

## Szilárd András

Department of Applied Mathematics  
Babeş-Bolyai University  
M. Kogalniceanu 1  
Cluj Napoca, Romania  
andraszka@yahoo.com

## Kinga Sipos

Department of Applied Mathematics  
Babeş-Bolyai University  
M. Kogalniceanu 1  
Cluj Napoca, Romania  
kinga.sipos@yahoo.com

## Anna Soós

Department of Applied Mathematics  
Babeş-Bolyai University  
M. Kogalniceanu 1  
Cluj Napoca, Romania  
asoos@math.ubbcluj.ro

### Recreatieve wiskunde

# Welke Wirrel Warrel is moeilijker?

Met de van schuimplastic vervaardigde Wirrel Warrel-puzzels kun je kubussen en andere objecten maken. Ze zijn er in verschillende kleuren en elke kleur heeft een andere moeilijkheidsgraad. Szilárd András, Kinga Sipos en Anna Soós gebruikten de puzzels als onderwijsmateriaal. Daarbij ontdekten ze dat er iets mis is met de moeilijkheidsaanduidingen van de fabrikant. In dit artikel gaan zij op zoek naar een beter classificatiesysteem voor de Wirrel Warrel-puzzels.

Wirrel Warrel-puzzels [1] zijn constructiepuzzels die in 1986 zijn bedacht door Dirk Laureyssens, een Belgische uitvinder van speelgoed [2]. Ze zijn in de Verenigde Staten ook bekend onder de namen *Happy Cube* of *Snafooz* en in Spanje als *Cococrash*. Een Wirrel Warrel-puzzel bestaat uit zes stukken schuimplastic waarin telkens zes delen zijn uitgestanst (zie Figuur 1). Je kunt er op drie manieren mee puzzelen. De 2D-opdracht is het terugplaatsen van de zes stukken in het frame, in de 3D-opdracht moet je met de zes stukken een kubus maken en de '∞D' taak is om 3D-objecten te bouwen met de onderdelen van alle zes de puzzels. De 2D-taak is eenvoudig en de '∞D' taak hangt van

teveel parameters af (bijvoorbeeld welke onderdelen gebruikt worden en welk object wordt gemaakt). We beperken ons daarom tot de 3D-opdrachten.

Vaak kun je de eerste twee of drie (en zelfs vier of vijf) stukken op een aantal manieren samenvoegen, maar in veel gevallen zal het laatste stuk niet blijken te passen.

De Wirrel Warrel-familie is verdeeld in vier verschillende verzamelingen: *Little Genius*, *Happy Cube*, *Profi Cube* en *Marble Cube*. Volgens de fabrikant [2] neemt de moeilijkheid in deze sets toe (aangegeven met respectievelijk één, twee, drie of vier sterren). Elke set bestaat weer uit zes modellen waarvan de moeilijkheidsgraad ook met sterren is aangegeven. In Tabel 1 is te zien uit welke kubussen de *Profi Cube* en de *Marble Cube* bestaan.

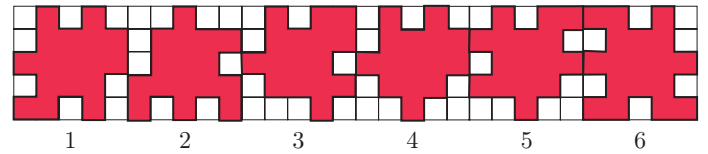
De *Profi Cube* wordt aanbevolen voor de leeftijdsgroep 7 tot 125 jaar en wordt als 'moeilijk' getypeerd, en de *Marble Cube* is voor leeftijden van 9 tot 125 en worden geclassificeerd als 'het moeilijkst'. Wij hebben deze puzzels verscheidene jaren gebruikt, niet alleen als educatief speelgoed, maar ook als onderwijsmateriaal ter illustratie van



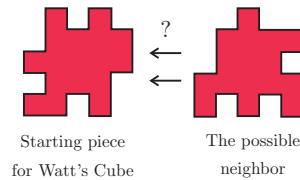
**Figuur 1** Van links naar rechts: Een Wirrel Warrel-puzzel in de originele verpakking (2D-opdracht voltoerd); De onderdelen van een Wirrel Warrel-puzzel; Drie zijvlakken in elkaar; Het moment van de waarheid. Past ie of past ie niet?; Een Wirrel Warrel-puzzel in elkaar gezet (3D-opdracht voltoerd)

