Jaap Top
Johann Bernoulli Instituut
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 407
9700 AK Groningen
j.top@rug.nl

Erik Weitenberg
Johann Bernoulli Instituut
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 407,
9700 AK Groningen
e.r.a.weitenberg@gmail.com

Geschiedenis

Schoute herschijnt

in 1893 publiceerde Pieter Hendrik Schoute een gedetailleerde beschrijving van drie draadmodellen van discriminantoppervlakken. Nadien hebben anderen soortgelijke modellen gebouwd, maar zelden werd daarbij gerefereerd naar Schoute. Jaap Top en Erik Weitenberg laten Schoutes bijdrage aan dit onderwerp herleven, onder andere aan de hand van verslagen van vergaderingen van de wis- en natuurkundige afdeling van de KNAW.

Hoogleraar Pieter Hendrik Schoute (1846–1913) was vanaf 1881 als meetkundige werkzaam in Groningen. In 1886 werd hij gekozen tot lid van de KNAW, in het cursusjaar 1892–1893 was hij rector van de Rijksuniversiteit Groningen en vanaf 1898 was hij redacteur bij het *Nieuw Archief voor Wiskunde*.

Pieter Hendrik Schoute (1846–1913)

Als meetkundige werd hij vooral bekend door zijn werk aan regelmatige polytopen in de vierdimensionale ruimte. Hoofdstuk 5 van het proefschrift uit 2007 van Irene Polo [4] geeft hiervan een goede indruk, met name wat betreft Schoutes samenwerking met Alicia Boole Stott. Een recent prachtig artikel van Wieb Bosma [1] laat zien dat Schoute zich ook met heel andere onderwerpen, namelijk het populariseren van wiskunde, bezighield. In dit artikel zien we nog een (vergeten) onderwerp uit Schoutes oeuvre: het visualiseren van discriminanten.

Schoutes oppervlakken

In het *Verslag der Zitting van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen* van zaterdag 27 mei 1893 lezen we [6, pp. 8–12]:

Wiskunde. – De Heer SCHOUTE vertoont drie draadmodellen van ontwikkelbare oppervlakken, die met hoogere-machtsvergelijkingen in verband staan, en voegt daaraan de volgende verklaring toe. . . .

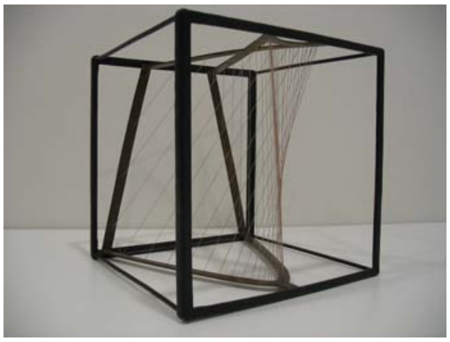
Waarschijnlijk was Schoute eerder op dezelfde zaterdag te vinden in de trein ergens tussen Groningen en Amsterdam. De genoemde draadmodellen worden elk begrensd door een metalen frame van $21{,}5 \times 21{,}5 \times 21{,}5$ cm, dus Schoute had heel wat mee te sjouwen. Na zijn beschrijving, zo meldt het verslag, “volgt eene korte discussie met de Heeren Grinwis en Korteweg”. Cornelius Hubertus Carolus Grinwis (1831–1899) werkte als toegepast wiskundige in Utrecht; Diederik Johannes Korteweg (1848–1941) is de bekende Amsterdamse wiskundige.

De gedetailleerde beschrijving van de modellen is niet alleen in bovengenoemd verslag [6] te vinden. Een Duitse bewerking [7] van zijn tekst met nog wat extra gegevens publiceert Schoute in hetzelfde jaar 1893 op de pagina’s 25–28 van de appendix (Nachtrag) die Walther Dyck uitgeeft bij zijn *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente* [2].

