Jill Vervoort studeert momenteel bouwkunde aan de Technische Universiteit Eindhoven.

In het najaar van 2010 – en opnieuw in 2011 als onderdeel van het Radboud Pre-University College of Science (zie [13]) – is er aan de Radboud Universiteit Nijmegen de masterclass Topologie gegeven, bedoeld voor 5 en 6 vwo-scholieren. Iets oneerbiediger had de masterclass de naam ‘rubbermeetkunde’: alsof de ruimtes zijn gemaakt van rubber. Immers, topologie is de bestudering van eigenschappen van ruimtes die onveranderd blijven na continue deformatie: een eigenschap die rubber tot op zeker hoogte ook heeft.

Een van de grote tot voor kort onopgeloste wiskundige problemen in de topologie was het Poincaré-vermoeden. Het zegt dat elke gesloten drie-dimensionale variëteit met triviale fundamentealgroep homeomorf met S^3 is. De Russische wiskundige Grigori Perelman heeft



Figuur 1 De bouwplaat van een torus

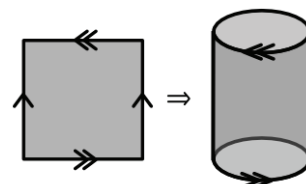
dit vermoeden recent bewezen door alle drie-variëteiten te classificeren [9]. Hierbij maakte hij gebruik van technieken uit de meetkunde, een vakgebied van de wiskunde dat gaat over ruimtes met daarop een notie van afstand en hoeken, oppervlakte, et cetera. In plaats van van rubber zijn de ruimtes nu voor te stellen alsof ze van staal zijn gemaakt.

De voltooiing van het bewijs van het Poincaré-vermoeden door Perelman werd aangekondigd tijdens het ‘International Congress of Mathematicians’ in 2006 in Madrid. Hoewel Perelman zelf afwezig was, en ook de daar aan hem toegekende Fields-medaille niet in ontvangst wil nemen – laat staan de miljoen dollar toegekend door het Clay Mathematics Institute, heeft de Amerikaanse wiskundige John Morgan als expert op het vakgebied een heldere uiteenzetting gedaan van Perelmans bewijs. Onlangs was Morgan te gast als spreker op het IMAPP-symposium aan de Radboud Universiteit. Een video-opname van zijn inspirerende lezing in Nijmegen is te zien

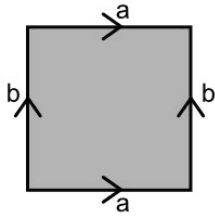
via <http://www.ru.nl/math/research/imapp-symposium>.

Essentieel in Perelmans bewijs van het Poincaré-vermoeden is de *Ricci-stroming*, geïntroduceerd in de jaren 1980 door Hamilton [5]. De Ricci-stroming is een evolutievergelijking voor de metriek op een variëteit. Kort gezegd is een (n -dimensionale) variëteit een topologische ruimte die lokaal op de euclidische ruimte \mathbb{R}^n lijkt. Om een beter inzicht te krijgen in wat Ricci-stroming is en hoe het tot een classificatie van variëteiten kan leiden bekijken we in dit artikel de Ricci-stroming in twee dimensies. De hoofdvraag die we proberen te beantwoorden is: *Hoe leidt Ricci-stroming tot de classificatie van gesloten oppervlakken?*

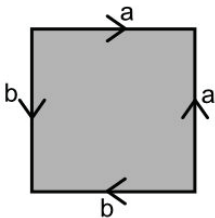
We zullen beginnen met het geven van een kort overzicht van de benadering van oppervlakken met behulp van bouwplaten en base- ren ons daarbij op de syllabus TopWis Poincaré [2] die wordt gebruikt tijdens de Masterclass aan de Radboud Universiteit. Vervolgens introduceren we een afstandsconcept op



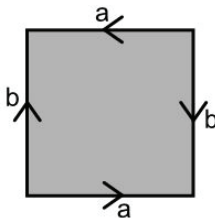
Figuur 2 De bouwplaat van een niet-oriënteerbaar oppervlak: de Kleinse fles



