Charlene Kalle
*Fakultät für Mathematik*
*Universität Wien*
*Nordbergstrasse 15*
*1090 Wien, Oostenrijk*
*charlene.kalle@univie.ac.at*

**Onderzoek**

# Bewogen getallen

**Getaltheoretische problemen kunnen vanuit verschillende invalshoeken benaderd worden. Een methode die daarbij verrassend succesvol is gebleken, is het gebruik van ergodentheorie. Bekende wiskundigen als Elon Lindenstrauss en Terence Tao maken er gebruik van. In dit artikel laat Charlene Kalle aan de hand van drie onderwerpen zien hoe ergodentheorie toegepast kan worden in getaltheorie.**

Getaltheoretische problemen zijn vaak aantrekkelijk omdat ze zo makkelijk te formuleren zijn. Denk aan de Laatste Stelling van Fermat: Voor een geheel getal $n > 2$ heeft de vergelijking $a^n + b^n = c^n$ geen oplossingen met $a, b$ en $c$ gehele getallen. Of het Vermoeden van Goldbach: ieder even getal groter dan 2 kan geschreven worden als de som van twee priemgetallen. Toch is het vaak extreem moeilijk om dergelijke problemen op te lossen. Fermat schreef in 1637 al dat zijn oplossing niet in de kantlijn paste, maar een bewijs kwam er pas in 1994. Het Vermoeden van Goldbach is nog steeds een vermoeden.

In de afgelopen decennia is geprobeerd om dit soort vragen vanuit verschillende invalshoeken te benaderen. Verrassend is dat het gebruik van resultaten en technieken uit dynamische systemen, en ergodentheorie in het bijzonder, hierbij succesvol is gebleken. Ergodentheorie beschrijft het gemiddelde gedrag dat een dynamisch systeem op de lange termijn vertoont en leent zich daarom goed voor het afleiden van statistische eigenschappen van een systeem. We zullen dit zo preciezer maken en aan de hand van drie voorbeelden een idee geven van hoe deze aanpak in zijn werk gaat. De drie onderwerpen die aan bod komen zijn 1) normale getallen, 2) het Vermoeden van Littlewood en 3) Szemerédi's Stelling en de uitbreiding hiervan naar priemgetallen door Green en Tao. Eerst wat definities.

### Nog even geen getallen

Een dynamisch systeem is een combinatie van een ruimte $X$ en een afbeelding, of transformatie $T : X \to X$ die de ruimte op zichzelf afbeeldt. Het systeem ontwikkelt zich in de tijd door $T$ herhaaldelijk op $X$ toe te passen. We zijn daarom geïnteresseerd in

$$T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ keer}}$$

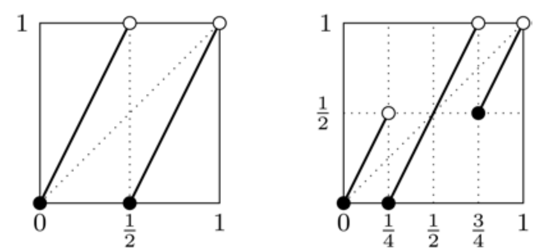
voor $n \in \mathbb{N}$, waarbij $T^0$ de identiteit is: $T^0 x = x$. De *baan* van een $x \in X$ is de hele verzameling $\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$, of $\{T^n x : n \in \mathbb{Z}\}$ als $T$ inverteerbaar is. We kunnen alleen zinnige uitspraken doen over het systeem als er wat extra structuur op $X$ en $T$ ligt. In ergodentheorie is $X$ een maatruimte en $T$ een maatbehoudende en vaak ergodische transformatie. Alle dynamische systemen die we hier tegen gaan komen zijn van dit type. Om deze begrippen te illustreren is hier een voorbeeld.

Neem voor $X$ het eenheidsinterval $[0, 1)$. Om van $[0, 1)$ een maatruimte te maken hebben we een afbeelding nodig, de *maat*, die aan deelverzamelingen van $[0, 1)$ een niet-negatief getal toevoegt, de maat van deze verzameling. Een simpel en bekend voorbeeld is de afbeelding $\lambda$ die aan een interval zijn lengte toevoegt: $\lambda([a, b)) = b - a$. Door open verzamelingen op te vullen met disjuncte intervallen, kunnen we die ook een maat geven. We tellen daarvoor gewoon de lengtes van al die intervallen bij elkaar op. Met wat extra werk kan $\lambda$ uitgebreid worden naar een groot aantal deelverzamelingen van $[0, 1)$. De zo verkregen maat $\lambda$ heet de *Lebesguemaat*. Omdat de maat van de hele verzameling gelijk is aan 1, is $\lambda$ hier ook een *kansmaat*. Deelverzamelingen waarvan de maat gedefinieerd is, heten *meetbare verzamelingen*.

