Erik Jan van Leeuwen
Faculteit Wiskunde & Informatica
TU Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
e.j.v.leeuwen@tue.nl

Onderzoek

Bij benadering optimaliseren

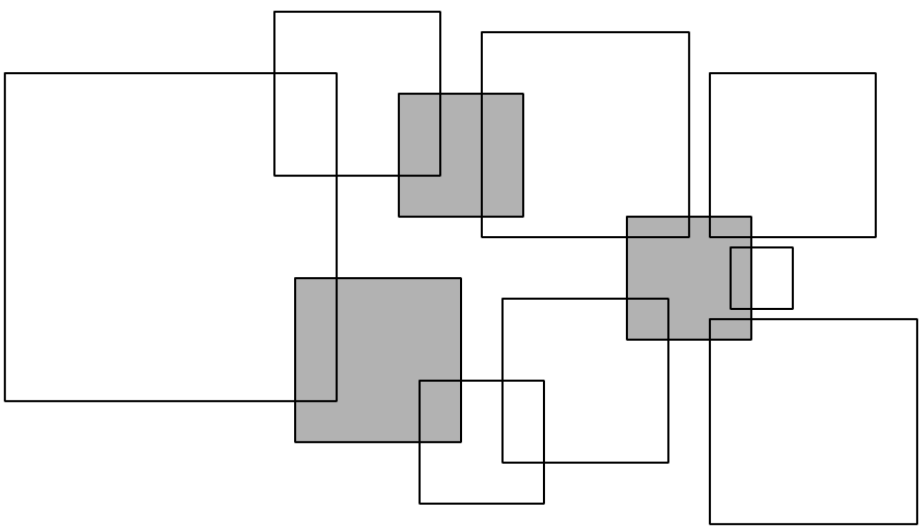
Het is niet altijd nodig een probleem precies op te lossen: vaak is een benadering van het antwoord goed genoeg. De kunst is om snel en simpel te rekenen, en toch nauwkeurig genoeg te zijn. Erik Jan van Leeuwen won met een voordracht over zijn promotie-onderzoek tijdens het European Congress of Mathematics in 2008 de Philips Wiskundeprijs.

Praktische problemen in bijvoorbeeld draadloze netwerken, computationele biologie, of cartografie kunnen vaak gemodelleerd worden door een combinatorisch optimaliseringsprobleem op een verzameling meetkundige objecten te definiëren. Het berekenen van de optimale oplossing van veel optimaliseringsproblemen is NP-moeilijk en soms is ook een benadering van dit optimum moeilijk te vinden. Echter, als de onderliggende structuur van het optimaliseringsprobleem een verzameling meetkundige objecten is, dan blijkt het probleem meestal makkelijk exact op te lossen of goed te benaderen. In dit artikel bekijken we of het optimum te benaderen is van één van die moeilijke optimaliseringsproblemen op verzamelingen meetkundige objecten, het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem. In het bijzonder onderzoeken we wat de invloed van de vorm en de structuur van de objecten op de benaderbaarheid is.

Meetkundige modellen

Een eenvoudig maar doeltreffend model voor draadloze netwerken ziet iedere zender als een punt in het vlak en het zendbereik van de zenders als een meetkundige vorm rond dit punt. Idealiter zijn deze vormen schijven, wat leidt tot het populaire schijvenmodel voor draadloze netwerken [11]. Dit meetkundige model is behulpzaam bij het verbeteren en optimaliseren van de configuratie van het netwerk. Klassieke combinatorische optimaliseringsproblemen zoals het kleuringsprobleem, het vinden van een grootste onafhankelijke deelverzameling, et cetera, zijn relevant in deze context om bijvoorbeeld frequentietoekenning of ethertoegang te bestuderen [11]. We zullen laten zien dat het meetkundige model zoals hierboven beschreven zeer handig is bij het vinden van een goede oplossing van dit soort problemen.

