Ulrich Abel
Fachbereich MND
Technische Hochschule Mittelhessen
Wilhelm-Leuschner-Straße 13
61169 Friedberg, Germany
ulrich.abel@mnd.th-mittelhessen.de

Paul L. Butzer
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH Aachen University
52056 Aachen, Germany
Butzer@rwth-aachen.de

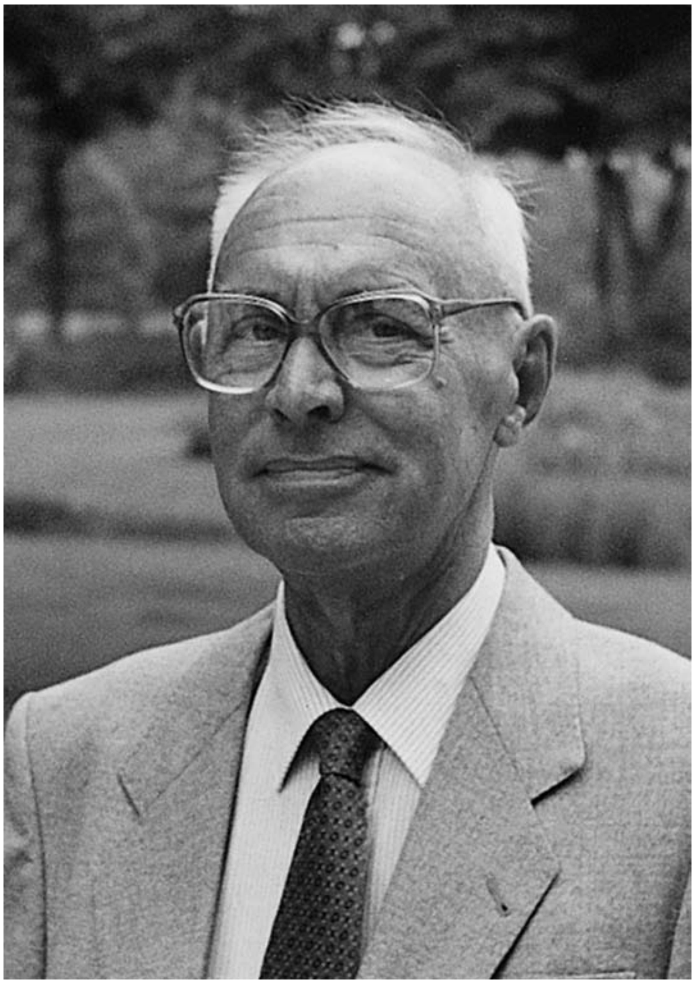
Frans Schurer
Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
f.schurer@tue.nl

Biografie

Over leven en werk van P.C. Sikkema (1919–1998)

In dit levensbericht van P.C. Sikkema schetsen Ulrich Abel, Paul L. Butzer en Frans Schurer zijn loopbaan en wetenschappelijk onderzoek. Sikkema heeft in Groningen gewerkt aan differentiaaloperatoren en differentiaalvergelijkingen, en vervolgens in Delft aan approximatietheorie. In dit artikel is een representatieve selectie van zijn publicaties te vinden, aangevuld met enige verwante literatuur.