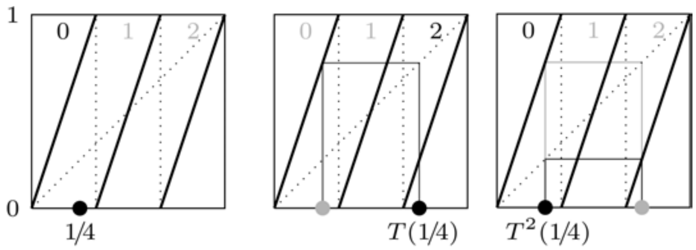
Een maat $\mu$ heet *invariant* voor een transformatie $T : X \to X$, of $T$ is *maatbehoudend* voor $\mu$, als voor iedere meetbare verzameling $E \subseteq X$ geldt dat $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$, waarin $T^{-1}E$ het inversebeeld van $E$ is, dus

$$T^{-1}E = \left\{x \in X : Tx \in E\right\}.$$

Voor een dynamisch systeem is dit de basisstructuur, maar meestal wordt ook nog aangenomen dat $T$ *ergodisch* is. Hiermee wordt bedoeld dat de dynamica van $T$ de ruimte niet in meerdere disjuncte stukken opdeelt. Figuur 1 geeft twee voorbeelden. Links staat de maatbehou-




**Figuur 1** De linker transformatie is ergodisch en de rechter niet




**Figuur 2** De cijfers van de ternaire ontwikkeling van $\frac{1}{4}$ zijn $0, 2, 0, 2, \ldots$. Dus $\frac{1}{4} = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \cdots$.

dende transformatie $Tx = 2x(\mathrm{mod}1)$: Voor ieder interval $[a,b) \subseteq [0,1)$ geldt

$$T^{-1}[a,b) = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \cup \left[\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$$

en dus is

$$\begin{aligned}\lambda\Big(T^{-1}[a,b)\Big) &= \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) + \left(\frac{b+1}{2} - \frac{a+1}{2}\right)\\ &= b - a = \lambda\Big([a,b)\Big).\end{aligned}$$

Bovendien is deze $T$ ergodisch. Voor de rechter transformatie is $\lambda$ ook invariant, maar deze transformatie is niet ergodisch. In de grafiek is te zien dat het interval $[0, 1/2)$ op zichzelf afgebeeld wordt, $T^{-1}[0,1/2) = [0,1/2)$, en hetzelfde geldt voor $[1/2, 1]$. De dynamica kan daardoor bestudeerd worden door deze twee stukken apart te bekijken.

We gebruiken de volgende algemene definities van dynamisch systeem en ergodiciteit.

**Definitie.** Een (maattheoretisch) *dynamisch systeem* is een drietal $(X, \mu, T)$ met $X$ een verzameling, $T : X \to X$ een transformatie en $\mu$ een invariante maat. De transformatie $T$ heet bovendien *ergodisch* als voor iedere meetbare verzameling $E \subseteq X$ met $T^{-1}E = E$ geldt dat $\mu(E) = 0$ of $\mu(E) = 1$.

Ergodentheorie vindt haar oorsprong in het werk van de Oostenrijkse natuurkundige Ludwig Boltzmann (1844–1906). Hij vermoedde dat als systemen van grote aantallen deeltjes zich in een evenwichtstoestand bevinden, dat dan een tijdsgemiddelde langs de baan van één deeltje gelijk is aan het gemiddelde over de hele ruimte. Het vermoeden zoals Boltzmann het formuleerde bleek onjuist en de zoektocht naar varianten waarvoor het vermoeden wel geldt, leidde tot het ontstaan van ergodentheorie. De Ergodenstelling van Birkhoff geeft een dergelijke variant. We geven deze stelling voor de ruimte $[0,1)$ met de maat $\lambda$.

**Stelling** (Birkhoff Ergodenstelling). *Stel dat de transformatie* $T : [0,1) \to [0,1)$ *maatbehoudend en ergodisch is voor de maat* $\lambda$ *en dat* $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ *een integreerbare functie is. Dan geldt voor bijna alle* $x \in [0,1)$ *dat*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_0^1 f(x)dx. \tag{1}$$

Aan de linkerkant van (1) zien we het gemiddelde dat de functie $f$ aanneemt op de baan van het punt $x$ onder de transformatie $T$. De integraal rechts is het gemiddelde van $f$ over de hele ruimte $[0,1)$. Het 'bijna alle' in de bovenstaande stelling betekent dat de verzameling van uitzonderingen $\lambda$-maat 0 heeft, dat wil zeggen dat het een heel kleine verzameling is. De Ergodenstelling beschrijft het gedrag van een 'typisch' element $x$ en doet daarmee een sterke uitspraak over het algemene gedrag van het systeem. Daartegenover staat dat ergodentheorie niets zegt over het gedrag van een specifieke $x$.