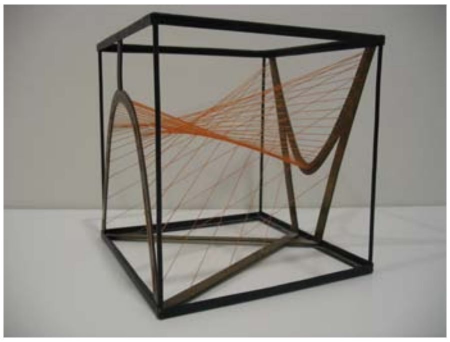
Dankzij deze nauwkeurige beschrijvingen is het niet moeilijk de drie oorspronkelijke modellen terug te vinden in de omvangrijke collectie meetkundige modellen die het Groningse Johann Bernoulli Instituut nog altijd bezit. Zie Figuur 1, 2 en 3.

Door een gelukkig toeval kunnen we ons een goede indruk verschaffen, hoe het toeging tijdens zo’n maandelijkse gewone zitting van de wis- en natuurkundige afdeling van de KNAW. De enorme diversiteit aan onderwerpen zoals deze iedere laatste zaterdag van de maand in het Trippenhuis te Amsterdam werden besproken, is al snel met wat bladeren in de verslagen te zien. Maar minstens zo aardig is het dat de Amsterdamse

Figuur 1 Schoutes eerste model



Figuur 2 Schoutes tweede model



Figuur 3 Schoutes derde model

kunstenaar Martin Monnickendam zo'n vergadering bezocht en er een tekening van maakte. Deze is gedateerd op 28 april 1900. Zie Figuur 4. De datum 28 april 1900 betreft inderdaad een laatste zaterdag van een maand, maar zoals in het verslag van de zitting van 31 maart 1900 is te lezen, moest vanwege een 'Vereenigde Vergadering der beide Afdeelingen' de gewone vergadering van april 1900 uitwijken naar de 21ste. De beschrijving van Monnickendams prent op de Beeldbank van het Stadsarchief van Amsterdam (te vinden via http://beeldbank.amsterdam.nl) bevat een aantal fouten, mogelijk omdat Monnickendam de namen van de personen die hij portretteerde eerst ergens noteerde en dat dan later hij of anderen moeite hadden om alles te ontcijferen. Op de prent zouden dan te vinden zijn: J.M. van Bemmelen, J. Cardinaal, G. van Diesen, H. Haga, J.C. Kluyver, D.J. Korteweg, H.A. Lorentz, Th.H. MacGillavry, T. Place, N.W.P. Rauwenhoff, H.G. van de Sande Bakhuyzen, P.H. Schoute, J.D. van der Waals, F.A.F.C. Went. Zo komen we tot 14 namen terwijl op de tekening 15 personen te onderkennen zijn. Wie de resterende persoon is, en ook wie precies waar zit, is ons onbekend. Wel zijn duidelijk centraal op de tekening (met voorzittershamer in zijn hand) de voorzitter H.G. van de Sande Bakhuyzen, met aan zijn linkerhand de secretaris J.D. van der Waals te herkennen.

Het verslag van de vergadering van 21 april 1900 meldt: "De Heer Lorentz heeft bericht gezonden, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen." Kennelijk toont de prent dus niet deze bijeenkomst, maar een eerdere. In januari 1900 was Schoute afwezig, en in februari van dat jaar vergaderde men zonder J.D. van der Waals. Hoogstwaarschijnlijk toont de prent dan ook de vergadering van 31 maart 1900. Als wiskundige was daarbij naast Cardinaal, Kluyver, Korteweg en Schoute ook Jan de Vries uit Utrecht aanwezig; mogelijk is hij dus de resterende persoon op de tekening.

Op 24 juni 1893, de zitting volgend op die waarop Schoute zijn modellen toonde, komt hij kort op het onderwerp terug. De letterlijke tekst zoals opgeschreven in het verslag [6,p. 44] is:

Wiskunde. – De Heer SCHOUTE deelt, ter aanvulling van zijn in de vorige vergadering gehouden voordracht mede, dat Dr. KERSCHENSTEINER te Schweinfurt wel modellen gemaakt heeft van discriminantoppervlakken, doch geen *draadmodellen*. In stede van zich derhalve met het maken van teekeningen alleen tevreden te stellen, heeft Dr. KERSCHENSTEINER uit blik dwarsdoorsneden vervaardigd, en deze, na ze aan elkaar gesoldeerd te hebben, met een kneedbare stof: het *plastellin*, dat niet hard wordt maar altijd kneedbaar blijft, bedekt.