Figuur 3 Identificatieschema van de torus \mathbb{T}^2 : $ab^{-1}a^{-1}b$



Figuur 4 De bouwplaat van de 2-dimensionale sfeer \mathbb{S}^2 met identificatieschema $aa^{-1}bb^{-1}$



Figuur 5 De bouwplaat van het projectieve vlak \mathbb{P}^2 met identificatieschema $a^{-1}ba^{-1}b$

oppervlakken en definiëren we scalaire kromming, geïnspireerd door de aanpak in [3]. De vergelijking voor Ricci-stroming in twee dimensies is dan te schrijven met behulp van al deze ingrediënten. Na een kwalitatieve analyse van Ricci-stroming schetsen we hoe het leidt tot de classificatie van oppervlakken.

Topologie en bouwplaten

In de masterclass Topologie hebben we onder andere kennis gemaakt met oppervlakken: 2-dimensionale variëteiten. Een concrete manier waarop we een oppervlak kunnen weergeven is als bouwplaat. Een bouwplaat is een veelvlak, samen met een identificatie van de randen. Hierbij moet wel op de richting worden gelet, de pijltjes moeten bij het plakken dezelfde richting op wijzen. Dat een oppervlak altijd als bouwplaat is te realiseren is bijvoorbeeld bewezen in [10]. Een illustratief voorbeeld is gegeven door de torus: identificatie van twee overlappende randen geven een cilinder, identificatie van de overgebleven twee randcirkels vormen de torus. Zie Figuur 1.

Zouden we een van de richtingen om draaien, dan krijgen we een ander oppervlak: de Kleinse fles. Zie Figuur 2. Dit is een niet-oriënteerbaar oppervlak: er is geen eenduidige afspraak te maken over

wat links en rechts is.

Zonder dat het oppervlak verandert, is een bouwplaat aan te passen door te ‘knippen en plakken’. Hierbij moeten we ons houden aan de volgende regels:

- Knippen in de bouwplaat mag, zolang maar wordt aangegeven hoe de stukken weer aan elkaar worden geplakt.
- Houd richtingen intact, het is niet toegestaan om een pijl in de bouwplaat om te draaien.
- Twee pijlen mogen worden samengevoegd als die twee keer in dezelfde volgorde voorkomen.

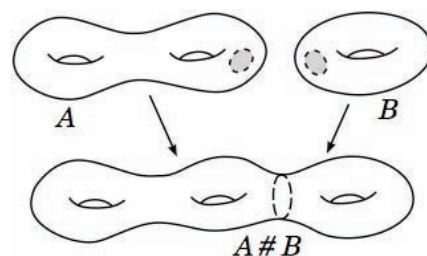
Het oppervlak dat op deze manier is verkregen is homeomorf (gelijk in vorm) aan het oorspronkelijke oppervlak en beschouwen we als topologisch equivalent.

De collectie verschillende pijlen noemen we het *identificatieschema* van de bouwplaat, het is handig om dit aan te geven met letters. Samengevat kunnen we dit dan weergeven als woord: we schrijven de letters achter elkaar zoals we ze tegenkomen als we met de klok mee langs de rand van de bouwplaat lopen. De oriëntatie van de pijl geven we aan door klein -1 rechts boven de letter te schrijven als de pijl tegen de klok in wijst. Zie Figuur 3. Twee andere relevante voorbeelden zijn gegeven door de bouwplaat van een boloppervlak, ook wel de 2-dimensionale sfeer genoemd, en die van het projectieve vlak. Zie Figuur 4 en 5.

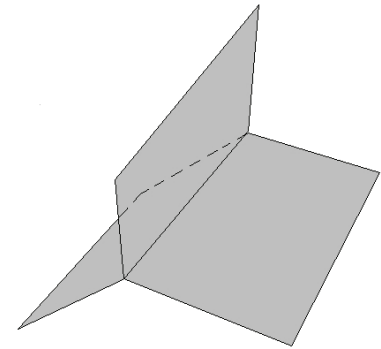
Een interessante bewerking gedefiniëerd op oppervlakken is de samenhangende som. Stel A en B zijn twee oppervlakken; na het halen van een schijfje uit zowel A als B is de samenhangende som $A\#B$ gedefiniëerd door de randen van de twee schijfjes op elkaar te plakken. Zie Figuur 6.