Moeilijkheid	Profi Cube	Marble Cube
*	Confucius	Martin L. King
**	Da Vinci	Omar Khayyam
***	Marco Polo	Marie Curie
****	Rubens	Buckminster Fuller
*****	Watt	Mahatma Gandhi
*****	Newton	Albert Einstein

Tabel 1 De verschillende modellen van Profi Cube en Marble Cube



Figuur 3 De zijvlakken van de Watt-kubus



Figuur 4 Een unieke start voor de Watt-kubus

wiskundige modellering. Deze activiteiten waren bedoeld voor jongeren van 14–18 jaar en richtten zich voornamelijk op het ontwikkelen van het begrip ‘graaf’, de ‘herontdekking’ van het *backtracking* algoritme en optimaliseringen hiervan met snedes. Tijdens deze activiteiten ontdekten zowel wijzelf als onze studenten dat er iets mis is met de moeilijkheidsaanduiding van de fabrikant. Onze indruk was dat de *Marble*-set niet moeilijker maar juist makkelijker is dan de *Profi*-set en dat ook de sterren binnen een set weinig relatie hebben met de moeilijkheidsgraad. Dit bracht ons op de volgende vragen:

1. Hoe kun je uit gemeten oplostijden een goede volgorde maken van kubussen?
2. Hoe kun je theoretisch de moeilijkheid van de kubussen definiëren zo dat de bijbehorende classificatie klopt met de voorgaande?

**Een beetje wiskunde en analyse van algoritmes**

We stellen elk zijvlak van de kubus voor als een  $5 \times 5$  matrix met elementen 0 en 1. Het getal in de  $i$ -de rij en de  $j$ -de kolom is 1 precies dan als het bijbehorende vierkantje in het vlak van de kubus aanwezig is (zie Figuur 2).

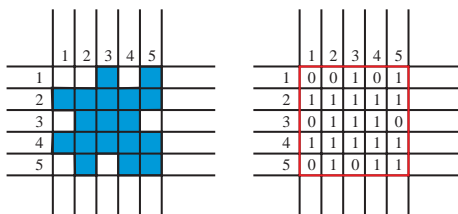
Om alle mogelijke posities van elk van de zes zijvlakken te kunnen beschrijven, gebruiken we per zijvlak acht van dergelijke matrices, namelijk vier rotaties en hun gespiegelden waarbij de voorkant van het vlakje achter komt. We noteren deze matrices als  $M_1, M_2, \dots, M_{48}$ . Afhankelijk van de symmetrie van het zijvlak kan een aantal van deze matrices samenvallen, maar dat is geen probleem. We definiëren een relatie  $\sim$  op de verzameling van deze matrices als volgt:  $A \sim B$  dan en slechts dan als  $A$  en  $B$  corresponderen met verschillende vlakken en als deze vlakken precies in elkaar passen met de zijde die overeenkomt met de eerste rij van de matrices. In formules betekent dit:

$$a_{1i} + b_{1i} = 1 \text{ voor alle } i = 2, 3, 4;$$

$$a_{11} + b_{11} \leq 1 \text{ en als } a_{11} = b_{11} = 0 \text{ dan moet } a_{21} = 0 \text{ of } b_{21} = 0;$$

$$a_{15} + b_{15} \leq 1 \text{ en als } a_{15} = b_{15} = 0 \text{ dan moet } a_{25} = 0 \text{ of } b_{25} = 0.$$

De laatste twee voorwaarden zorgen ervoor dat als een hoekelement niet wordt opgevuld door deze twee vlakken, het wel kan worden bereikt door het derde vlak dat de hoek compleet maakt. Verder volgt hieruit automatisch dat elk hoekkubusje opgevuld wordt omdat het



Figuur 2 Voorstelling van een zijvlak als matrix

totale aantal hoekkubusjes van de puzzel klopt. Een oplossing van de kubus kan dus op deze manier worden beschreven als een verzameling van 12 corresponderende paren matrices, voor elke ribbe één. We stellen nu een  $48 \times 48$  incidentiematrix  $F$  op, waarbij een element  $f_{ij}$  gelijk is aan 1 als de corresponderende stukken aan elkaar passen ( $M_i \sim M_j$ ) en 0 anders. De som van de elementen in de  $j$ -de kolom van  $F$  geeft dus het aantal stukken aan dat aan één zijde van een bepaald stuk past. Omdat elk zijvlak in de oplossing voorkomt, kunnen we bij het construeren van een oplossing bij elk zijvlak beginnen. We kiezen daarvoor het georiënteerde zijvlak dat wordt voorgesteld door de matrix  $M_j$  waarvoor  $\sum_{i=1}^{48} f_{ij}$  minimaal is. Dit is een handige keuze omdat daardoor het aantal vervolgmogelijkheden wordt beperkt. Als we geluk hebben dan past er maar één stukje. Dit treedt op bij de Watt-kubus (zie Figuur 3 en 4).