Discriminanten en meetkunde

In het KNAW-verslag uit 1893 staat, dat Schoute zijn onderzoek doet "in het voetspoor van SYLVESTER." Dit slaat op Sylvesters artikel [8] uit 1864, waarin deze op een meetkundige manier het aantal reële nulpunten van een (reële) veeltermvergelijking bepaalt. Overigens schrijft Schoute aan het begin van zijn tekst [7] in de Appendix van Dycks catalogus: "Betrachtet man nach Sylvester und Kronecker ...."

Het door Sylvester beschreven idee is verrassend simpel. Beschouw een (reële) familie van polynomen

$$p(t) := f(t) + xg(t) + y,$$

waarin f en g vastgekozen polynomen zijn, met graad(f) > graad$(g) > 0$. Elk polynoom in de gegeven familie correspondeert dan met een uniek punt (x, y) in het vlak. De polynomen die een gegeven nulpunt $t = s$ hebben, corresponderen zo precies met de lijn gegeven door $f(s) + xg(s) + y = 0$ in het vlak. En zo'n polynoom in de familie heeft ergens een dubbel nulpunt, precies dan als er een s bestaat zodat (x, y) oplossing is van het stelsel

$$\begin{cases} f(s) + xg(s) + y = 0 \\ f'(s) + xg'(s) \quad = 0. \end{cases}$$

Is $g'(s) \neq 0$, dan heeft dit stelsel een unieke oplossing. Omgekeerd, nemen we voor s een variabele, dan definieert het bovenstaande stelsel twee rationale functies $x = x(s)$ en $y = y(s)$. Deze hebben de eigenschap dat

$$f(t) + x(s)g(t) + y(s) = (t-s)^2 h(t),$$

voor een zeker polynoom $h(t)$ met als coëfficiënten rationale functies in s. In deze gelijkheid de afgeleide nemen naar s levert dan een nieuw polynoom dat ook $t = s$ als nulpunt heeft. Een veelvoud van dat nieuwe polynoom bij de eerste optellen geeft

$$f(t) + (x(s) + \lambda x'(s))g(t) + y(s) + \lambda y'(s),$$

en die heeft voor elke λ een nulpunt $t = s$. Dus $(x(s), y(s)) + \lambda(x'(s), y'(s))$ ligt op de lijn in het vlak horend bij alle polynomen met nulpunt $t = s$.

Samenvattend: $s \mapsto (x(s), y(s))$ definieert de kromme in het vlak corresponderend met de polynomen met een dubbel nulpunt, en de raaklijn (bij gegeven, algemene, s) aan deze kromme is precies de lijn corresponderend met alle polynomen die $t = s$ als nulpunt hebben.

Een voorbeeld is dat van de overbekende kwadratische polynomen $t^2 + xt + y$. Hier geldt $x(s) = -2s$ en $y(s) = s^2$. Deze twee functies parametriseren een parabool P in het vlak. Uit het bovenstaande maken we op dat het aantal oplossingen van de vergelijking $t^2 + at + b = 0$ gelijk is aan het aantal lijnen door (a, b) die raken aan P. Dit voorbeeld is ook te vinden in een collegedictaat van Felix Klein uit 1908 [3].

Merk op, dat de methode ook werkt voor veeltermen van een veel hogere graad. In zijn voorwoord van de catalogus [2], legt Klein al in 1892 bovenstaande methode uit. Ook hij verwijst naar het artikel van Sylvester uit 1864 en

Illustratie: Stadsarchief Amsterdam

Figuur 4 Martin Monnickendam: Vergadering afdeling Wis- en Natuurkunde KNAW, 1900

daarnaast naar colleges van Kronecker. Aan het eind van zijn verhaal zegt Klein dat een analoge meetkundige behandeling van families $f(t)+xg(t)+yh(t)+z$ zonder nauwkeurige modellen vrijwel ondoenlijk is.