Er zijn twee redenen om juist dit probleem te bekijken. Ten eerste is het probleem zeer relevant in draadloze netwerken, bijvoorbeeld omdat een dominerende deelverzameling bij



Figuur 1 Een verzameling vierkanten. De grijze vierkanten vormen een kleinste dominerende deelverzameling van deze vierkanten.

het routeren van berichten in het netwerk kan ondersteunen (zie bijv. [19]). Omdat een bericht routeren een apparaat extra batterijkracht kost, is bij voorkeur een zo klein mogelijk aantal apparaten in het netwerk hier mee bezig. Het berekenen van een kleinste dominerende deelverzameling is in de praktijk dus van groot belang.

De tweede reden om het probleem te bekijken is dat het een interessante wiskundige uitdaging biedt. Zoals zal blijken, hebben zowel de vorm als de structuur van de meetkundige objecten een doorslaggevende invloed op de oplosbaarheid en berekenbaarheid van het probleem.

Benaderbaarheid

Centraal bij het onderzoek naar de oplosbaarheid en berekenbaarheid van combinatorische optimaliseringsproblemen staat vaak de vraag naar polynomiale berekenbaarheid. Dat wil zeggen, de vraag of een optimale oplossing voor het probleem berekend kan worden met een algoritme dat hooguit een polynomiaal aantal stappen nodig heeft (polynomiaal in de grootte van het probleem). Een groot aantal optimaliseringsproblemen heeft inderdaad een dergelijk polynomiaal algoritme, zoals bijvoorbeeld het kortste-padprobleem [18].

Er zijn echter ook veel problemen waarvoor geen polynomiaal algoritme bekend is, maar alleen algoritmen die exponentieel veel rekenstappen vergen. Jarenlang onderzoek naar deze zogenaamde *NP-moeilijke* problemen heeft nog geen hoop gewekt dat een polynomiaal algoritme voor deze problemen bestaat [9]. De NP-moeilijke problemen zijn zelfs equivalent, want het bestaan van een polynomiaal algoritme voor één NP-moeilijk optimaliseringsprobleem betekent dat er een polynomiaal algoritme bestaat voor *alle* NP-moeilijke problemen. Dit is het befaamde P=NP vraagstuk [10].

Helaas valt ons probleem van de kleinste dominerende deelverzameling ook in de categorie van NP-moeilijke problemen. NP-moeilijkheid kan bewezen worden voor verzamelingen van zelfs de simpelste tweedimensionale meetkundige vormen, zoals elkaar slechts rakende schijven of vierkanten van gelijke grootte [4].

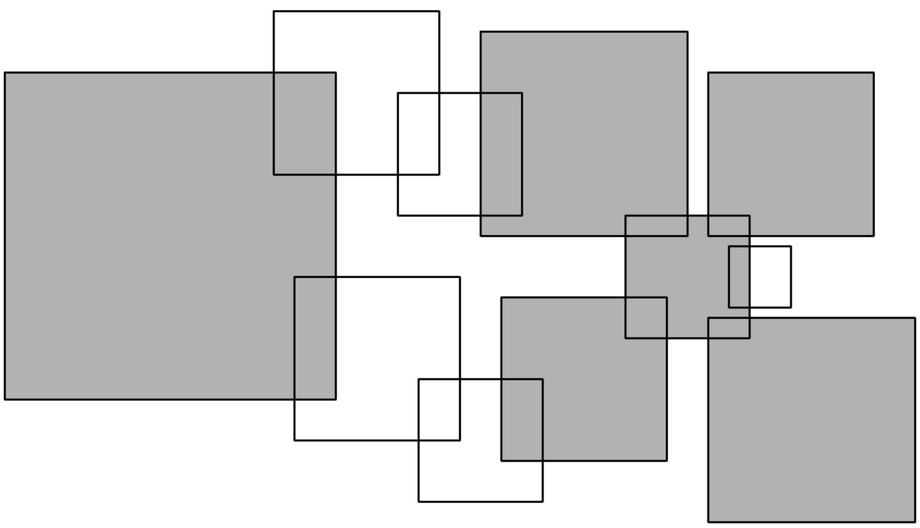
Om dit probleem toch aan te pakken met polynomiale algoritmen, staan we toe dat het door het algoritme gegeven antwoord een (hopelijk kleine) foutmarge kent ten opzichte van het optimale antwoord. De grootte van deze foutmarge noemen we de *benaderingsfactor* van het algoritme en de beste factor die behaalt kan worden bepaalt de *benaderbaarheid* van het probleem.