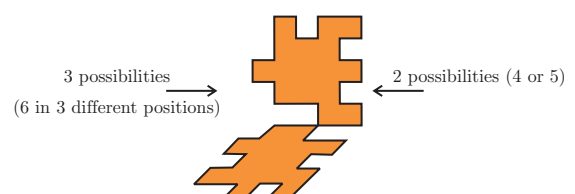
We definiëren dit kleinste aantal als de eerste complexiteitsindicator  $c_1$ :

$$c_1 = \min_{1 \leq j \leq 48} \sum_{i=1}^{48} f_{ij}. \tag{1}$$

Tabel 2 geeft een overzicht van deze indicator. Sommige kubussen hebben echter symmetrische zijvlakken en dat moet worden meegenomen als we aantallen tellen. Dit kan in de incidentiematrix  $F$  worden gedaan door breuken te introduceren. Als een zijvlak  $L$  (gecodeerd door de matrices  $M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_8}$ ) symmetrie vertoont, dan tellen we voor elke matrix het aantal keren  $s_k$  dat deze matrix voorkomt in  $\{M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_8}\}$ . We gebruiken dan  $\frac{1}{s_k}$  in plaats van 1 in de kolommen en rijen van  $M_{i_k}$ . Deze matrix duiden we aan met  $FS$  en de bijbehorende complexiteitsindicator is

$$cs_1 = \min_{1 \leq j \leq 48} \sum_{i=1}^{48} fs_{ij}. \tag{2}$$

Dit noemen we de eerste gecorrigeerde complexiteitsindicator. Tabel 3 laat de waarden hiervan zien. We gaan nu recursief drie nieuwe com-



Figuur 5 De tweede stap bij het in elkaar zetten van de Watt-kubus

Profi Cube	$c_1$	Marble Cube	$c_1$
Confucius	8	King	2
Da Vinci	8	Khayyam	8
Marco Polo	7	Curie	3
Rubens	6	Fuller	2
Watt	1	Gandhi	2
Newton	2	Einstein	3

Tabel 2 De complexiteitsindicator  $c_1$  voor de modellen van Profi Cube en Marble Cube

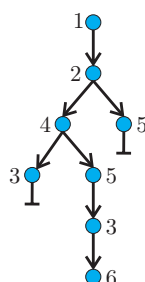
Profi Cube	$cs_1$	Marble Cube	$cs_1$
Confucius	4	King	2
Da Vinci	4	Khayyam	3
Marco Polo	4	Curie	3
Rubens	5	Fuller	2
Watt	1	Gandhi	2
Newton	2	Einstein	3

Tabel 3 De eerste gecorrigeerde complexiteitsindicator  $cs_1$  voor de modellen van Profi Cube en Marble Cube

plexiteitsindicatoren definiëren door een graaf te construeren die de mogelijkheden in het oplosproces laat zien. We doen dit aan de hand van de Watt-kubus. Als we beginnen met vlak 1 en 2 aan elkaar te zetten, dan hebben we aan de ene kant twee en aan de andere kant drie mogelijkheden om een derde stuk te plaatsen (zie Figuur 5). We kiezen de kant met de minste mogelijkheden en voor elke mogelijkheid analyseren we de ontstane situatie. Als we in elke stap een zijkant plaatsen op de plek met de minste mogelijkheden krijgen we voor de Watt-kubus de graaf in Figuur 6. Elke knoop stelt een plaatsing van een zijde voor met het aantal mogelijkheden.

Als we met een ander stuk starten krijgen we een boom met meer knopen, dus het is mogelijk (als je pech hebt) om meer tijd te besteden aan het in elkaar zetten van de kubus. Voor de keuze van de zijvlakken hebben we nu een *greedy* aanpak gekozen. Het is duidelijk dat we daarmee niet altijd de kleinste graaf zullen krijgen, maar we kunnen het algoritme zonder moeite uitvoeren omdat we geen configuraties hoeven te onthouden. Figuur 9 en 10 in de Appendix laten voor de kubussen uit de Profi- en de Marble-groepen de grafen zien die je zo krijgt.