Pieter Cornelis (Piet) Sikkema werd op 4 november 1919 geboren in Oudeschip, in het uiterste noorden van de provincie Groningen. Van 1932–1937 volgt hij onderwijs aan de Rijks Hogere Burgerschool in Appingedam. Na het behalen van het hbs-B diploma gaat hij wis- en natuurkunde studeren aan de Rijksuniversiteit Groningen (RUG). Vanaf eind augustus 1939 tot begin juni 1940 is hij in militaire dienst en tijdens WO II duikt hij een aantal jaren onder op de afgelegen boerderij van zijn ouders. In 1945 wordt dan, in aanmerking genomen de onderbrekingen van de studie, toch nog vrij snel het doctoraalexamen behaald. Vanaf het begin van 1947 is hij assistent bij de wis- en natuurkundefaculteit van de RUG. De staf van het mathematisch instituut was toentertijd zeer beperkt in omvang: drie gewone hoogleraren, J.C.H. Gerretsen (1907–1983) met leeropdracht de hogere meetkunde, de theorie der algebraïsche structuren en de topologie, C.S. Meijer (1904–1974) die de infinitesimaalrekening, in het bijzonder functietheorie en differentiaalvergelijkingen onderwees, en J. Ridder (1894–1977) die belast was met de grondslagen van de wiskunde en de analyse, in het bijzonder de maattheorie en haar toepassingen. Verder was L.J. Smid (1901–1976) bijzonder hoogleraar in de mathematische statistiek. De behuizing van het instituut bestond uit twee kamers, een voor Gerretsen die hoogleraar-directeur was, en een waarin de bibliotheek was ondergebracht en waar ook Sikkema was gehuisvest. Meijer, bekend geworden vanwege zijn werk over de zogenaamde G-functie, was Sikkema's promotor. De promotie vindt plaats op 3 juli 1953 en de dissertatie verkrijgt, evenals het doctoraalexamen, het predicaat cum laude. Uit het lijvige proefschrift is een aantal artikelen voortgekomen (zie [2]), gepubliceerd in de Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (Serie A daarvan wordt ook wel aangegeven met *Indagationes Mathematicae*; in de in dit artikel opgenomen literatuurverwijzingen wordt dat ook gedaan) en aangeboden door J.F. Koksma (1904–1964). In het najaar van 1955 laat deze Sikkema op subtiele wijze weten dat het aanbeveling verdient eventuele volgende bijdragen compacter te schrijven ("Tenslotte kan men in de Proceedings niet dezelfde breedheid betrachten als in een dissertatie"). Sikkema had het allengs op het instituut niet meer naar zijn zin. Hij kreeg van de hoogleraren Gerretsen en Meijer naar zijn mening te weinig armslag, was belast met allerlei werk van laag niveau, en had onvoldoende tijd voor wetenschappelijk onderzoek. Beklag daarover bij Meijer sorteert geen effect en toen ook een verzoek om een keuzecollege over differentievergelijkingen te mogen geven, werd afgewezen, was de maat vol. In het begin van het studiejaar 1957–1958 gaat hij dan ook, op uitnodiging van de hoogleraren F. Loonstra (1910–1989) en R. Timman (1917–1975), als wetenschappelijk medewerker naar de Onderafdeling der Wiskunde van de Technische Hogeschool Delft (THD). Het eind van de jaren vijftig en ook de jaren zestig waren voor het technisch wetenschappelijk onderwijs gouden tijden: in 1956 werd de Technische Hogeschool Eindhoven opgericht en in 1961 die in Twente, de omvang van het service onderwijs in de wiskunde nam sterk toe en bijgevolg de grootte van de staven in de wiskunde. Talrijke nieuwe lectoraten en ordinariaten werden ingesteld. Sikkema profiteert daar ook van. Met ingang van 1 januari 1960 wordt hij benoemd tot lector — differentievergelijkingen is het onderwerp van de openbare les — en in 1963 volgt zijn benoeming tot gewoon hoogleraar aan de THD om, zoals de formulering toen luidde, onderwijs te geven in de zuivere en toegepaste wiskunde en de mechanica. Voor zijn oratie zij verwezen naar [9]. Ridders felicitatie ("Het vreemdsoortig optreden van Groningse mathematici tegenover u is hiermee gelogenstraft"; Ridder rekent zich dat zelf kennelijk niet aan en er is goede reden aan te nemen dat hij daaraan ook geen deel had.) zal hem goed hebben gedaan. Was het onderzoek in Groningen gewijd aan differentiaaloperatoren en differentiaalvergelijkingen van oneindig hoge orde en aanverwante onderwerpen, in Delft komt approximatietheorie daarvoor in de plaats. Op dat terrein is hij vanaf 1958 actief en succesvol geweest. Hij boekt een aantal interessante resultaten, met noeste vlijt verkregen; hij haalde graag het motto van het Wiskundig Genootschap aan: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Verder begeleidt hij een betrekkelijk groot aantal afstudeerders (opmerkelijk omdat approximatietheorie en functionaalanalyse niet tot de 'corebusiness' van de Delftse opleiding tot wiskundig ingenieur behoorden), treedt als promotor op van een vijftal promovendi: F. Schurer (1965), P. van der Steen (1968), R.K.S. Rathore (1974), R. Martini (1975), J.A.H. Alkemade (1984) en is referent en lid van de examencommissie van het Habilitationsschrift van R.L. Stens, Aken (1984). Sikkema voelde zich in Delft aanzienlijk beter op zijn plaats dan in Groningen; daaraan zal niet vreemd geweest zijn dat hij daar hoogleraar was, en dat wilde hij weten ook. Hij was het prototype van de 'oude' hoogleraar, had weinig op met inspraak en de democratisering van het wetenschappelijk onderwijs, en de toegenomen invloed op het beleid inzake onderwijs en onderzoek van de overige medewerkers van de faculteit was hem een gruwel. Misschien meer nog dan een onderzoeker, was Sikkema een geboren docent; zijn colleges waren voortreffelijk voorbereid en werden uitstekend, met grote precisie, gegeven. Dat gold ook voor zijn talrijke voordrachten op buitenlandse congressen en conferenties. Uit een brief (1980) van E.W. Cheney (door sommigen wel eens, ietwat vilein, aangeduid als 'the smoothest operator in approximation theory' en redacteur van het prestigieuze tijdschrift *Journal of Approximation Theory*): "It was a great pleasure to see you in Austin and to hear your lecture. It was a model of clarity and superbly delivered!" Hij is in Delft gebleven tot zijn emeritaat. Van zijn werkzaamheden op het gebied van de approximatietheorie heeft hij uitvoerig verslag gedaan in het op 6 november 1984 gegeven afscheidscollege; zie [28]. Een meer inhoudelijke bespreking van zijn wetenschappelijk werk is te vinden in [29]. Na zijn emeritaat is Sikkema nauwelijks meer actief geweest in wetenschappelijk onderzoek. Reeds in 1985 had hij te kampen met een terugslag in zijn gezondheid. Halverwege de jaren negentig wordt hij getroffen door een herseninfarct waarvan hij niet meer is hersteld; op 31 juli 1998 overlijdt hij in Den Haag in Huize 'Bosch en Duin' op 78-jarige leeftijd.