We kunnen het schijfje ook uit de bouwplaat knippen: zo is de samenhangende som te realiseren op het niveau van de bouwplaten en hun identificatieschema’s. We verwijzen voor meer details naar de syllabus TopWis Poincaré [2].

Laten we nu een aantal eigenschappen definiëren voor oppervlakken, gerealiseerd als bouwplaten met een identificatieschema. We



Figuur 6 De samenhangende som van twee oppervlakken



Figuur 7 Een boek met drie bladzijden is geen oppervlak: de identificatie van meer dan twee randen geeft een ruimte die niet overal lokaal op \mathbb{R}^2 lijkt

richten ons met name op compacte en samenhangende oppervlakken zonder rand. In termen van bouwplaten vertaalt dit als volgt:

eigenschap	bouwplaat
rand	een letter die slechts één keer voorkomt
compact	eindig veel letters
samenhangend	één woord

Een *gesloten oppervlak* is een compact en samenhangend oppervlak zonder rand: het kan worden gegeven als één enkele bouwplaat met eindig veel letters langs de randen die in paren voorkomen. Merk op dat als er drie of meer dezelfde letters langs de rand van de bouwplaat staan dit geen oppervlak geeft. Zie Figuur 7.

Tijdens de masterclass hebben we de volgende stelling bewezen:

Stelling. *Elk gesloten oppervlak is homeomorf met de 2-sfeer, met de samenhangende som van een aantal tori, of met de samenhangende som van een aantal kopieën van het projectieve vlak.*

Het bewijs is terug te lezen in de syllabus [2], zie [7] voor meer details.

Samenvattend zijn alle gesloten oppervlakken terug te vinden in de volgende tabel:

\mathbb{S}^2 ($\chi = 2$)	
\mathbb{T}^2 ($\chi = 0$)	\mathbb{P}^2 ($\chi = 1$)
$\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$ ($\chi = -2$)	$\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2$ ($\chi = 0$)
$\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$ ($\chi = -4$)	$\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2$ ($\chi = -1$)
...	...

In de tabel staat tussen haakjes de Eulerkarakteristiek aangegeven van het corresponderende oppervlak; laten we dit definiëren.



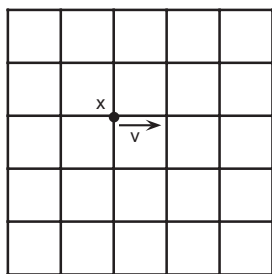
Figuur 8 Het oppervlak van het door Rem Koolhaas ontworpen CCTV-gebouw in Peking heeft $\chi = 0$

Allereerst is elk oppervlak op te delen in veelvlakken, zie bijvoorbeeld [1] voor een bewijs hiervan. We kunnen nu het aantal hoekpunten, randen en vlakken tellen, en we spreken de volgende notatie af:

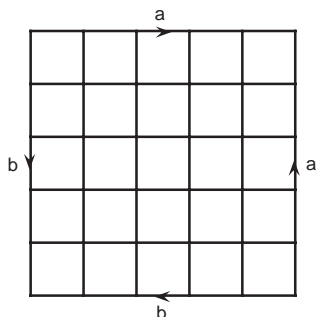
- V hoekpunten (vertices)
- E randen (edges)
- F vlakken (faces)

Bij een kubus is dit dus als volgt: $V = 8, E = 12, F = 6$.

Het getal $V - E + F$ wordt de Euler-karakteristiek genoemd, en wordt met de Griekse letter χ aangeduid. Het blijkt dat de Euler-karakteristiek niet afhangt van de gekozen opdeling van het oppervlak in veelvlakken (en zelfs alleen van de topologie van het oppervlak) en we schrijven de Euler-karakteristiek van een oppervlak A als $\chi(A)$. Zie Figuur 8.