We gaan nu de moeilijkheid van een kubus relateren aan de complexiteit van deze graaf. De eerste gecorrigeerde complexiteitsindicator  $cs_1$  is het aantal knopen op het eerste niveau, dus het ligt voor de hand om een  $k$ -de gecorrigeerde complexiteitsindicator  $cs_k$  in te voeren als het aantal knopen op niveau  $k$ , voor  $1 \leq k \leq 5$ . Het is duidelijk dan  $cs_5$  het aantal niet-equivalente oplossingen van de kubus is. Alle



Figuur 6 De mogelijkheden bij het oplossen van de Watt-kubus

kubussen die we bekeken, hebben een unieke oplossing ( $cs_5 = 1$ ), behalve de Omar Khayyam-kubus die drie oplossingen heeft. Verder kunnen we nog voor iedere kubus tellen hoe vaak een poging niet succesvol is, dat is het aantal takken waarvan de lengte kleiner dan 5 is. We noemen dit getal  $cs_6$ . Voor de Watt-kubus (Figuur 6) is  $cs_6 = 2$ . We hebben nu voor elke kubus zes complexiteitsvectoren  $r_j = (cs_j^i)_{1 \leq i \leq 12}$  voor  $j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ .

Om tot een geschiktere maatstaf voor de complexiteit te komen definiëren we nog drie complexiteitsgetallen als volgt:

1. De kans dat je zonder backtracken tot een oplossing komt in de graaf die we gedefinieerd hebben.
2. Het gemiddelde aantal stappen met backtracking dat nodig is om een oplossing te vinden.
3. De verhouding tussen het aantal eindknopen op het laagste niveau en het totale aantal eindknopen.

Met betrekking tot deze indicatoren vinden we de volgende ordeningen:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$r_7$	8	5	6	7	9	12	10	11	1	3	4	2
$r_8$	6	8	12	5	7	11	9	10	1	3	4	2
$r_9$	8	5	6	7	12	11	9	10	1	3	4	2

Ten slotte voeren we een *principal component* analyse uit op de variabelen  $(r_j)_{1 \leq j \leq 9}$  en de doelvector  $v$  die werd verkregen uit tijden die werden gemeten bij 120 middelbare scholieren. Om de vector  $v$  samen te stellen uit de tijdmetingen hebben we verschillende methoden gebruikt: gemiddelde tijden, medianen en hiërarchische clusterteknieken.

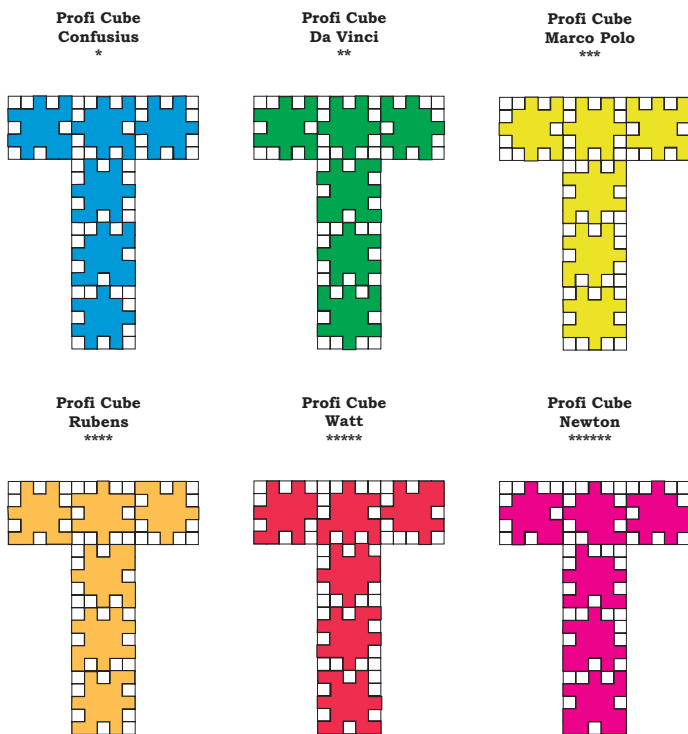
**Leerlingen sorteren de kubussen door ze op te lossen**