P.C. Sikkema

De Groningse periode: differentiaaloperatoren en -vergelijkingen

Sikkema's proefschrift [1] gaat over differentiaaloperatoren van oneindig hoge orde met constante coëfficiënten, toegepast op gehele functies. Zulke operatoren zien er uit als $\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n$ waarbij D differentiatie voorstelt en de a_n's complex zijn. Een gehele functie is een functie die analytisch is in het gehele complexe vlak $\mathbb{C}$. Als f geheel is en niet de nulfunctie, dan is met

$$M(r) := \max\{|f(z)|\,;\,|z| = r\} \quad (r \geq 0)$$

de grootheid

$$\rho := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

de orde van f. Als $\rho < \infty$ dan heet f van eindige orde; ρ is dus een maat voor de aangroei van f. Daarnaast speelt voor het geval $0 < \rho < \infty$ ook de grootheid

$$\sigma := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\rho}}$$

een rol, die nog nauwkeuriger informatie geeft over het gedrag van f; σ heet het type van f. Aan de Taylorcoëfficiënten van f valt te zien hoe het met de orde en type van f is gesteld. We noemen alleen het geval dat $0 < \sigma, \rho < \infty$. Dan is $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ van de orde ρ en het type σ dan en alleen dan als

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{(n!)^{1/\rho}\,|x_n|\right\}^{1/n} = (\rho\sigma)^{1/\rho}.$$

De verzameling van gehele functies van orde ρ en type σ geven we aan met $E(\rho,\sigma)$.

Het onderzoek in [1] houdt zich met de volgende vragen bezig:

1. Welke differentiaaloperatoren zijn toepasbaar op alle gehele functies van een bepaalde soort? Toepasbaarheid van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n$ op de gehele functie f wordt daarbij opgevat als het convergeren van $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.
2. Hoe zien de beeldfuncties er uit?
3. Wanneer zijn vergelijkingen $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n\right) f = g$ oplosbaar?

Eerder werden deze vragen behandeld door Muggli [41] in 1938, die daarbij vooral integraalvoorstellingen gebruikt. Vergeleken met het werk van Sikkema gaat het daar over beperktere klassen van functies.

In [1] wordt een volledig antwoord op vraag 1 gegeven voor functies van de klasse $E(\rho,\sigma)$. In het geval $0 < \sigma, \rho < \infty$ blijkt dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n$ toepasbaar is op alle functies van $E(\rho,\sigma)$ dan en alleen dan als

$$\limsup_{n\to\infty} \left\{(n!)^{1-1/\rho}\,|a_n|\right\}^{1/n} < (\rho\sigma)^{-1/\rho}.$$

De beeldfunctie blijkt in zo'n geval ook weer geheel te zijn. In het

Links: Sikkema en Frans Schurer tijdens de receptie van Schurers openbare les aan de TU/e op 7 maart 1969; midden: Paul Butzer, tijdens de workshop ter ere van de 60ste verjaardag van professor Rupert Lasser in München, 2008; rechts: Samen met Manfred W. Müller (1936–2006) in Varna (1981)

vervolg veronderstellen we van de differentiaaloperatoren dat ze toepasbaar zijn op de klasse $E(\rho,\sigma)$ waarvan sprake is.

Wat vraag 2 betreft is het antwoord minder volledig. Het blijkt dat als $\rho > 1$ de beeldfunctie geheel is van de orde hooguit ρ. Maar het type van het beeld kan hoger zijn dan dat van het origineel. Als $\rho < 1$ en de a_n's niet allemaal nul zijn, blijken de beelden van functies in $E(\rho,\sigma)$ weer in $E(\rho,\sigma)$ te liggen. In het geval $\rho = 1$ blijken de nulpunten van de genererende functie $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ een rol te spelen. Net zoals in het geval van gewone differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten geeft elk nulpunt van F aanleiding tot een exponentiële functie als oplossing van de homogene vergelijking, die zonder meer bij elk origineel kan worden opgeteld zonder het beeld te beïnvloeden.

Vraag 3 wordt beantwoord voor het geval $\rho \leq 1$. Het blijkt dat als $\rho < 1$ en $a_0 \neq 0$ de vergelijking $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n\right) f = g$ voor elke $g \in E(\rho,\sigma)$ precies één oplossing in $E(\rho,\sigma)$ heeft. In het geval $\rho = 1$ is er ook altijd een oplossing, maar die hoeft niet eenduidig te zijn wegens de mogelijke nulpunten van de genererende functie.

Het voorgaande impliceert dat nauwkeurige schattingen vereist zijn. Het beantwoorden van vraag 3 vraagt bovendien het oplossen van oneindige stelsels lineaire vergelijkingen. Deze stelsels ontstaan door in de differentiaalvergelijking machtreeksen te substitueren, dan formeel uit te vermenigvuldigen en ten slotte links en rechts coëfficiënten van gelijke machten van z gelijk te stellen. Deze stelsels worden gemanipuleerd totdat ze de bovendriehoeksvorm hebben waarin de diagonaalelementen overheersen. Er wordt dan een resultaat van von Koch [35] uit 1913 gebruikt om uitspraken te doen over de oplossingen.