## Normale getallen

We passen de Ergodenstelling toe op decimale ontwikkelingen. Neem $([0,1), \lambda, T)$ met $Tx = 10x(\mathrm{mod}1)$. Met dit dynamische systeem kunnen we de cijfers uit decimale ontwikkelingen vinden. Voor $x \in [0,1)$ is het eerste cijfer gelijk aan $j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ als $x \in \left[\frac{j}{10}, \frac{j+1}{10}\right)$. Neem als $n$-de cijfer het eerste cijfer van $T^{n-1}x$ en schrijf $c_n = c_n(x) = c_1(T^{n-1}x)$. Dan geldt

$$T^n x = 10\, T^{n-1}x - c_n.$$

Dit inverteren en in zichzelf invullen geeft

$$\begin{aligned} x &= \frac{c_1}{10} + \frac{Tx}{10} = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{T^2x}{10^2}\\ &= \cdots = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{10^k} + \frac{T^n x}{10^n}.\end{aligned}$$

Aangezien $T^n x \in [0,1)$ voor alle $n \geq 1$, convergeert dit en krijgen we de decimale ontwikkeling van $x$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{10^k}$. Voor $x \geq 1$ bestaat er een uniek natuurlijk getal $n$, zodat $10^{n-1} \leq x < 10^n$. Dan is $\frac{x}{10^n} \in [0,1)$ en dus:

$$x = 10^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(x/10^n)}{10^k}.$$

We kunnen het getal 10 in deze constructie zonder problemen vervangen door een willekeurig ander geheel getal $r > 1$ en zo $r$-adische ontwikkelingen maken. Als $x \in \left[\frac{j}{r}, \frac{j+1}{r}\right)$, dan nemen we $c_1(x) = j \in \{0, \ldots, r-1\}$ en we gebruiken de afbeelding $T_r\, x = r\,x(\mathrm{mod}1)$ om de andere cijfers te vinden, zie Figuur 2.

Met de Ergodenstelling kunnen we uitspraken doen over de frequentie van de verschillende cijfers in de $r$-adische ontwikkeling van een 'typisch' getal $x$. We hadden al opgemerkt dat de transformatie $T_2$, die te zien is links in Figuur 1, maatbehoudend en ergodisch is. Omdat er geen wezenlijk verschil is tussen de transformaties $T_r$ voor verschillende waardes van $r$, heeft iedere $T_r$ deze eigenschappen.

Om de frequentie van het cijfer $j$ te bepalen, merken we op dat het $n$-de cijfer uit de $r$-adische ontwikkeling van een punt $x$ alleen gelijk is aan $j$ als $T^{n-1}x \in \left[\frac{j}{r}, \frac{j+1}{r}\right)$. Definieer $A_j = \left[\frac{j}{r}, \frac{j+1}{r}\right)$ en laat $1_{A_j}$ indicatorfunctie op deze verzameling zijn. Dan is $\sum_{k=0}^{n-1} 1_{A_j}(T^k x)$ precies het aantal keer dat $x$ in het interval $A_j$ ligt onder de eerste $n-1$ iteraties van $T$, oftewel het is het aantal $j$'s in de eerste $n$ cijfers van de $r$-adische ontwikkeling van $x$. Dit betekent dat $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{A_j}(T^k x)$ de frequentie van het cijfer $j$ is in de $r$-adische ontwikkeling van $x$. Volgens de Ergodenstelling is dit voor bijna alle $x$ gelijk aan de lengte van het interval $\left[\frac{j}{r}, \frac{j+1}{r}\right)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{A_j}(T^k x) = \frac{1}{r}.$$

In het bijzonder is de frequentie voor alle cijfers in $\{0, 1, \ldots, r-1\}$ hetzelfde en gelijk aan $\frac{1}{r}$.

We kunnen dit principe ook toepassen op blokken van cijfers. Stel dat we willen weten wat de frequentie van het blok 10 is. Merk op dat voor een $x \in [0,1)$ geldt dat

$$c_n c_{n+1} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad T^{n-1}x \in \Big[\frac{1}{r}, \frac{2}{r}\Big) \text{ en } T^n x \in \Big[0, \frac{1}{r}\Big).$$

Voor het interval $\left[\frac{1}{r}, \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)$ geldt dat

$$T\Big[\frac{1}{r}, \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\Big) = \Big[\frac{r}{r} - 1, \frac{r}{r} + \frac{r}{r^2} - 1\Big) = \Big[0, \frac{1}{r}\Big).$$

Dus, als $x \in \left[\frac{1}{r}, \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \subseteq \left[\frac{1}{r}, \frac{2}{r}\right)$, dan is $Tx \in \left[0, \frac{1}{r}\right)$ en hebben we achtereenvolgens de cijfers 10. Met de Ergodenstelling volgt weer dat de frequentie van het blok 10 in de $r$-adische ontwikkeling van bijna alle getallen gelijk is aan $\frac{1}{r^2}$. Natuurlijk was er niets bijzonders aan het blok 10. In het algemeen geldt voor iedere $n \geq 1$ en iedere combinatie van cijfers $j_1, \dots, j_n \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ dat voor bijna alle $x \in [0,1)$ de frequentie van het blok $j_1 \cdots j_n$ in de $r$-adische ontwikkeling van $x$ gelijk is aan $\frac{1}{r^n}$. Ieder blok komt met de 'juiste' frequentie voor. Een getal met deze eigenschap heet *normaal* in basis $r$. Bijna alle getallen zijn dus normaal in iedere basis.