We hebben diverse puzzelactiviteiten georganiseerd voor middelbare scholieren en universiteitsstudenten en we hebben daarbij telkens de tijd gemeten die nodig was om elke puzzel op te lossen. De kubussen werden in willekeurige volgorde aangeboden en elke deelnemer moest, voordat we met de metingen begonnen, eerst twee kubussen oplossen die niet uit de bestudeerde verzameling kwamen. Deze trainingsfase zorgde ervoor dat ze vertrouwd raakten met de kubussen en een oplosstrategie konden ontwikkelen. Verder was het nodig om het effect van het leerproces op de metingen uit te schakelen. Op deze manier kregen we een verzameling van gemeten tijden  $m_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq 12$ ,  $1 \leq j \leq n$ , waarbij  $i$  het nummer van de kubus is,  $j$  het nummer van de leerling en  $n = 120$  het totale aantal deelnemers. Uit deze metingen bepaalden we de volgende indicatoren:

1. de gemiddelde tijd  $a_i$  voor elke kubus.
2. De gemiddelde tijd  $b_j$  voor elke kubus, waarbij de grootste 10% en de kleinste 10% van de oplostijden werden weggelaten.
3. De mediaan  $c_i$  voor elke kubus.

Op grond van elke indicator werd een mogelijke rangschikking van de kubussen gevonden. Ten slotte bepaalden we nog een ordening  $d_i$  op grond van hiërarchisch clustering [3]:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a_i$	8	12	7	11	10	1	6	4	5	3	9	2
$b_i$	8	12	7	11	6	10	4	1	5	9	3	2
$c_i$	8	12	7	11	5	6	9	10	1	3	4	2
$d_i$	7	12	8	5	11	6	1	14	10	9	3	2



Figuur 7 Oplossingen voor de Profi-kubus

De verschillen tussen de eerste twee rangschikkingen kunnen worden verklaard door uitbijters. Een derde van de leerlingen had wel ergens een dip waardoor het oplossen van een kubus soms wel een uur duurde. Het feit dat de gemiddelde tijd voor de Watt-kubus aanzienlijk groter was dan voor de Confucius- of Rubens-kubus laat zien dat de meeste leerlingen niet met de slimste startoplossing begonnen en daardoor veel meer mogelijkheden moesten onderzoeken. Als we de gemeten tijden van de Watt-kubus beter bekijken dan blijkt de verdeling twee toppen te vertonen, dus het gemiddelde is voor deze kubus eigenlijk geen goede indicator. Deze observatie en de bovenstaande tabel wijzen erop dat de meest natuurlijke indeling in twee verzamelingen de volgende is:

- I. De gemakkelijke kubussen: 8, 12, 7, 11, 5, 6
- II. De moeilijke kubussen: 1, 4, 10, 9, 3, 2

**Correlatie tussen theorie en praktijk**

Op de theoretische en de gemeten rangschikkingen hebben we een rang correlatie analyse (met de Kendalle- en Spearman- coëfficiënt) en een *principal component analyse* [4] uitgevoerd. Het volgende bleek:

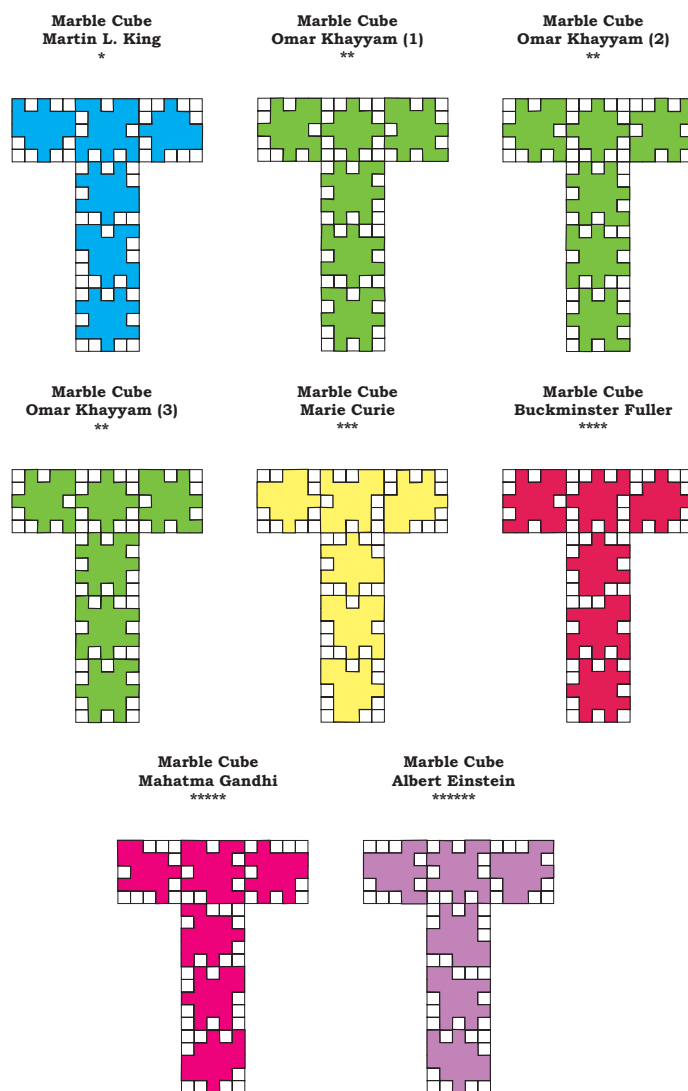
- De rangschikking op grond van gemiddelden correleert het beste met het aantal knopen in de *greedy* graaf.
- Zonder de uitbijters correleert de rangschikking met gemiddelden het beste met de rangschikking op grond van de som van de eerste twee complexiteitsindicatoren.
- De rangschikking uit de mediaan correleert het best met die van het eerste gecorrigeerde complexiteitsgetal (en de som van de eerste twee complexiteitsindicatoren).
- De rangschikking verkregen uit de clustering past het beste bij ordening op grond van het gemiddelde aantal oplosstappen.