Opgemerkt zij dat de door Sikkema gehanteerde methode van aanpak klassiek is, i.e. niet gebruik maakt van functionaalanalyse; het onderwijs in de wiskunde aan de RUG zal daar mede debet aan zijn geweest.

Het proefschrift [46] van Van der Steen bouwt op [1] voort. Daar is de functionaalanalyse wel prominent aanwezig, hetgeen er toe leidt dat problemen en resultaten compacter kunnen worden geformuleerd.

De artikelen [2] behelzen onderzoek dat een voortzetting is van dat in [1]. Het gaat dan vooral om het geval $\rho > 1$. Met behulp van vaak dezelfde methoden wordt in [3], [4] en [5] ingegaan op vragen over recursiebetrekkingen en differentievergelijkingen.

Foto: Universiteitsmuseum Groningen

C. S. Meijer, de promotor van Sikkema

De Delftse periode: approximatietheorie

Zoals in de inleiding is vermeld, gaat Sikkema in 1957 van Groningen naar Delft. Dat is een gerede aanleiding om ook van onderzoeksveld te veranderen. De keuze valt op approximatietheorie. Drie boeken, alle verschenen in de periode 1953–1959, hebben daarbij een doorslaggevende rol gespeeld: de aantrekkelijke monografie [37] van Lorentz over Bernsteinpolynomen, het meesterlijk geschreven standaardwerk [42] van Natanson getiteld *Konstruktive Funktionentheorie* en het elegante Russische boekje [36] van Korovkin over lineaire operatoren en approximatietheorie. Laatstgenoemde publicatie was voor Sikkema aanleiding zich een grondige kennis van wiskunde-Russisch te verwerven, belangrijk omdat hij in een vroeg stadium in Russische tijdschriften verschenen artikelen, voortbouwend op Korovkins werk, kon lezen. Immers, vertalingen daarvan, bijvoorbeeld in *Soviet Mathematics Doklady* van de *Doklady Akademii Nauk SSSR*, kwamen in het algemeen pas geruime tijd later ter beschikking. Het is de verdienste van Sikkema geweest dat hij dit onderdeel van de approximatietheorie, i.e. het benaderen van functies met rijen lineaire positieve operatoren (l.p.o.) en het onderzoek van de graad van approximatie daarvan, in Nederland heeft geïntroduceerd en aan de ontwikkeling ervan heeft bijgedragen; zie de bibliografie.

Graad van approximatie en continuïteitsmoduli; beste constanten

Een continue functie op $[0,1]$ kan willekeurig dicht benaderd worden met polynomen; dat is de inhoud van de beroemde approximatiestelling van Weierstrass (1885). Bernstein gaf in 1912 een elegant bewijs daarvan met behulp van het aan f toegevoegde n-de Bernsteinpolynoom

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Merk op dat B_n niet alleen een lineaire, maar ook een *positieve* operator is, dat wil zeggen $f \geq 0$ op $[0,1]$ impliceert $B_n f \geq 0$ op $[0,1]$. Het is betrekkelijk eenvoudig na te gaan dat op $[0,1]$ geldt

$$\begin{aligned} (B_n 1)(x) &= 1, \qquad (B_n t)(x) = x, \\ \left(B_n t^2\right)(x) &= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Met behulp van deze resultaten kan een ander bewijs van 'Weierstrass' worden verkregen door een beroep te doen op een stelling van Korovkin [36 , p. 14]. De snelheid waarmee $||B_n f - f||$, gedefinieerd als $\max_{0 \leq x \leq 1} |(B_n f)(x) - f(x)|$, naar nul gaat als $n \to \infty$, de graad van approximatie, wordt vaak gemeten met de continuïteitsmodulus ω van f:

$$\omega(f;\delta) := \sup_{\substack{x_1, x_2 \in [0,1] \\ |x_1 - x_2| \leq \delta}} |f(x_1) - f(x_2)| \qquad (\delta > 0).$$

Lorentz [37, p. 20] bewees, een resultaat van Popoviciu [43] verscherpend, dat voor alle $f \in C[0,1]$ en alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$||B_n f - f|| \leq \frac{5}{4} \omega\left(f; n^{-1/2}\right). \tag{2}$$

Kan de constante $5/4$ in (2) verder verscherpt worden? Beschouw daartoe voor vaste $n \in \mathbb{N}$ en voor niet-constante functies f,

$$c_n := \sup_{f \in C[0,1]} \frac{||B_n f - f||}{\omega(f; n^{-1/2})}.$$

In [8] wordt de beste constante $\kappa := \sup_{n \in \mathbb{N}} c_n$ in het rechterlid van (2) bepaald, nadat daartoe in [7] een aanzet is gegeven. Er geldt

$$\kappa = c_6 = \frac{4306 + 837\sqrt{6}}{5832} \approx 1.089887;$$

dit is, met zijn stelling over asymptotische approximatieformules in de volgende subsectie, een van Sikkema's bekendste resultaten.