Figuur 9 Een ruitjespatroon op de bouwplaat



Figuur 10 Bouwplaat van de sfeer met ruitjespatroon

De Euler-karakteristiek is ook uit te rekenen door naar de bouwplaat van een oppervlak te kijken. Een bouwplaat die uit een veelhoek bestaat, heeft maar één vlak. Bij de punten en lijnen moet wel opgepast worden dat deze eventueel nog worden geïdentificeerd: in sommige gevallen tellen deze dus als één punt/lijn.

Meetkunde: afstanden en kromming

Hoewel we tijdens de masterclass bovenstaande stelling hebben bewezen aan de hand van bouwplaten, is het ook mogelijk een meetkundig bewijs te construeren. Dit is aan de hand van Ricci-stroming [5] (zie ook het beknopte [11]) en is in de stijl van het bewijs van het Poincaré-vermoeden, recent door Perelman voltooid. Hoewel het Poincaré-vermoeden gaat over drie-dimensionale variëteiten en er bij het bewijs meer komt kijken dan alleen Ricci-stroming, is het inzichtelijk om te zien wat er gebeurt voor tweedimensionale variëteiten, ofwel voor oppervlakken.

Metriek en kromming

Een eerste begrip dat we willen introduceren is een *metriek* op een oppervlak. Met een metriek kunnen we op een intrinsieke manier afstanden en hoeken bepalen. In tegenstelling tot extrinsiek bedoelen we dus onafhankelijk van een eventuele grafische voorstelling of inbedding in drie dimensies of hoger. Dit gaat weer makkelijk aan de hand van de bouwplaat van een oppervlak: we brengen eerst een ruitjespatroon op de bouwplaat aan. Zie Figuur 9. Hierbij stellen we ons voor dat de hoekjes willekeurig klein kunnen worden gemaakt. De vector v geeft een ribbe van een vierkantje aan, net zo zouden we v verticaal kunnen tekenen. Een metriek is een toekenning van een positief getal aan de ribben van zo'n hokje. We schrijven dit als $\text{Dist}(x, x + v)$: de afstand (*distance*) tussen x en $x + v$.

Laten we een paar voorbeelden geven. Als we geen van de randen identificeren is bovenstaande figuur de bouwplaat van (een deel van) het platte vlak. Het is dan natuurlijk om voor elke ribbe de metriek $\text{Dist}(x, x + v)$ constant te kiezen. We kunnen bijvoorbeeld afspreken dat elk hokje één-bij-één centimeter meet: $\text{Dist}(x, x + v) = 1 \text{ cm}$.

Deze keuze is ook nog steeds mogelijk als we randen van de bouwplaat identificeren om een torus te verkrijgen. Hier is het van belang onderscheid te maken tussen intrinsiek en extrinsiek: de extrinsieke metriek op de torus verkregen door te kijken naar een inbedding in de drie-dimensionale ruimte verlangt dat

de metriek aan de 'binnenkant' van de torus kleiner is dan daarbuiten.

Tot slot kunnen we de 2-sfeer S^2 verkrijgen door de randen van de bouwplaat te identificeren zoals getoond in Figuur 10. Om het plakken 'glad' te laten verlopen, kiezen we nu een metriek die de bouwplaat op de juiste manier opbolt om tot een ronde sfeer te komen: dit is precies de afstand die we zouden meten als we de 2-sfeer op de gebruikelijke manier zouden inbedden in de driedimensionale ruimte. In dit geval valt de intrinsieke metriek dus samen met de extrinsieke metriek.

Zodoende staat een metriek ons toe om op een intrinsieke manier te spreken over afstanden tussen twee punten op het oppervlak, dat wil zeggen, onafhankelijk van de gekozen grafische representatie. Zo kunnen we onder andere de schijf $\Delta(x, r)$ definiëren van straal r en middelpunt x op het oppervlak A als de verzameling punten met afstand tot x gelijk aan of kleiner dan r .