Dit is precies de taak die Schoute op zich neemt. Schoute kiest families van graad 3, 4 en 6 en wel zo, dat in elke familie alle mogelijkheden voor het totaal aantal reële nulpunten van een willekeurig polynoom van die graad, ook werkelijk voorkomen. Zijn modellen geven de punten (x,y,z) weer met de eigenschap dat het bijbehorende polynoom een dubbel nulpunt heeft. Deze vormen een oppervlak dat Schoute het *discriminantenoppervlak* van de gegeven familie veeltermen noemt. Verder beschrijft hij nauwkeurig de singulariteiten van de door hem bestudeerde discriminantenoppervlakken. In zijn KNAW-tekst merkt Schoute overigens op dat ook al in Dycks catalogus een tekst voorkomt waarin tekeningen van zulke oppervlakken worden gepresenteerd. Echter, uit niets blijkt dat de auteur ook echte modellen heeft gemaakt, en bovendien bevat de tekst minder uitleg dan Schoute wenselijk acht. Bijvoorbeeld: omdat voor algemene, vaste s het stelsel

$$\begin{cases} f(s)+xg(s)+yh(s)+z=0 \\ f'(s)+xg'(s)+yh'(s) \quad =0 \end{cases}$$

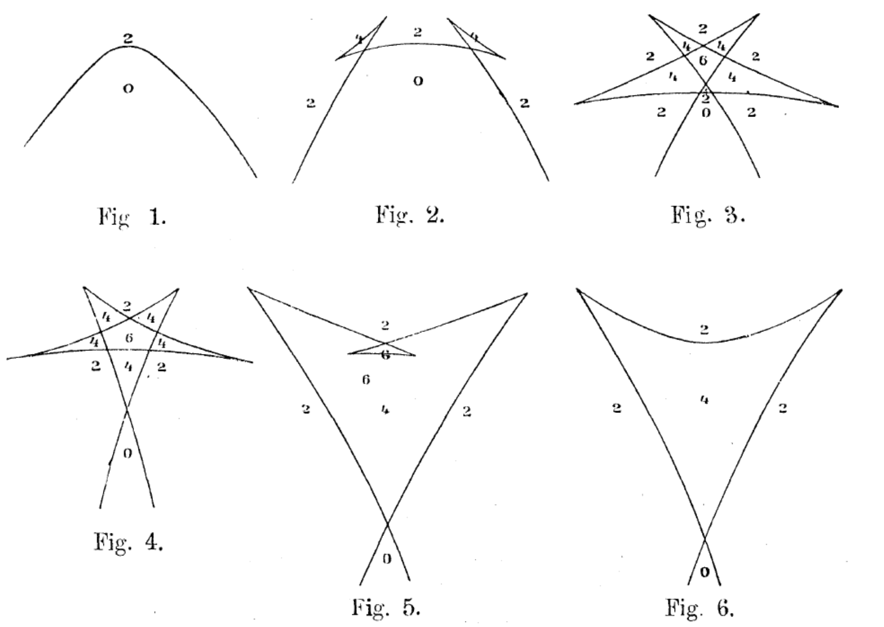
een lijn definieert, bestaat een discriminantenoppervlak vrijwel geheel uit een vereniging van allemaal rechte lijnen. Dat maakt ze heel geschikt om als draadmodel te worden weergegeven. Uit niets in de door Schoute genoemde tekst blijkt dat de auteur zich daarvan bewust was.

Deze auteur is Georg Kerschensteiner (1854–1932) die later als pedagoog beroemd zou worden, en die net als Schoute als reactie op Kleins inleiding ingaat op de vraag hoe zo'n discriminantenoppervlak er uit ziet. In Dycks catalogus [2, pp. 168–173] geeft Kerschensteiner gedetailleerde schetsen. Met name zijn tekening van de punten (x,y,z) met de eigenschap dat t^4+xt^2+yt+z een dubbel nulpunt heeft, is later door diverse anderen zonder veel veranderingen overgenomen. Bijvoorbeeld in Webers *Lehrbuch der Algebra* (1895) en ook in Kleins *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis* (Engelse vertaling uit 1932; de Duitse versie [3] stamt uit 1908).