Een verwant probleem betreft de berekening van $\mu := \limsup_{n \to \infty} c_n$. De van Popoviciu [43] afkomstige ongelijkheid $\mu \leq 1 + (2\pi)^{-1/2} \approx 1.3989$ wordt in [7] verscherpt tot $\mu \leq 1 + e^{-2}(2\pi)^{-1/2} \approx 1.05399$; de exacte waarde van μ, bepaald door Esseen [33], wijkt daar minder dan 0.01 van af. In *Mathematical Reviews* 22 (1961) toont Favard — vooraanstaand wiskundige — zich onder de indruk van [7]: "Travail intéressant, démonstrations ingénieuses." Nadien zijn over dit soort onderzoek — de graad van approximatie met allerlei rijen l.p.o., de bepaling van beste constanten in ongelijkheden waarbij de continuïteitsmodulus van (een afgeleide van) f optreedt — talrijke artikelen verschenen, en ook Sikkema heeft, soms samen met anderen, daar intensief aan bijgedragen. Aan [16] ontlenen wij het volgende resultaat dat representatief is voor hetgeen zojuist in globale zin is aangegeven. Voor alle $f \in C[0,1]$, alle $x \in [0,1]$ en alle $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$|(B_n f)(x) - f(x)| \leq c_n(x) \cdot \omega\left(f; n^{-1}\right) \tag{3}$$

Barakken van de THD waar Sikkema eind jaren vijftig onderwijs heeft gegeven

waarbij

$$c_n(x) = \frac{1}{2} x(1-x) + \frac{1}{2n} \alpha(1-\alpha) \qquad (\alpha = nx - \lfloor nx \rfloor);$$

met $\lfloor nx \rfloor$ wordt het grootste gehele getal $\leq nx$ aangegeven.

Bovendien zijn de $c_n(x)$ in (3) beste 'constanten'. In [18] worden generalisaties van (3) afgeleid voor een algemene klasse van l.p.o., waarbij in het rechterlid van (3) de continuïteitsmodulus van de hoogste afgeleide van f optreedt. De resultaten van [18] worden in [23] toegepast op een aantal bekende l.p.o., onder andere die van Baskakov en van Szász-Mirakjan.

Asymptotische approximatieformules

Ongelijkheid (2) geeft, bij vaste $n \in \mathbb{N}$, een schatting voor $||B_n f - f||$, heeft dus betrekking op het gehele interval $[0,1]$. Een andere maat voor de graad van approximatie is de snelheid waarmee $(B_n f)(x)$ tot $f(x)$ nadert als $n \to \infty$ in een *vast* punt $x \in [0,1]$. Dat geeft aanleiding tot asymptotische approximatieformules (die dus lokaal van aard zijn). Klassiek is het volgende resultaat van Voronovskaya [48] uit 1932. Als f begrensd is op $[0,1]$ en in het vaste punt $x \in [0,1]$ een tweede afgeleide heeft, dan geldt, als $n \to \infty$,

$$(B_n f)(x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{2n} f''(x) + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4}$$

Soortgelijke asymptotische relaties zijn nadien afgeleid voor andere rijen l.p.o. die in de approximatietheorie een prominente rol spelen. Het ligt voor de hand het onderzoek naar dergelijke formules te generaliseren. Dat kan enerzijds door te veronderstellen dat $f^{(2k)}(x)$ $(k > 1)$ bestaat in het vaste punt x. Een voorbeeld hiervan is te vinden in Lorentz [37, p. 23] voor de B_n-operatoren. Anderzijds kan men ook een algemene klasse van l.p.o. beschouwen waarvan bekende rijen l.p.o. een speciaal geval zijn, zonder extra eisen aan f te stellen ten aanzien van differentieerbaarheid in het vaste punt x; de stelling van Mamedov [39] is hiervan een voorbeeld. De beide genoemde aspecten komen aan de orde in de volgende, veel geciteerde, stelling ([13, p. 330]; zie ook [12 , p. 54, 55]). Voor een even getal q met $q \geq 2$ wordt

Lorenzenhof, het oude Oberwolfach instituut, waar Sikkema een aantal 'Tagungen" heeft bijgewoond

met $H_x^{(q)}$ de klasse van reële functies f op $\mathbb{R}$ aangegeven met de volgende eigenschappen: (1) $f^{(q)}(x)$ bestaat; (2) f is begrensd op elk eindig interval van $\mathbb{R}$; (3) $f(t) = O(|t|^q)$ als $|t| \to \infty$. Zij $\{L_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ een rij van l.p.o. met $L_n : H_x^{(q)} \to C[a,b]$ $(a \le x \le b)$. Definieer $\psi_x(t) := t - x$ en neem aan dat de operatoren L_n eveneens toepasbaar zijn op ψ_x^{q+1} en ψ_x^{q+2}, en dat, voor $r = 0, 1, \ldots, q+2$, voldaan is aan de groeivoorwaarde

$$(L_n \psi_x^r)(x) = O\left(n^{-\lfloor (r+1)/2 \rfloor}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Dan geldt, als $n \to \infty$,

$$(L_n f)(x) = \sum_{r=0}^{q} \frac{f^{(r)}(x)}{r!} (L_n \psi_x^r)(x) + O\left(n^{-q/2}\right). \tag{5}$$

De bepaling van een asymptotische approximatieformule voor een rij l.p.o. waarop deze stelling van toepassing is, komt dus neer op de berekening van $(L_n \psi_x^r)(x)$ voor $r = 0, 1, \ldots, q$. In het geval $q = 2$ en de B_n-operatoren volgt het gevraagde direct uit (1); in het bijzonder geldt $\left(B_n \psi_x^2\right)(x) = x(1-x)/n$. Substitutie in (5) geeft (4).