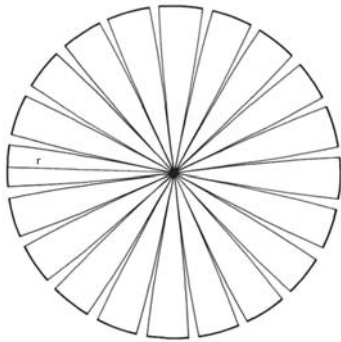
We zijn nu klaar voor een definitie van (intrinsieke) kromming als het verschil tussen de oppervlakte van een infinitesimaal schijfje op A in vergelijking met de oppervlakte die zo'n schijfje heeft in het platte vlak. In formulevorm is de *scalaire kromming* (of kortweg: kromming) in het punt x gegeven door

$$R(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\pi r^2 - \text{Opp}(\Delta(x, r))}{\pi r^4 / 12}$$

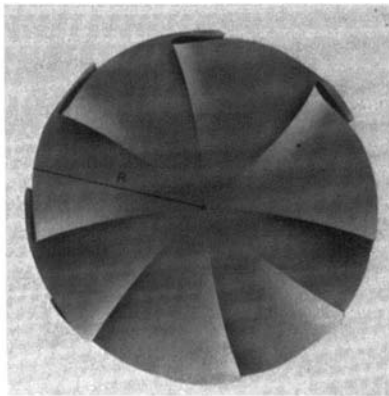
In een euclidisch, plat vlak is de oppervlakte van een cirkelschijf van straal r natuurlijk πr^2 en is $R(x) = 0$. Maar in sommige gevallen, zoals bijvoorbeeld op een sfeer, is $\text{Opp}(\Delta(x, r))$ echter kleiner dan πr^2 . Als we namelijk een bol schijfje plat zouden willen maken moeten er eerst inkepingen worden gemaakt voordat dit kan lukken. Als dit het geval is dan betekent het dat het oppervlak in x positief scalair gekromd is: $R(x) > 0$. Zie Figuur 11.

In sommige gevallen, zoals bijvoorbeeld op een zadel (of, meer wiskundig, in het hyperbolische vlak), kan $\text{Opp}(\Delta(x, r))$ juist groter zijn dan πr^2 . Hier moeten namelijk wat randen worden dubbelgevouwen om een schijf uit een hyperbolisch vlak plat te maken. Zo'n oppervlak is dan negatief scalair gekromd, $R(x) < 0$. Zie Figuur 12. Als $\text{Opp}(\Delta(x, r))$ gelijk is aan πr^2 is $R(x) = 0$, en is er dus geen scalaire kromming (bijvoorbeeld op een cilinder).

De constante $\pi r^4 / 24$ in de noemer van deze formule is nogal willekeurig, maar levert wel een mooi resultaat op voor de kromming van de 2-sfeer. Laten we deze nu berekenen.



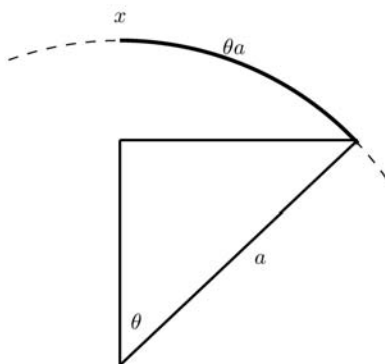
Figuur 11 De oppervlakte van een schijfje van straal r op de sfeer is kleiner dan πr^2



Figuur 12 De oppervlakte van een schijfje van straal r op het hyperbolische vlak is groter dan πr^2

Scalaire kromming van de sfeer en de torus
 Om de bovenstaande formule toe te kunnen passen op een sfeer bepalen we eerst de oppervlakte van een schijfje met straal r op de sfeer van straal a . Stel het punt x is de noordpool, anders draaien we de sfeer, om het de noordpool te laten zijn. Een ander punt op de sfeer maakt langs een meridiaan een hoek θ met de noordpool: dit selecteert een fractie van een cirkel. De lengte van het boogstuk dat bij deze hoek hoort is θa : dit is namelijk de fractie $(\theta/2\pi)$ van de totale omtrek $2\pi a$ van de meridiaancirkel.