In alle gevallen kan ongeveer de helft van de variantie verklaard

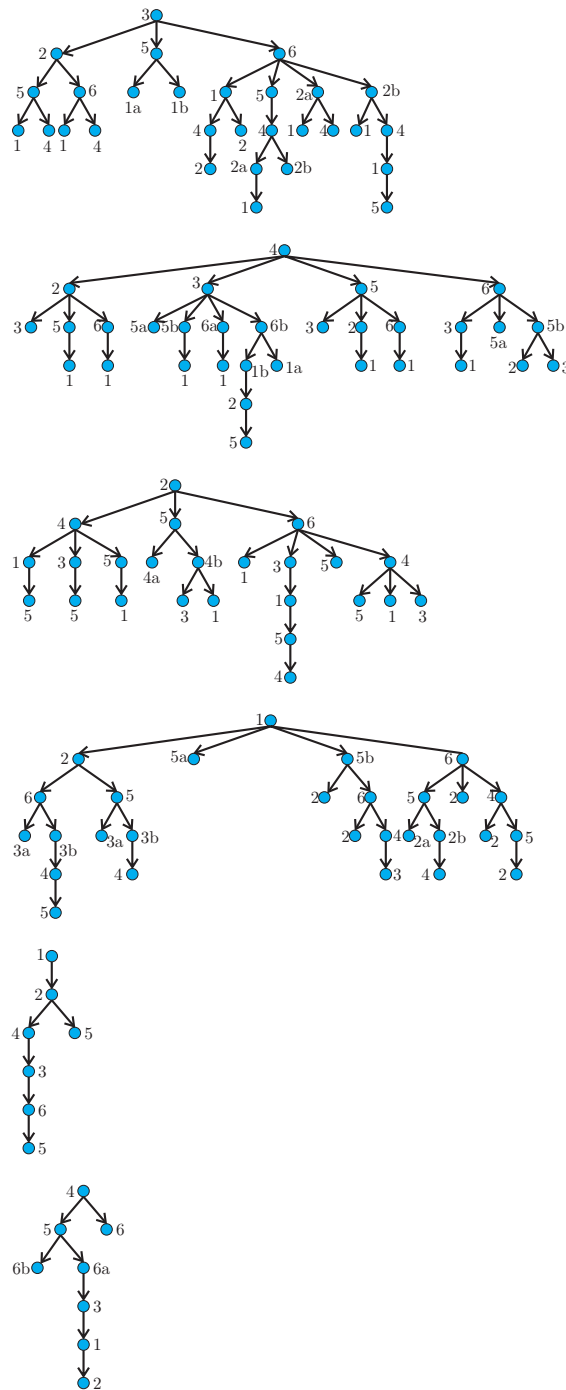
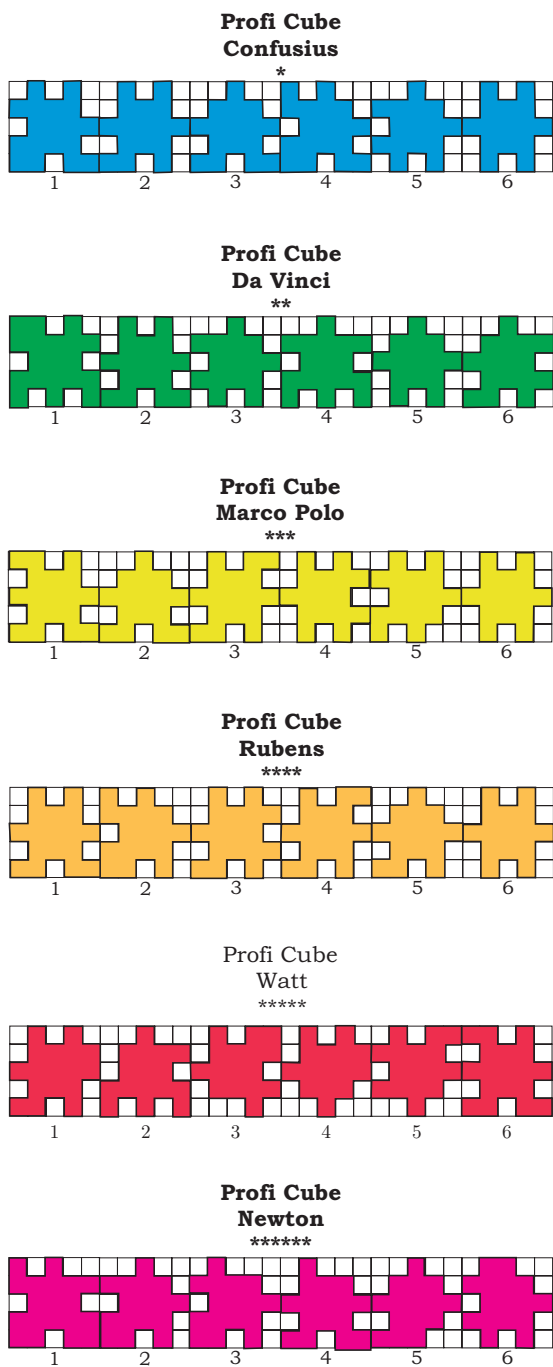
worden door een enkele theoretische rangschikking en de andere theoretische rangschikkingen verklaren 75–85% van de variantie van elk van de empirische rangschikkingen.