Een andere toepassing van (5) betreft de l.p.o. van Meyer-König en Zeller [40] in de gemodificeerde vorm van Cheney en Sharma [32]

$$(M_n f)(x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{k} x^k f\left(\frac{k}{k+n}\right),$$

met $x \in [0,1)$ en $(M_n f)(1) = f(1)$.

Over deze l.p.o. bestaat uitvoerige literatuur. Onder de veronderstelling dat f in het vaste punt $x \in [0,1]$ oneindig vaak differentieerbaar is, kan worden aangetoond dat er een volledige asymptotische ontwikkeling is aan te geven van de vorm

$$(M_n f)(x) \sim f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f;x)\, n^{-k} \qquad (n \to \infty). \tag{6}$$

De berekening van $(M_n \psi_x^r)(x)$ blijkt voor $r \ge 2$ een tijdrovende en moeizame affaire te zijn. Als $f''(x)$ bestaat, dan geldt volgens Lupaş en Müller [38] de Voronovskaya-relatie

$$(M_n f)(x) - f(x) = \frac{x(1-x)^2}{2n} f''(x) + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty).$$

In [14] wordt, via omvangrijk rekenwerk, de coëfficiënt $a_2(f;x)$ in (6) bepaald. Uiteindelijk is het Abel [30], [31] gelukt expliciete uitdrukkingen te vinden voor alle $a_k(f;x)$ in termen van Stirling getallen van de eerste en tweede soort.

Convolutie operatoren

Zoals uit de twee voorafgaande subsecties blijkt, is het onderzoek naar de graad van approximatie van rijen l.p.o. de rode draad in Sikkema's artikelen over approximatietheorie. Dat is ook het geval met zijn studie op het terrein van convolutie operatoren, waaraan hij vanaf omstreeks 1977 tot aan zijn emeritaat heeft gewerkt. Dat heeft geresulteerd in een twaalftal publicaties. De helft daarvan maakt deel uit van proceedings van internationale congressen (Austin, Blagoevgrad, College Station, Edmonton, Oberwolfach en Varna). De l.p.o. waarvan in deze subsectie sprake is hebben de vorm

$$(U_\rho f)(x) = I_\rho^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, \beta^\rho(t)\, dt \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{7}$$

De niet-negatieve functie β, gedefinieerd op $\mathbb{R}$, is continu in een omgeving van $t = 0$, $\beta(0) = 1$, en heeft de eigenschap dat $\sup_{|t|\geq\delta} \beta(t) < 1$ voor alle $\delta > 0$. Als bovendien wordt verondersteld dat $\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{p+1} \beta^{\rho_0}(t)\, dt < \infty$ voor zekere $\rho_0 > 0$ en p niet-negatief en geheel, dan bestaat $I_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^\rho(t)\, dt$ voor alle $\rho \geq \rho_0$. Er volgt $(U_\rho 1)(x) = 1$ en tevens dat de operatoren (7) toepasbaar zijn op alle reële functies f op $\mathbb{R}$, waarvan wordt verondersteld dat de p-afgeleide bestaat en uniform continu is op $\mathbb{R}$; deze klasse wordt aangegeven met UC^p.

In [20], met [19] een van zijn belangrijkste artikelen over dit onderwerp, wordt bewezen dat, als $x \in \mathbb{R}$ voor elke $f \in UC^p$ geldt $(U_\rho f)(x) - f(x) \to 0$ als $\rho \to \infty$. Vervolgens wordt, gebruikmakend van een fundamenteel resultaat uit [18], uitvoerig aandacht besteed aan de snelheid waarmee dat gebeurt. Neem het bijzondere geval $p = 0$. Dan geldt voor alle $f \in UC^0$ en voor alle $\delta > 0$ de ongelijkheid

$$\|U_\rho f - f\| \leq A_\rho(\delta) \cdot \omega(f;\delta) \qquad (\rho \geq \rho_0) \tag{8}$$

met

$$A_\rho(\delta) = 1 + I_\rho^{-1} \int_{|t|\geq\delta} \left\lfloor |t|\, \delta^{-1} \right\rfloor \beta^\rho(t)\, dt.$$

(In het linkerlid staat het supremum van $|(U_\rho f)(x) - f(x)|$ over $\mathbb{R}$; vergelijk deze notatie met die in de eerste subsectie.) De coëfficiënt $A_\rho(\delta)$ in het rechterlid van (8) kan niet verscherpt worden, dat wil zeggen voor alle $x \in \mathbb{R}$ en alle niet-constante functies $f \in UC^0$ geldt

$$\sup_{f \in UC^0} \frac{|(U_\rho f)(x) - f(x)|}{\omega(f;\delta)} = A_\rho(\delta) \qquad (\rho \geq \rho_0).$$