Het bekendste normale getal in basis 2 is de constante van Champernowne die je krijgt door de binaire ontwikkelingen in basis 2 van alle natuurlijke getallen achter elkaar te zetten:

$$c = 0.1\,10\,11\,100\,101\,110\,111\cdots.$$

Eenzelfde constructie werkt voor iedere basis $r$. De Ergodenstelling geeft ons helaas geen voorbeelden van normale getallen en er zijn bijna geen specifieke normale getallen bekend. Voor meer informatie over dit onderwerp, zie [1].

### Goed benaderbare getallen

Voor allerlei toepassingen is het belangrijk om reële getallen nauwkeurig te kunnen benaderen met rationale getallen. In de negentiende eeuw bedacht Dirichlet de volgende definitie voor 'nauwkeurig' in deze zin.

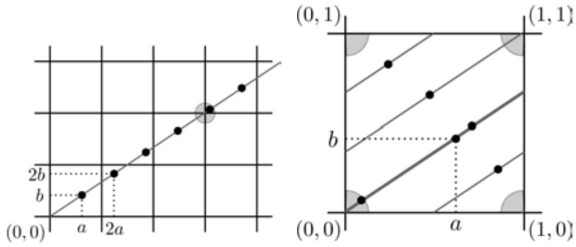
**Definitie.** Een breuk $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ is een *goede benadering* van een reëel getal $a$ als $\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Een natuurlijke vraag is of en hoe zulke benaderingen te vinden zijn. Dirichlet bewees:

**Stelling** (Dirichlet's Benaderingsstelling). *Voor ieder getal $a \in \mathbb{R}$ en ieder geheel getal $N > 0$ bestaan er gehele getallen $p, q$ met $1 \leq q \leq N$, zodat $|qa - p| < \frac{1}{N}$.*

Een direct gevolg van deze stelling is dat er voor iedere $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ oneindig veel goede benaderingen bestaan. Het bewijs van de Benaderingsstelling van Dirichlet is vrij eenvoudig. Dit bracht Littlewood ertoe om een promovendus te vragen de stelling uit te breiden naar het benaderen van twee reële getallen tegelijk. Littlewood vermoedde dat er voor iedere twee reële getallen $a$ en $b$ en iedere $\varepsilon > 0$ twee breuken $\frac{p}{q}, \frac{r}{q} \in \mathbb{Q}$ bestaan, zodanig dat

$$\left|a - \frac{p}{q}\right|\left|b - \frac{r}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q^3},$$




**Figuur 3** Voor sommige $n$ ligt $T^n(0,0)$ heel dicht bij $\mathbb{Z}^2$

of, $q\left|qa - p\right|\left|qb - r\right| < \varepsilon$. Met andere woorden:

**Vermoeden** (Littlewood). *Voor ieder paar getallen $a, b \in \mathbb{R}$ geldt*

$$\liminf_{n\to\infty} n\|na\|\|nb\| = 0,$$

*waarin $\|\cdot\|$ de afstand tot het dichtstbijzijnde gehele getal is.*

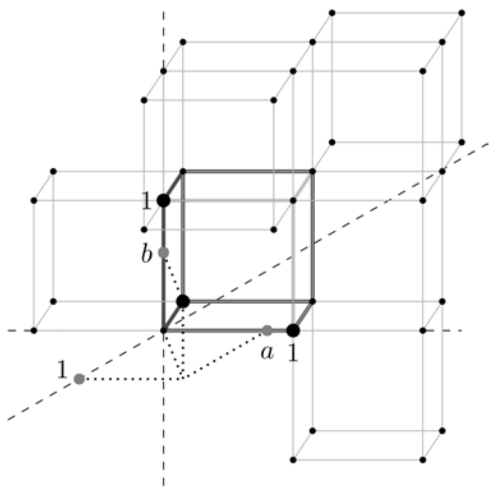
Het probleem bleek lastiger dan gedacht en lange tijd werd er geen vooruitgang geboekt. In 2006 behaalden Einsiedler, Katok en Lindenstrauss met behulp van ergodische middelen een gedeeltelijk succes [2].