Schoute probeert met Kerschensteiner in contact te komen, en zoals we eerder in deze tekst zagen is dat gelukt. Dit stimuleert Kerschensteiner om, net als Schoute, ook een draadmodel te maken. Schoute had al discriminanten van polynomen van graad $3, 4$, en 6 gedaan, dus Kerschensteiner besluit om naar graad 5 te kijken. Hij kiest daartoe de familie

$$t^5+xt^2+yt+z,$$

en in de Appendix van Dycks catalogus [2, pp. 23–25] publiceert hij een verslag hierover. Daarin staat onder meer dat het resulterende oppervlak er net zo uitziet als het oppervlak verkregen bij de veeltermen



Figuur 5 Schoutes dwarsdoorsneden van een discriminantenoppervlak. De getallen zijn het aantal reële nulpunten van de bijbehorende veeltermen.

t^3+xt^2+yt+z. Dat komt omdat de gebruikte familie geen veeltermen bevat die 5 reële nulpunten hebben. De door Schoute gekozen voorbeelden zijn in deze zin algemener: hij gebruikte t^3+xt^2+yt+z waarin zowel gevallen met precies één reëel nulpunt, als gevallen met drie reële nulpunten voorkomen. En in zijn voorbeeld t^4+xt^2+yt+z kan het totaal aantal reële nulpunten elk van de mogelijkheden $0, 2$ en 4 zijn. In Schoutes laatste voorbeeld,

$$t^6-15t^4+xt^2+yt+z,$$

komen $0, 2, 4$ en 6 voor voor dit aantal.

Schoute blijkt vooral geboeid door de optredende singulariteiten van de discriminantenoppervlakken. Hij bepaalt deze singulariteiten, en hij beschrijft en schetst niveaukrommen van de oppervlakken waardoor een goede indruk van hun aard wordt verkregen. Bijvoorbeeld voor de familie van zesdegraads veeltermen komt dit neer op, voor vaste $x=x_0$, de punten (y,z) in het vlak te tekenen waarvoor geldt dat

$$t^6-15t^4+x_0t^2+yt+z$$

een dubbel nulpunt heeft. Deze punten worden geparametriseerd door

$$\begin{aligned} y &= -6t^5+60t^3-2x_0, \\ z &= -yt-t^6+15t^4-x_0t^2 \\ &= 5t^6-45t^4-x_0t^2+2x_0t \end{aligned}$$

en Schoute tekent dit opvallend precies, voor zes verschillende waarden $x=x_0$, zie Figuur 5.

Precies 50 jaar na dit werk van Schoute verscheen het artikel van Hassler Whitney waarover recent in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* een artikel [9] verscheen. Schoutes voorbeelden passen hier naadloos in, maar helaas waren ze inmiddels vergeten.

Geen Schoute in Schilling

In navolging van L. Brill in de 19de eeuw, leverde de firma M. Schilling vanaf 1899 vele modellen van meetkundige figuren aan Europese en Amerikaanse universiteiten. In 1911 publiceerde Schilling de zevende editie van zijn catalogus waarin alle tot dusver door hem gefabriceerde modellen staan opgesomd [5]. De nieuwe catalogus geeft een onderverdeling van de modellen in 40 series waarvan een aantal nieuw is. Een van de nieuwe is Serie XXXIII, bestaande uit drie draadmodellen van discriminantenoppervlakken.

Ook Schoute maakte (19 jaar eerder) drie zulke modellen, dus het ligt een beetje voor de hand om te veronderstellen dat in Serie XXXIII de modellen van Schoute gereproduceerd zijn. Maar dat is niet het geval! Zie namelijk in Figuur 6 wat we hierover in de catalogus kunnen lezen. Geen Schoute dus, en ook al geen Kerschensteiner. Sterker nog, hun naam komt nergens in de nieuwe catalogus voor. De genoemde Roderich Hartenstein deed in het studiejaar 1905/06 staatsexamen onder begeleiding van Klein, en als onderwerp daarvoor koos hij de discriminantenoppervlakken. De twee modellen in Serie XXXIII die hij maakte, tonen beide het oppervlak bij de familie

$$t^4+xt^2+yt+z.$$

Er is een klein verschil met Schoutes model van hetzelfde voorbeeld: voor een willekeurige $b>0$ is $(t^2+b)^2$ een veelterm in de gegeven familie, en bovendien hebben deze veeltermen twee (niet-reële) dubbele nulpunten. Dit betekent dat de punten $(2b, 0, b^2)$ deel uitmaken van het discriminantenoppervlak, maar (voor $b>0$) terwijl door elk ander punt van het oppervlak een (reële) rechte lijn gaat die onderdeel van het oppervlak uitmaakt, is dat bij deze punten niet het geval. Dus in een draadmodel zijn ze niet zichtbaar.