De keuze $\beta(t) = e^{-|t|}$ genereert de operatoren van Picard. In dit geval kan dan voor ρ_0 een willekeurig positief getal worden gekozen. Met $\delta = \rho^{-1}$ volgt na enig rekenwerk (zie [17, p. 302])

$$A_\rho\left(\rho^{-1}\right) = 1 + \frac{1}{2}\rho \int_{|t|\geq\rho^{-1}} \lfloor |t|\,\rho \rfloor\, e^{-\rho|t|} dt = e(e-1)^{-1},$$

een interessant resultaat, omdat de beste constante in (8) voor de operatoren van Picard bij deze keuze van δ *onafhankelijk* is van ρ.

Het hoofdthema van [19] betreft de afleiding van asymptotische approximatieformules. Daartoe dienen aan β additionele voorwaarden te worden opgelegd die het gedrag rond $t = 0$ beschrijven. In genoemd artikel wordt uitgegaan van

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 - c_1 t^{\alpha_1} + o\left(t^{\alpha_1}\right) & (t \to 0+), \\ 1 - c_2 |t|^{\alpha_2} + o\left(|t|^{\alpha_2}\right) & (t \to 0-) \end{cases} \tag{9}$$

met gegeven positieve coëfficiënten c_i, α_i $(i = 1, 2)$. Onder de veronderstelling dat f in het vaste punt x een tweede afgeleide heeft, worden asymptotische relaties van het type Voronovskaya afgeleid van de vorm

$$\rho^\gamma \left\{(U_\rho f)(x) - f(x)\right\} \sim a_1 f'(x) + a_2 f''(x) \qquad (\rho \to \infty).$$

Teneinde de exponent γ en de coëfficiënten a_1, a_2 te bepalen, dienen vier verschillende gevallen te worden onderscheiden in (9) : (i) $\alpha_1 > \alpha_2$, (ii) $\alpha_1 < \alpha_2$, (iii) $\alpha_1 = \alpha_2$, $c_1 \neq c_2$, (iv) $\alpha_1 = \alpha_2$, $c_1 = c_2$. De verkregen resultaten worden toegepast op een aantal bekende l.p.o., waaronder die van Weierstrass $\left(\beta(t) = e^{-t^2}\right)$ en die van Landau $\left(\beta(t) = 1 - t^2\ (|t| \leq 1),\ \beta(t) = 0\ (|t| > 1)\right)$.

In Sikkema's laatste artikelen worden soortgelijke problemen beschouwd voor andere keuzes van het gedrag van β rond $t = 0$. Afhankelijk hiervan is de asymptotische approximatie soms langzaam (zie [22]), soms snel (zie [24]). De verkregen betrekkingen zijn gecompliceerd en vergen veel rekenwerk. In het algemeen kan gesteld worden

Destijds was de Onderafdeling der Wiskunde van de THD gehuisvest in het Hoofdgebouw aan de Julianalaan dat, in tegenstelling tot zijn werk vóór 1977, Sikkema's research over convolutie operatoren tot weinig vervolgonderzoek aanleiding heeft gegeven.

Dankwoord

De sectie over de Groningse periode is, tijdens zijn ziekte, geschreven door Pleun van der Steen (1939–2010); wij zijn hem daarvoor bijzonder erkentelijk. Gegevens omtrent het mathematisch instituut in Groningen in de tijd dat Sikkema daar studeerde, werden ons verstrekt door Boele Braaksma, alumnus van de RUG. Hij en Fred Steutel (Technische Universiteit Eindhoven) waren zo welwillend concepten van dit artikel te lezen, hetgeen resulteerde in een aantal waardevolle opmerkingen.

Bibliografie en Verwante literatuur

1 Differential operators and differential equations of infinite order with constant coefficients. Researches in connection with integral functions of finite order, Proefschrift, P. Noordhoff, Groningen, 1953.

2 Function-theoretic researches on differential operators of infinite order I, II, III, IV, Indag. Math. 56 (1953), 465–477; 57 (1954), 176–187, 280–291, 292–305.

3 On linear recursion formulae, Indag. Math. 58 (1955), 596–607.

4 A generalization of Nörlund's theory of principal solutions of linear difference equations I, II, Indag. Math. 58 (1955), 608–620; 59 (1956), 83–94.

5 On sum-equations I, II, Indag. Math. 59 (1956), 411–421, 422–425.

6 Conditions for applicability of linear differential operators of infinite order with polynomial coefficients, Indag. Math. 59 (1956), 181–189.

7 Über den Grad der Approximation mit Bernstein-Polynomen, Numer. Math. 1 (1959), 221–239.

8 Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen, Numer. Math. 3 (1961), 107–116.

9 Exact en niet exact in de wiskunde, Oratie, Technische Hogeschool Delft, Waltman, Delft, 1963.

10 Über Potenzen von verallgemeinerten Bernstein-Operatoren, Mathematica, Cluj 8 (31) (1966), 173–180.

11 Determination of a class of best constants in the approximation by powers of generalized Bernstein operators, Indag. Math. 71 (1968), 336–352; samen met H. van Iperen.