Beschouw $T(x,y) = (x+a, y+b)$. Voor alle $n \geq 1$ geldt $T^n(0,0) = (na, nb)$ en het vermoeden van Littlewood zegt nu dat er voor alle $\varepsilon > 0$ een $n$ bestaat, zodat $T^n(0,0)$ binnen een straal $\varepsilon$ van een punt uit $\mathbb{Z}^2$ ligt, zie links in Figuur 3. Het gedrag van $T$ op $\mathbb{R}^2$ is niet zo interessant. Ieder punt $(x,y)$ loopt onder iteraties van $T$ via een lijn met helling $\frac{b}{a}$ naar buiten weg. Daarom bekijken we de transformatie op de torus.

Elon Lindenstrauss werd in 1970 geboren in Jerusalem, Israël. Hij is een aantal jaren werkzaam geweest aan Princeton University en sinds 2009 is hij professor aan de Hebrew University in Jerusalem. Zijn voornaamste onderzoeksgebieden zijn ergodentheorie, dynamische systemen en de toepassingen hiervan in getaltheorie. In 2010 kreeg hij de Fields-medaille uitgereikt. Hij won verder onder andere de Salem Prize in 2003, de prijs van de European Mathematical Society in 2004 en in 2009 zowel de Erdősprijs als de Fermatprijs.

Foto: Archives of the MFO

Elon Lindenstrauss




**Figuur 4** De cellen uit het rooster $\tau_{a,b}$ hebben inhoud 1.

Laat $T : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ gegeven zijn door

$$T(x, y) = (x + a(\mathrm{mod}1),\ y + b(\mathrm{mod}1)).$$

De iteraties $T^n(0,0)$ op $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ zijn rechts in Figuur 3 te zien. Men kan laten zien dat $T$ ergodisch is als er geen getallen $u, v \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ bestaan zodat $au+bv = 0$. Door deze $T$ te bestuderen zou dus in principe informatie verkregen kunnen worden over het vermoeden van Littlewood, maar helaas zegt ergodentheorie niets over de baan van het specifieke punt $(0,0)$.

Aan het resultaat van Einsiedler, Katok en Lindenstrauss ligt wel eenzelfde soort idee ten grondslag. Voor het tweetal $(a,b)$ beschouwden ze het rooster $\tau_{a,b}$ in $\mathbb{R}^3$, gegeven door de vectoren $(1,a,b)$, $(0,1,0)$ en $(0,0,1)$, oftewel

$$\tau_{a,b} = \Big\{(u, ua+v, ub+w)\ :\ u,v,w \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Dit rooster verdeelt de ruimte in cellen met inhoud 1, zie Figuur 4. We kunnen $\tau_{a,b}$ daarom zien als een element uit de verzameling $X$ van alle roosters in $\mathbb{R}^3$ waarvan de cellen inhoud 1 hebben. Een dergelijk rooster kan gerepresenteerd worden door een $3 \times 3$ matrix waarvan de kolommen gelijk zijn aan de vectoren die het rooster geven. Bijvoorbeeld,

$$\tau_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix heeft dan determinant 1. Beschouw nu de verzameling van matrices:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^{-r-s} & 0 & 0 \\ 0 & e^r & 0 \\ 0 & 0 & e^s \end{pmatrix} : r,s \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Matrices in $A$ hebben allemaal determinant 1. Dat betekent dat vermenigvuldiging met de representatie van een element uit $X$ weer een matrix met determinant 1 oplevert, en dus ook een rooster in $X$. We kunnen daarom iedere matrix $M \in A$ zien als een afbeelding $M : X \to X$. Voor ieder rooster $\tau \in X$ kunnen we spreken over de baan $\{M \cdot \tau : M \in A\}$ van $\tau$ onder $A$. Margulis gaf de relatie met het vermoeden van Littlewood.

**Stelling** (Margulis) *Het vermoeden van Littlewood is equivalent met de uitspraak dat de baan van $\tau_{a,b}$ voor iedere $(a,b)$ een onbegrensde deelverzameling van $X$ geeft.*

Einsiedler, Katok en Lindenstrauss bestudeerden de invariante maten van het paar $(X,A)$. Een maat $\mu$ is invariant als voor alle matrices $M \in A$ en alle meetbare deelverzamelingen $E \subseteq X$ geldt dat $\mu(M^{-1}E) = \mu(E)$. Met een dergelijke maat is $(X,\mu,A)$ een dynamisch systeem. In [2] wordt bewezen dat er een unieke invariante maat bestaat die aan een aantal voorwaarden voldoet. Dit resultaat heeft gevolgen voor de paren waarvoor het vermoeden van Littlewood niet geldt. Er blijken namelijk maar heel weinig roosters $\tau_{a,b}$ te kunnen bestaan waarvan de baan een begrensde verzameling wordt. Hoe weinig wordt uitgedrukt in Hausdorff-dimensie.