Serie XXXIII.

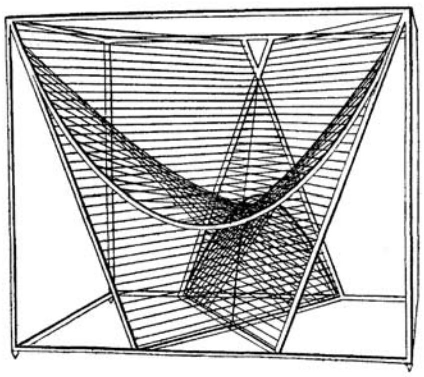
Drei Faden-Modelle der Discriminantenfläche der Gleichungen vierten und fünften Grades.

Nr. 1. **Modell der Discriminantenfläche der Gleichung fünften Grades in der Normalform** $u^5+10xu^3+5yu+z=0$. Auf Anregung von Professor *O. Bolza* ausgeführt im mathematischen Seminar der Universität Chicago von Fräulein Dr. *Mary Emily Sinclair* in Oberlin. (Grösse 26×26×21 cm.) Mark 48.—.

„ 2 und 3.* **Modelle der Discrimantenfläche der Gleichungen vierten Grades.** Auf Anregung von Geheimrat Professor Dr. *F. Klein* in Göttingen ausgeführt von *Roderich Hartenstein* in Göttingen, herausgegeben unter Mitwirkung von Professor Dr. *Fr. Schilling* in Danzig.

Nr. 2. (Grösse 31,5×31,5×27 cm.) Mark 66.—.
„ 3.* (Grösse 32,5×31×28 cm.) Mark 75.—.

Figuur 6 Beschrijving van Serie XXXIII in de zevende editie van de catalogus van Schilling [5]



Figuur 7 Hartensteins tweede model: oppervlak plus twee vlakken

Schoute beschrijft in zijn teksten deze punten wel, maar ze zijn niet te zien in zijn model. Hartenstein (en de firma Schilling) bevestigen een stukje koperdraad aan hun model zodat ook deze punten erin te vinden zijn. Het tweede model in Serie XXXIII van hetzelfde oppervlak illustreert een antwoord op de vraag hoe je bij gegeven getallen $a < b$, met behulp van het discriminantenoppervlak alle reële veeltermen t^4+xt^2+yt+z kan vinden met een gegeven aantal nulpunten in het interval $[a, b]$. Daarvoor zijn, behalve het oppervlak, de vlakken met vergelijking $a^4 + a^2x + ay + z = 0$ en ook met $b^4 + b^2x + by + z = 0$ nodig. Schillings catalogus bevat een tekening van het resultaat, zie Figuur 7.

Bij het resterende model in de Schilling serie staat de naam Oskar Bolza. Hij promoveerde in 1886 bij Klein, vertrok drie jaar later naar de Verenigde Staten, en werd in 1892 hoogleraar in Chicago. Als onderwerp voor haar masterscriptie gaf hij in 1902 aan Mary Emily Sinclair de vraag om het discriminantenoppervlak bij de familie

$$t^5 + xt^3 + yt + z$$

te beschrijven. Dit lijkt sterk op de familie die Kerschensteiner behandelde, maar er is een belangrijk verschil: in dit nieuwe voorbeeld komen *wel* alle gevallen $1, 3, 5$ voor het totale aantal reële nulpunten voor. Na haar promotie (ook bij Bolza) is Sinclair aan Oberlin College gaan werken. De bibliotheek van deze instelling bezit een origineel van haar masterscriptie, inclusief met kleurpotlood ingekleurde pentekeningen van haar oppervlak. Hoewel de scriptie naadloos past bij de artikelen van Schoute en van Kerschensteiner over hetzelfde onderwerp, refereert Sinclair niet naar hun werk.