**Conclusies**

- De rangschikkingen uit de gemeten tijden kloppen met de ordeningen die werden bepaald door analyse van het *greedy* algoritme. De meeste leerlingen beaamden dat hun oplostechniek inderdaad was gebaseerd op proberen, backtracken en een greedy aanpak.
- De indeling van de fabrikant is helemaal verkeerd. De *Marble*-verzameling is niet de moeilijkste en rangschikking in de *Profi*- en de *Marble*-sets heeft geen relatie met de complexiteit van het oplosproces.
- Ons voorstel voor een nieuwe indeling is, geordend naar toenemende moeilijkheid:
- Omar Khayyam, Mahatma Gandhi, Albert Einstein, Watt, Newton, Martin Luther King.
- Marie Curie, Buckminster Fuller, Confucius, Marco Polo, Da Vinci, Rubens.



Figuur 8 Oplossingen voor de Marble-kubus



Figuur 9 Het pad naar de oplossing voor de Profi-verzameling

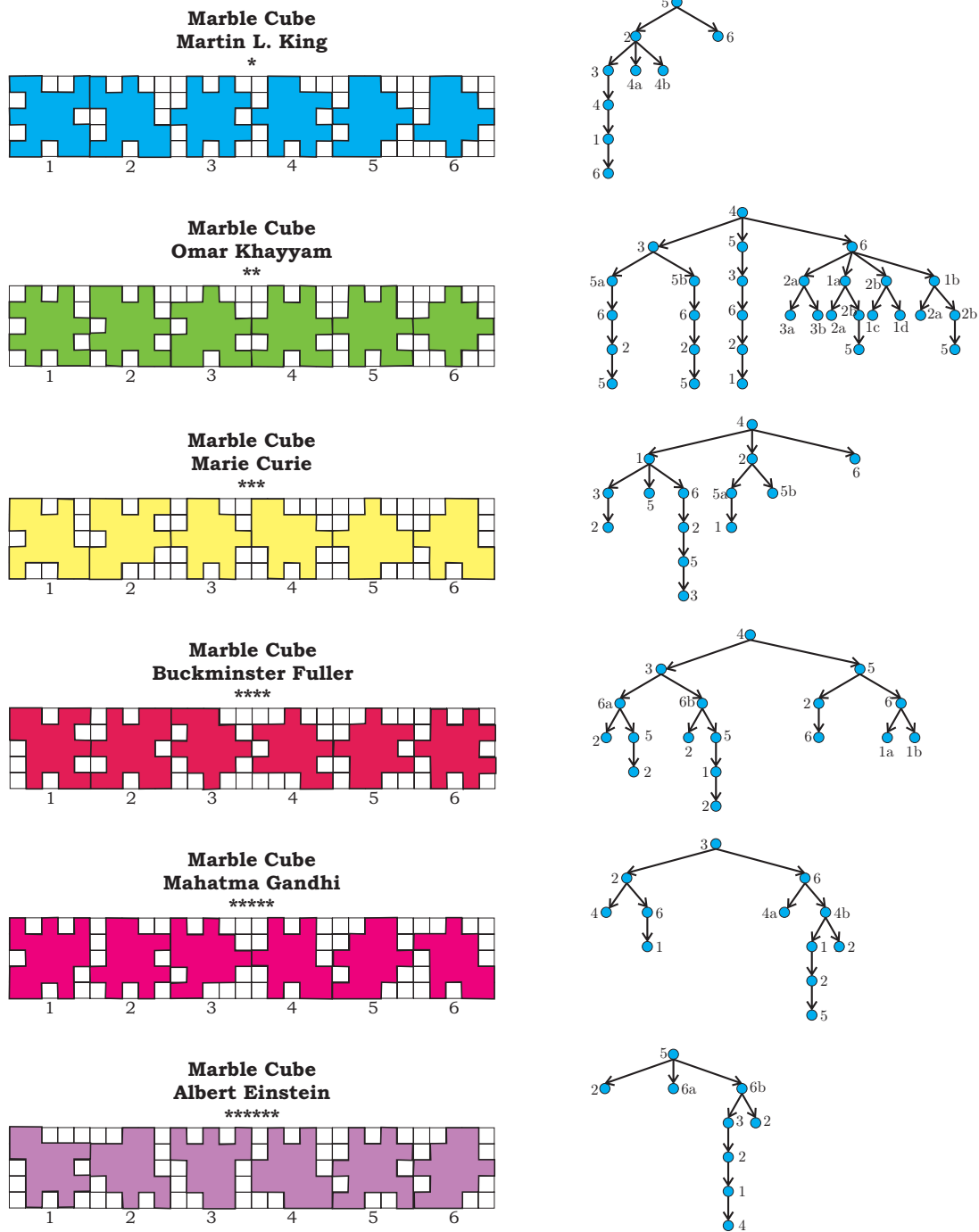
**Dankwoord**

Dit artikel is gebaseerd op werk in het project Primas, gecoördineerd door de Universiteit Freiburg met als partners het Freudenthal Instituut en de universiteiten van Genève, Nottingham, Jaen, Nitra, Szeged, Cyprus, Malta, Roskilde, Manchester, Babeş-Bolyai, SøR-Trøndelag. Onze activiteiten waren onderdeel van het FP7 project Primas (Grant No. 244380), de modellering die leidde tot het classificatieprobleem waren onderdeel van het Comenius project DQME