De Hausdorff-dimensie is ontwikkeld om het begrip dimensie uit te breiden naar fractalen. Voor eenvoudige meetkundige objecten blijft de dimensie gelijk: een vlak heeft Hausdorff-dimensie 2 en een punt 0. Ingewikkeldere objecten kunnen een niet-gehele dimensie krijgen. De Koch-kurve bijvoorbeeld, zie Figuur 5, heeft Hausdorff-dimensie $\frac{\log 4}{\log 3}$ en ligt daarmee wat dimensie betreft tussen een vlak en een lijn in. Einsiedler, Katok en Lindenstrauss bewezen dat de verzameling van uitzonderingen op het Vermoeden van Littlewood Hausdorff-dimensie 0 heeft. Met andere woorden, als er al punten bestaan waarvoor het vermoeden niet opgaat, dan zijn dat er bijzonder weinig.

**Priemgetallen**

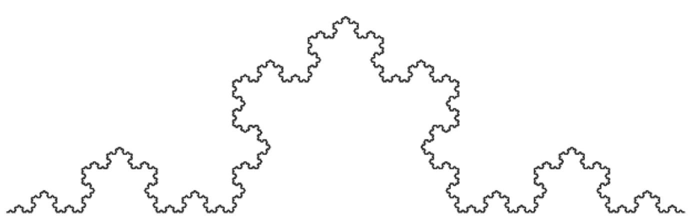
In 1969 bewees Szemerédi een resultaat dat al sinds 1936 bekend stond als het Erdős–Turán Vermoeden. Zijn stelling zegt dat deelverzamelingen van de gehele getallen die groot genoeg zijn, willekeurig lange rekenkundige rijen bevatten. Om 'groot genoeg' precies te maken, hebben we de volgende definitie nodig.

**Definitie**. Zij $A \subseteq \mathbb{Z}$. De *bovendichtheid* van $A$ wordt gegeven door

$$d^*(A) := \limsup_{N\to\infty} \frac{\#\big(A \cap \{1,\ldots,N\}\big)}{N-1}.$$

We delen het aantal elementen in $A$ dat tussen 1 en $N$ ligt door het totale aantal elementen in $\{1,2,\ldots,N\}$. Als $d^*(A) > 0$, dan heeft $A$ overal in $\mathbb{N}$ een redelijke 'massa'.

**Stelling** (Szemerédi) *Stel dat $A$ een verzameling gehele getallen is met $d^*(A) > 0$ en laat $k \geq 1$. Dan zijn er $a,p \in A$, zodat alle getallen $a, a+p, \ldots, a+kp$ ook in $A$ liggen.*



**Figuur 5** De Koch-kurve heeft Hausdorff-dimensie $\frac{\log 4}{\log 3}$

Szemerédi bewees de volgende equivalente formulering van de stelling, waarin alleen over eindige verzamelingen wordt gesproken.

**Stelling** (Eindige Szemerédi) *Laat* $0 < \delta \leq 1$ *een reëel getal zijn en* $k \geq 1$ *een geheel getal. Dan bestaat er een* $N_0(\delta, k)$*, zodat als* $N > N_0(\delta, k)$ *en* $A \subset \{1, \ldots, N\}$ *met* $\#A \geq \delta N$*, dan bevat* $A$ *een rekenkundige rij van lengte* $k$*.*

De positieve bovendichtheid van $A$ geeft dat er voor $0 < \delta < d^*(A)$ oneindig veel waardes $N$ zijn, zodat $\#(A \cap \{1, \ldots, N\}) \geq \delta N$. Hieruit volgt meteen dat de Eindige Szemerédi Stelling de gewone impliceert. De andere implicatie volgt met een bewijs uit het ongerijmde.

In 1977 bewees Furstenberg deze stelling opnieuw, maar dan met dynamische middelen [3]. Hij gaf hiermee het startsein voor een zeer vruchtbare samenwerking tussen ergodentheorie en combinatorische getaltheorie. Het bewijs van Furstenberg was gebaseerd op zijn eigen Meervoudige Terugkeerstelling:

**Stelling** (Meervoudige Terugkeerstelling) *Laat* $(X, \mu, T)$ *een dynamisch systeem zijn en* $k \geq 1$ *een geheel getal. Stel dat* $T$ *inverteerbaar is. Als* $E$ *een deelverzameling van* $X$ *is met* $\mu(E) > 0$*, dan geldt*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mu\Big(E \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n} E\Big) > 0.$$

Definieer de verzameling

$$B_n = E \cap T^{-n} E \cap T^{-2n} E \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n} E,$$

dan geldt dat $x \in B_n$ precies dan als voor alle $0 \leq j \leq k-1$ ook $x \in T^{jn} E$. Elementen $x \in B_n$ liggen dus in $E$ en komen onder iteraties van $T$ langs de rekenkundige rij $n, 2n, \ldots, (k-1)n$ steeds weer terug in $E$. Een direct gevolg van de Meervoudige Terugkeerstelling is dat er onder de voorwaarden van de stelling een $n \geq 1$ bestaat, zodat $\mu(B_n) > 0$.