We bepalen eerst de omtrek van de



Figuur 13 Lijnstuk van lengte θa langs een meridiaancirkel

breedtecirkel die bestaat uit alle punten op afstand θa van de noordpool. Het volgende plaatje van een gedeelte van een meridiaancirkel rond het middelpunt van de cirkel laat zien dat dit $2\pi a \sin \theta$ is. Zie Figuur 13.

Met andere woorden, de omtrek van de cirkel bestaande uit punten op afstand $r' \equiv \theta a$ van de noordpool is gelijk aan $2\pi a \sin r'/a$. We berekenen dan dat

$$\text{Opp}\Delta(x, r) = \int_0^r 2\pi a \sin(r'/a) dr' = 2\pi a^2 (1 - \cos r/a).$$

Uitschrijven van de cosinus in een Taylorreeks rond $r = 0$ levert dan voor de kromming op de noordpool:

$$R(x) = \frac{2}{a^2}.$$

Nu is ook goed te zien waarom $\pi r^4/24$ gekozen is als noemer: als de straal van de sfeer 1 is, is de kromming 2, wat precies de Euler-karakteristiek van de sfeer is.

De berekening van de scalaire kromming van de torus is makkelijker. De metriek op de torus is in elk punt geïnduceerd door de gebruikelijke metriek in het platte vlak. We concluderen dat op de torus, net als in het platte vlak:

$$R(x) = 0.$$

Alweer is dit precies de Euler-karakteristiek van de torus. Meer in het algemeen is het volgende waar:

Stelling. *Stel A is een gesloten oppervlak. Dan bestaat er een metriek op A en geldt:*

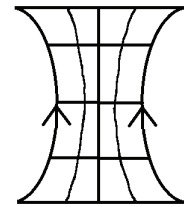
- *Er is het volgende verband tussen de gemiddelde kromming r_A en de Euler-karakteristiek van A :*

$$r_A = \frac{4\pi\chi(A)}{\text{Opp}(A)} \quad (\text{Gauss-Bonnet}).$$

- *Stel twee gesloten oppervlakken A en B hebben constante kromming en $r_A = r_B$. Dan is A homeomorf met B .*

Ricci-stroming in twee dimensies

We weten nu hoe de kromming van een oppervlak met metriek is te berekenen, en wat het verband is tussen die kromming en de Euler-karakteristiek. De Ricci-stroming beschrijft juist een verandering (stroming) van



Figuur 14 Een cilinder met in het midden een negatief gekromd gebied

de metriek. Deze verandering van een oppervlak wordt beschreven met een tijdsvariabele t en we schrijven $\text{Dist}_t(x, x + v)$. De kromming wordt ook afhankelijk van de tijd, omdat de definitie van $\Delta(x, r)$ van t afhangt. Om de Ricci-stroming in twee dimensies te beschrijven gebruiken we de volgende formule:

$$\frac{d}{dt} \text{Dist}_t(x, x + v) = (r_t - R_t(x)) \text{Dist}_t(x, x + v).$$

De linkerkant van deze vergelijking is de tijdsafgeleide van de afstandsfunctie, en geeft dus aan of de afstand tussen x en $x + v$ groter of juist kleiner wordt. De gemiddelde kromming op tijdstip t geven we aan met r_t , en $R_t(x)$ staat voor de plaatselijke kromming rond x .

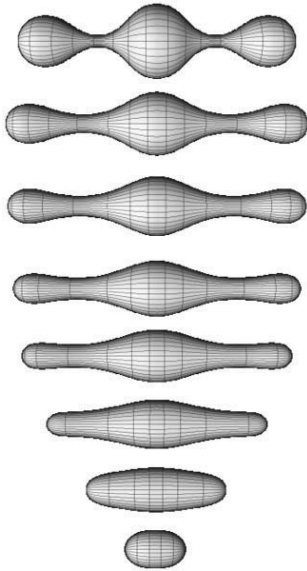
Als de plaatselijke kromming $R_t(x)$ gelijk is aan de gemiddelde kromming $r_t(x)$ zal de Ricci-stroming niets doen met de metriek rond dat punt. Echter, wanneer R_t kleiner is dan r_t , betekent dit dat $(r_t - R_t(x))$ positief is. Omdat de afstandsfunctie altijd positief zal zijn, betekent dit dat de afstand tussen x en $x + v$ groter zal worden. Om te beredeneren wat voor invloed dit heeft op een oppervlak zullen we als voorbeeld een cilinder bekijken met een negatief gekromd gebied. Zie Figuur 14.