II. We bedanken onze collegas Őrs Nagy (Babeş-Bolyai Universiteit), Hajnalka Csapó (Márton Áron school, Miercurea Ciuc), Jutka Szilágyi (Báthory Istvan school, Cluj Napoca), Emőke Szilágyi, István Mátéfi (Bolyai Farkas school, Târgu Mureş) en Andrea Bartos-Kocsis voor hulp bij de puzzelactiviteiten en constructieve opmerkingen. De eerste auteur is gedeeltelijk financieel ondersteund door de Hungarian University Federation of Cluj Napoca, de tweede auteur werd financieel ondersteund door programma's gefinancierd door het Sectoral operational programme Human Resources Development, contract Posdru 6/1.5/S/3 – "Doctoral studies: through science towards society".

**Appendix**

In Figuur 7 en 8 laten we alle mogelijke niet-equivalente oplossingen van de Profi- en de Marble-kubussen zien. Omar Khayyam is de enige kubus met verschillende niet-equivalente oplossingen. Figuur 9 en 10 tonen de oplossingsgraaf voor elke kubus.

Vertaling: Hans Melissen



Figuur 10 Het pad naar de oplossing voor de Marble-verzameling

Referenties

- 1 [http://en.wikipedia.org/wiki/Happy\\_Cube](http://en.wikipedia.org/wiki/Happy_Cube)
- 2 De officiële site van Happy Cube: <http://www.happycube.com>
- 3 B.S. Everitt, S. Landau, M. Leese, *Cluster Analysis*, Wiley, 4th ed., 2009.
- 4 I.T. Jolliffe, *Principal Component Analysis*, Springer, 2nd ed., 2002.