De brug naar de combinatoriek sloeg Furstenberg met zijn Correspondentieprincipe.

**Stelling** (Correspondentieprincipe) *Stel dat* $A \subseteq \mathbb{Z}$ *een positieve bovendichtheid heeft. Dan bestaat er een dynamisch systeem* $(X, \mu, T)$ *en een verzameling* $E \subseteq X$ *met* $\mu(E) = d^*(A)$ *en zodat voor alle gehele getallen* $k \geq 1$ *en alle gehele getallen* $m_1, \ldots, m_{k-1} \geq 1$ *geldt dat*

$$\begin{aligned} d^*\Big(A \cap (A + m_1) \cap \cdots \cap (A + m_{k-1})\Big) \\ \geq \mu(E \cap T^{-m_1} E \cap \cdots \cap T^{-m_{k-1}} E). \end{aligned}$$

Nemen we hier $m_j = jn$ voor een of andere $n$, dan krijgen we

$$E \cap T^{-m_1} E \cap \cdots \cap T^{-m_{k-1}} E = B_n.$$

Omdat $\mu(E) > 0$, geeft de Meervoudige Terugkeerstelling dat ook $\mu(B_n) > 0$. Het Correspondentieprincipe zegt dan dat

$$d^*\Big(A \cap (A + n) \cap \cdots \cap (A + (k-1)n)\Big) > 0.$$

Oftewel, de verzameling $A$ bevat een rekenkundige rij van lengte $k$.

Het dynamische systeem dat voor het Correspondentieprincipe gekozen wordt, heet een *Bernoulli shift*. De onderliggende ruimte is $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, de ruimte van alle rijtjes van elementen in $\{0,1\}$. Voor $T$ nemen we de shift-transformatie: voor $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ wordt $T\omega = \omega'$ gegeven door $\omega'_n = \omega_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$. Met andere woorden, $T$ schuift alle elementen van $\omega$ één plaats naar links. Merk op dat $T$ inverteerbaar is. In plaats van de verzameling $A$, bekijken we het rijtje $\overline{\omega}$, gegeven door

$$\overline{\omega}_n = \begin{cases} 1, & \text{als } n \in A, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Laat $A_0 \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ de verzameling van rijtjes zijn met $\omega_0 = 1$. Dan geldt dat $n \in A$ precies dan als $T^n \overline{\omega} \in A_0$. Voor een rekenkundig rijtje van lengte $k$ geldt daarom dat

$$\{a + jb\}_{j=0}^{k-1} \subseteq A \Leftrightarrow \overline{\omega} \in \bigcap_{j=0}^{k-1} T^{-(a+jb)} A_0.$$

Hiermee zijn we bijna in de positie om de Meervoudige Terugkeerstelling te gebruiken.

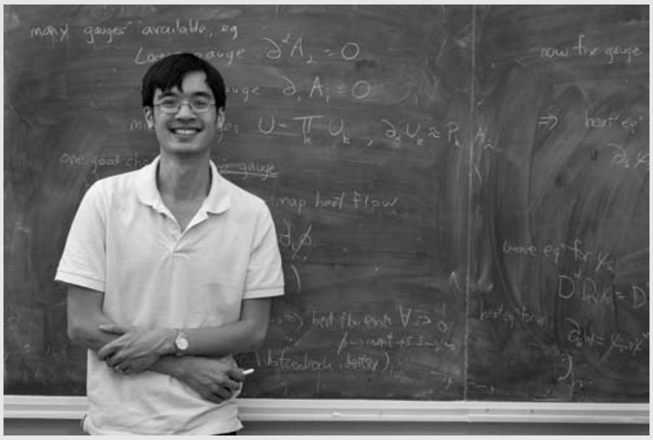
In 2004 schreven Green en Tao wiskundegeschiedenis met hun uitbreiding van Szemerédi's Stelling naar deelverzamelingen van de priemgetallen, zie [4]. Voor $N \geq 1$ gebruiken we $\pi(N)$ voor het aantal priemgetallen in de verzamelingen $\{1, 2, \ldots, N\}$.