12 On some research in linear positive operators in approximation theory, Nieuw Arch. Wiskunde, III. Ser. 18 (1970), 36–60.

13 On some linear positive operators, Indag. Math. 73 (1970), 327–337.

14 On the asymptotic approximation with operators of Meyer-König and Zeller, Indag. Math. 73 (1970), 428–440.

15 Über eine Verallgemeinerung zweier Sätze von G. G. Lorentz, Indag. Math. 79 (1976), 76–90.

16 On the degree of approximation with Bernstein polynomials, Indag. Math. 79 (1976), 231–239; samen met F. Schurer en F.W. Steutel.

17 Estimations involving a modulus of continuity for a generalization of Korovkin's operators, Linear spaces and approximation, Proc. int. Conf., Oberwolfach 1977, ISNM 40, 289–303 (1978).

18 The exact degree of local approximation by linear positive operators involving the modulus of continuity of the p-th derivative, Indag. Math. 41 (1979), 63–76; samen met P.J.C. van der Meer.

19 Approximation formulae of Voronovskaya-type for certain convolution operators, J. Approx. Theory 26 (1979), 26–45.

20 On the exact degree of local approximation with convolution operators, Indag. Math. 41 (1979), 337–351.

21 Approximation with bell-shaped functions, Constructive function theory, Proc. int. Conf., Blagoevgrad 1977, 485–488 (1980).

22 Slow approximation with convolution operators, Functional analysis and approximation, Proc. int. Conf., Oberwolfach 1980, ISNM 60, 323–334 (1981).

23 Determination of the exact degree of local approximation by some linear positive operators involving the modulus of continuity of the p-th derivative, Indag. Math. 43 (1981), 117–128; samen met P.J.C. van der Meer en M. Roos.

24 Fast approximation by means of convolution operators, Indag. Math. 43 (1981), 431–444.

25 High-order approximation with convolution operators, Constructive function theory, Proc. int. Conf., Varna/Bulg. 1981, 519–528 (1983).

26 Approximation with convolution operators, Approximation theory, 2nd Conf., Edmonton/Alberta 1982, CMS Conf. Proc. 3, 353–368 (1983).

27 Approximation with convolution operators depending on two parameters, Approximation theory, IV (College Station, Tex., 1983), 679–684, Academic Press, New York, 1983.

28 Approximatietheorie in Delft, Delftse Universitaire Pers, Delft, 1984.

29 37 years of scientific work of Prof. Dr. P. C. Sikkema, Delft Prog. Rep. 9 (1984), 243–258.

30 U. Abel, On the asymptotic approximation with operators of Bleimann, Butzer and Hahn, Indag. Math., New Ser., 7 (1996), 1–9.

31 U. Abel, On the asymptotic approximation with bivariate operators of Bleimann, Butzer, and Hahn, J. Approx. Theory 97 (1999), 181–198.

32 E. W. Cheney and A. Sharma, Bernstein power series, Canad. J. Math. 16 (1964), 241–253.

33 C. G. Esseen, Über die asymptotisch beste Approximation stetiger Funktionen mit Hilfe von Bernstein-Polynomen, Numer. Math. 2 (1960) 206–213.

34 Addendum Moduli of continuity to the book S.R. Finch, Mathematical constants, http://algo.inria.fr/csolve/mo.pdf

35 H. von Koch, Über das Nichtverschwinden einer Determinante nebst Bemerkungen über Systeme unendlich vieler linearer Gleichungen, Deutsche Math.-Ver. 22 (1913), 285–291.

36 P.P. Korovkin, Linear operators and approximation theory, Hindustan Publish. Corp., Delhi, 1960.

37 G.G. Lorentz, Bernstein polynomials, University of Toronto Press, Toronto, 1953.

38 A. Lupaş and M. W. Müller, Approximation properties of the M_n-operators, Aequationes Math. 5 (1970), 19–37.

39 R.G. Mamedov, The asymptotic value of the approximation of differentiable functions by linear positive operators (Russisch), Dokl. Akad. Nauk SSSR 128 (1959), 471–474.

40 W. Meyer-König and K. Zeller, Bernsteinsche Potenzreihen, Studia Math. 19 (1960), 89–94.

41 H. Muggli, Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Comment. Math. Helvetici 11 (1938), 151–179.

42 I.P. Natanson, Konstruktive Funktionentheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1955.

43 T. Popoviciu, Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur, Mathematica, Cluj 10 (1935), 49–54.

44 F. Schurer, On linear positive operators in approximation theory, Proefschrift, Waltman, Delft, 1965.

45 F. Schurer and F.W. Steutel, The degree of local approximation of functions in $C_1\,[0,1]$ by Bernstein polynomials, J. Approx. Theory 19 (1977), 69–82.

46 P. van der Steen, On differential operators of infinite order, Proefschrift, Waltman, Delft, 1968.

47 P. van der Steen, On sequences of differential operators of infinite order with constant coefficients, Indag. Math. 67 (1964), 620–628.

48 E. Voronovskaya, Détermination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein (Russisch), Dokl. Akad. Nauk SSSR A, No. 4 (1932), 79–85.