In Schillings catalogus lezen we zowel bij de beschrijving van Hartensteins modellen als bij die van Sinclair: "Eine ausführliche Abhandlung wird beigefügt." Een zoektocht langs Nederlandse en Duitse universiteitsbibliotheken naar deze 'Abhandlung' bleef zonder succes, maar via een bekende Duitse antiquair in Albstadt is het gelukt de tekst van Hartenstein in ons bezit te krijgen. Het is een drukwerkje uit 1909 bestaande uit 19 pagina's. Op p. 15 staat de voetnoot: "Über frühere Darstellungen dieser Fläche vgl. G. Kerschensteiner, Geometrische Darstellung der Discriminanten der Gleichungen dritten und vierten Grades, Dyckscher Katalog, S. 168 ff.; P.H. Schoute, Drei Fadenmodelle von entwickelbaren Flächen, die mit algebraischen Gleichungen höheren Grades in Verbindung stehen, Dyckscher Katalog, Nachtrag (München 1893), S. 25 f."

De 'Abhandlung' van Sinclair bleek, evenals haar scriptie, aanwezig in Oberlin College, die ons bereidwillig een digitale kopie ervan toezond. De tekst bestaat uit 8 pagina's en is gedateerd mei 1908. Het werk van Kerschensteiner en van Schoute wordt ook hierin niet genoemd. De modellen uit Serie XXXIII zijn onder meer nog aanwezig in het Institut für Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg: hun prachtige collectie is ook online te vinden via http://did.mathematik.uni-halle.de/modell. Zie Figuur 8.

Figuur 8 Serie XXXIII Nr. 1: Sinclairs discriminantenoppervlak

De vraag waarom Serie XXXIII niet uit Schoutes modellen bestaat, heeft waarschijnlijk vooral als antwoord dat Schoute verder afstand van de hoofdrolspelers in Schillings series. Klein kende ongetwijfeld Schoutes artikel in Dycks catalogus, want zijn staatsexamenstudent Hartenstein verwijst ernaar. Ook Bolza wist waarschijnlijk van het werk van zowel Schoute als van Kerschensteiner, want het onderwerp dat hij Sinclair gaf voor haar masterscriptie sluit daar naadloos bij aan. Het zal Schoute, die als hoogleraar in Groningen honderden modellen uit de Schilling collectie heeft aangeschaft, zeker zijn opgevallen dat de tussen 1908 en 1911 gemaakte serie XXXIII dunnetjes overdeed wat hij al in 1893 had. De Groningse verzameling modellen bevat dan ook geen serie XXXIII. Met de drie modellen van Schoute zelf, was dat overbodig.

Referenties

1 Wieb Bosma, *Wiskundige verpoozingen*, NAW 5/10 nr. 1 maart 2009, 42–47.

2 Walther von Dyck, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. München: C. Wolf & Sohn, 1892 and 1893. (De oorspronkelijke catalogus uit 1892 bestaat uit 430 bladzijden; het supplement (Nachtrag) uit 1893 voegt hier 135 bladzijden aan toe.)

3 Felix Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907-08, ausgearbeitet von E. Hellinger. Leipzig: B.G. Teubner, 1908.

4 Irene Polo-Blanco, Theory and History of Geometric Models. Proefschrift, Groningen: 2007.

5 Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht. Siebente Auflage. Leipzig: Martin Schilling, 1911.

6 P.H. Schoute, *Drie draadmodellen van ontwikkelbare oppervlakken, die met hoogeremachtsvergelijkingen in verband staan*, pp. 8–12 in: Verslagen der Zittingen van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, van 27 mei 1893 tot 21 april 1894. Amsterdam: Johannes Müller, 1894.

7 P.H. Schoute, *Drei Fadenmodelle von entwickelbaren Flächen, die mit algebraischen Gleichungen höheren Grades in Verbindung stehen*, pp. 25–28 in de 'Nachtrag' van [2].

8 J.J. Sylvester, *Algebraical Researches, Containing a Disquisition on Newton's Rule for the Discovery of Imaginary Roots, and an Allied Rule Applicable to a Particular Class of Equations, Together with a Complete Invariantive Determination of the Character of the Roots of the General Equation of the Fifth Degree, et cetera*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, **154** (1864), 579–666.

9 Ferdinand Verhulst en Oleg Kirillov, *Bottema opende Whitney's paraplu*, NAW 5/10 nr. 4 december 2009, 250–254.