In het middengebied is de lokale kromming R_t negatief en bovendien kleiner dan r_t . De vergelijking voor Ricci-stroming zegt dan dat daar de lengte van een ribbe groter wordt zodat de Ricci-stroming de cilinder daar als het ware uitdeukt om uiteindelijk dezelfde kromming te krijgen als de gemiddelde kromming van een cilinder, namelijk $r = 0$.

Net zo volgt dat als de plaatselijke kromming R_t groter is dan de gemiddelde kromming r_t de afstand langs de ribbe afneemt.

We kunnen de Ricci-stroming dus op de volgende, kwalitatieve manier beschrijven. Gegeven oppervlak A en een metriek daarop met scalaire kromming $R(x)$ en gemiddelde kromming r :

- Maak de metriek tijdsafhankelijk en laat de Ricci-stroming hierop los.
- Na enige tijd is de scalaire kromming R_t toegenomen in de punten waar $R_t < r_t$ en



Figuur 15 De Ricci-stroming ‘deukt’ de sterk positief (negatief) gekromde gebieden in (uit) tot de ronde sfeer overblijft

afgenomen waar $R_t > r_t$.

– De zo verkregen metriek op het oppervlak A heeft constante kromming die positief (negatief) is als r positief (negatief) was.

Het is essentieel te laten zien dat het laatste ook inderdaad gebeurt binnen eindige tijd, dit voerde echter te ver voor een profielwerkstuk. Een bewijs hiervan is te vinden in [4, 8] en [6]. Een mooie schematische voorstelling is gegeven in Figuur 15.

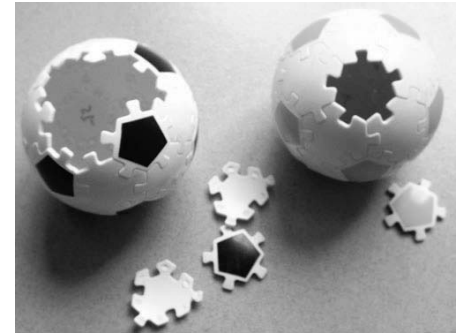
Hoe kunnen we nu met behulp van de Ricci-stroming oppervlakken classificeren? We formuleren nogmaals de classificatiestelling.

Stelling. *Elk gesloten oppervlak is homeomorf met S^2 , met de samenhangende som van een aantal tori, of met de samenhangende som van een aantal kopieën van het projectieve vlak.*

Bewijs. Herinner eerst dat de stelling in de vorige paragraaf zegt dat als twee oppervlakken dezelfde constante kromming r hebben, ze homeomorf zijn. Ook zegt diezelfde stelling dat r evenredig is met de Euler-karakteristiek χ van het oppervlak. Aangezien Ricci-stroming het oppervlak topologisch niet verandert, is het oppervlak A (vóór Ricci-stroming) homeomorf met het oppervlak ná Ricci-stroming. De uiteindelijke kromming van de metriek op A is constant en geeft (na opschalen) de Euler-karakteristiek van A . Zoeken we in de lijst ‘sfeer, samenhangende som van tori, samenhangende som van het projectieve vlak’ naar het oppervlak B met dezelfde Euler-karakteristiek, concluderen we dat hierop een metriek is gedefinieerd met dezelfde constante kromming: $r_A = r_B$. Aldus is het oppervlak A homeomorf met het gekozen oppervlak B . Dit bewijst de classificatiestelling voor gesloten oppervlakken. \square