**Stelling** (Green-Tao) *Stel dat* $A$ *een deelverzameling van de priemgetallen is die voldoet aan*

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{\#\Big(A \cap \{1, \ldots, N\}\Big)}{\pi(N)} > 0. \tag{2}$$

*Dan bevat* $A$ *voor iedere* $k \geq 1$ *een rekenkundige rij van lengte* $k$*.*

Terence Tao werd in 1975 geboren in Adelaide in Australië. Hij is professor aan de University of California in Los Angeles en doet onderzoek op heel veel verschillende gebieden, zoals harmonische analyse, partiële differentiaalvergelijkingen, meetkunde en combinatoriek. In 2006 kreeg hij de Fields-medaille uitgereikt voor zijn bijdragen in al deze gebieden. Later volgde nog vele andere prijzen. Tao heeft een zeer actieve weblog, waarin hij over allerlei wiskunde schrijft. Bovendien is hij erg betrokken bij de polymath projects, waarbij op het internet openlijk over wiskundige problemen gediscussieerd wordt, in de hoop om op die manier oplossingen te vinden.



Terence Tao

Omdat de bovendichtheid van de priemgetallen niet positief is, hadden Green en Tao voor hun bewijs niet genoeg aan resultaten uit ergodentheorie. Ze gebruikten een ingenieuze combinatie van technieken uit getaltheorie, harmonische analyse, discrete meetkunde en combinatoriek. Szemerédi's Stelling vormt nog steeds een belangrijk ingrediënt. In het oorspronkelijke bewijs hiervan geeft Szemerédi een afschatting van $N_0(\delta, k)$, waar in het ergodische bewijs van Furstenberg niets van terug te vinden is. Green en Tao hadden deze informatie wel nodig en de stelling werd daarom opnieuw bewezen in de lijn van Furstenberg, maar dan op een kwantitatieve manier. De aanpak in [4] was vernieuwend in de zin dat Green en Tao niet alleen gebruik maakten van ergodische resultaten, maar zich bovendien voor hun bewijzen door bestaande bewijsmethodes uit ergodentheorie lieten inspireren.

In de onderwerpen die aan bod zijn gekomen, hebben we de interactie tussen ergodentheorie en getaltheorie aan het werk gezien. Omdat ergodentheorie sterke uitspraken doet over het algemene gedrag van een dynamisch systeem, konden we laten zien dat bijna alle getallen normaal zijn in iedere basis. Furstenbergs bewijs van Szemerédi's Stelling is erop gebaseerd en hoewel de resultaten in [2] het gedrag van dynamische systemen beschrijven, kunnen ze ook worden toegepast op het vermoeden van Littlewood. Aan de andere kant ziet ergodentheorie verzamelingen van maat 0 niet. Het is daarom niet mogelijk om er normale getallen mee te vinden. Green en Tao konden Szemerédi's Stelling weliswaar niet met bestaande stellingen uit ergodentheorie uitbreiden naar de priemgetallen, maar wel met gebruikmaking van bewijstechnieken en methodes daaruit. Ze gaven daarmee een nieuwe wending aan de samenwerking tussen ergodentheorie en getaltheorie. Het lijkt erop dat de magie tussen de beide vakgebieden voorlopig nog niet uitgewerkt is.


Tom Ward

Van februari tot april 2011 zal Thomas Ward van de Universiteit van East Anglia (UEA, Norwich, UK) de F.C. Donders-leerstoel bezetten aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht, met als leeropdracht 'Het raakvlak tussen getaltheorie en dynamica', een nieuw, breed thema waarin ook het artikel van Charlene Kalle past. Hij zal tijdens zijn gasthoogleraarschap een college/seminarium doceren met als titel 'Ergodentheorie met toepassingen in getaltheorie': het vak begint met een inleiding tot ergodentheorie en een aantal manieren waarop die kan worden toegepast op problemen in getaltheorie. De precieze inhoud zal afhangen van de achtergrond en interesses van de deelnemers, maar het is zeker dat een behoorlijke hoeveelheid bijkomend leeswerk buiten de lessen om noodzakelijk zal zijn. Het college zal ook de rol aangeven die wordt gespeeld door gelijkmatige verdeling en recurrentie, en de lezers uitrusten met de noodzakelijke middelen om recente resultaten te kunnen begrijpen, zoals het bewijs van het vermoeden van Littlewood door Einsiedler, Katok en Lindenstrauss. Organisatorische informatie is via de gebruikelijke kanalen verspreid.

Tom Ward is de auteur van vier boeken (waaronder twee Springer Graduate Texts over ergodentheorie) en circa zestig onderzoeksartikelen, en begeleidde meer dan tien promovendi in dynamica en getaltheorie. Hij is momenteel vice-rector aan de UEA. Hij promoveerde in Warwick en had aanstellingen aan de University of Maryland en Ohio State University.

## Referenties


1 K. Dajani, en C. Kraaikamp, *Ergodic theory of numbers*, The Carus Mathematical Monographs 29, MAA Verenigde Staten, 2002.

2 M. Einsiedler, A. Katok and E. Lindenstrauss, *Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture*, Ann. of Math., 164(2): 513–560, 2006.

3 H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math., 31: 204–256, 1977.

4 B. Green en T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Ann. of Math., 167: 481–547, 2008.