In het geval van positieve kromming is dit goed voor te stellen. Na enige tijd zorgt de Ricci-stroming ervoor dat het oppervlak bestaat uit allemaal kleine schijfjes met dezelfde positieve kromming, zeg gelijk aan $2/a^2$ voor zekere $a < 0$. De schijfjes staan dus voor bol alsof ze onderdeel maken van een sfeer van straal a . Omdat het oppervlak samenhangend is, vormen de aan elkaar geplakte schijfjes precies de 2-sfeer. Vergelijk dit met de puzzelstukjes van een puzzelbol. Zie Figuur 16.

In twee dimensies is dit alles nog vrij gemakkelijk te begrijpen en goed voor te stellen. In drie dimensies werkt Ricci-stroming min of meer op dezelfde manier, maar kunnen er gedurende de stroming vreemde dingen gebeuren. Zo kan een voorwerp een oneindig lange nek krijgen, zodat de Ricci-stroming niet in eindige tijd con-



Figuur 16 De puzzelstukjes zijn precies zo gekromd dat het eindresultaat (bij benadering) een sfeer is

vergeert. Het is de Russische wiskundige Grigori Perelman die dit probleem heeft opgelost door ‘operaties’ (*surgery*) uit te voeren: door stukjes van een nek weg te knippen en de Ricci-stroming opnieuw zijn werk te laten doen. Zo heeft Perelman bewezen dat de Ricci-stroming in drie dimensies in eindige tijd en na eindig veel operaties convergeert naar een metriek met homogene kromming. Dit bewijst een vergelijkbaar classificatieresultaat voor drie-dimensionale variëteiten (namelijk het Thurston Vermeetskundigingsvermoeden) en in het bijzonder het Poincaré-vermoeden: *elke enkelvoudig samenhangende, gesloten 3-variëteit is homeomorf met de 3-sfeer S^3 .*

Hoewel Perelmans bewijs van het Poincaré-vermoeden te ver voerde voor de masterclass Topologie aan de Radboud Universiteit, hebben we wel geprobeerd te begrijpen wat deze stelling eigenlijk zegt door de relevante begrippen (enkelvoudig samenhangend, 3-sfeer, et cetera) te bestuderen. Op deze manier heeft de masterclass en het profielwerkstuk ons (EvD en JV) goed inzicht gegeven in wat wiskunde op de universiteit inhoudt en ons geïnspireerd om te kiezen voor een bèta-studie. \leftarrow

Referenties

- 1 P.S. Alexandrov. Combinatorial topology. Vol. 1, 2 and 3. Dover Publications, 1998.
- 2 J. Carstens en S. Eliëns. Syllabus Topwis Poincaré. De Praktijk, 2010.
- 3 J. Casey. Exploring Curvature. Friedrich Vieweg, 1996.
- 4 B. Chow and D. Knopf. The Ricci flow: An introduction. American Mathematical Society, 2004.
- 5 R.S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. J. Diff. Geom. 17 (1982) 255–306.
- 6 L. Ma. Ricci-Hamilton flow on surfaces. Global Scientific Publishing, 2003. (arXiv:1008.1576).
- 7 W.S. Massey. Algebraic Topology: An Introduction. Springer, 1967.
- 8 J. Morgan and G. Tian. Ricci flow and the Poincaré Conjecture. American Mathematical Society, 2007. (arXiv:math.DG/0607607).
- 9 G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications (arXiv:math.DG/0211159). Ricci flow with surgery on three-manifolds (arXiv:math.DG/0303109). Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds (arXiv:math.DG/0307245).
- 10 G. Springer. Introduction to Riemann Surfaces. Addison-Wesley, 1957.
- 11 T. Tao. Ricci flow. Princeton Companion to Mathematics. CUP Press, 2008.
- 12 J.R. Weeks. The Shape of Space. CRC Press, 2001.
- 13 www.ru.nl/pucofscience. Aanmelden kan nog via www.ru.nl/wiskunde/informatie.voor/scholieren/masterclass-wiskunde.