De benaderbaarheid van optimaliseringsproblemen geeft de mogelijkheid om verschillende categorieën van NP-moeilijke optimaliseringsproblemen te onderscheiden (zie [2] voor een overzicht). Zo hebben veel problemen een algoritme met een constante benaderingsfactor. Dat wil dus zeggen, in polynomiaal veel stappen wordt een antwoord gevonden dat hooguit een constante multiplicatieve factor van het optimale antwoord af ligt. Voor het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem op schijven van gelijke grootte bestaat bijvoorbeeld een simpel benaderingsalgoritme dat een benaderingsfactor van 5 haalt [15].

Idealiter kan algoritmisch een oplossing gevonden worden die willekeurig dicht bij het optimum ligt, ofwel een dominerende deelverzameling die minder dan $1+\epsilon$ keer het aantal objecten bevat dan het optimum, voor iedere willekeurige $\epsilon > 0$. Uiteraard neemt het aantal benodigde rekenstappen (de looptijd) van het algoritme toe naarmate ϵ kleiner gekozen wordt. Is echter voor iedere vaste waarde van ϵ de looptijd polynomiaal, dan hebben we een *polynomial-time approximation scheme* of *ptas* verkregen. Uiteraard heeft ieder optimaliseringsprobleem dat een ptas heeft ook een constante-factor benaderingsalgoritme. Er zijn echter optimaliseringsproblemen die wel een constante-factor benaderingsalgoritme hebben, maar geen ptas, tenzij P=NP [1].

Voor het berekenen van de kleinste dominerende deelverzameling op een verzameling van n schijven of vierkanten van *gelijke grootte* kan daadwerkelijk een ptas gegeven worden [12, 20]. Het betreffende algoritme vindt in $n^{c/\epsilon}$ tijd (voor zekere constante $c > 0$) een oplossing die hooguit een factor $1+\epsilon$ van het optimum ligt. Onder bepaalde aannamen is de looptijd van deze ptas zelfs aantoonbaar niet meer te verbeteren [16, 20]!

Gezien deze resultaten voor schijven en vierkanten van gelijke grootte ontstaat de hoop dat ook voor schijven en andere objecten van *willekeurige grootte* een constante-factor benaderingsalgoritme of een ptas tot de mogelijkheden behoort. Echter, de technieken die gebruikt worden voor objecten van gelijke grootte blijken niet genoeg om een goed benaderingsalgoritme te krijgen voor objecten van willekeurige grootte, iets



Figuur 2 Dezelfde verzameling vierkanten als in Figuur 1. De grijze vierkanten vormen de kleinste $\preceq$-dominerende deelverzameling van deze vierkanten, waarbij voor de gebruikte relatie $\preceq$ geldt dat $u \preceq v$ dan en slechts dan als vierkant u even groot of kleiner is (qua oppervlak) dan v.

wat eerder wel voor verscheidene andere optimaliseringsproblemen kon worden aangetoond [6, 20]. Tot voor kort bestonden er zelfs geen specifieke benaderingsalgoritmen voor het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem op objecten van willekeurige grootte. Daar brengen we hier verandering in.

Benaderingsalgoritme voor vierkanten

We tonen aan dat het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem op vierkanten van willekeurige grootte een constante-factor benaderingsalgoritme heeft. We nemen aan dat de zijden van de vierkanten as-parallel zijn. Voor het berekenen van de benadering gebruiken we een generieke methode, die ook op andere meetkundige objecten werkt.

Omdat het lastig is om direct een benadering voor het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem te vinden, bekijken we het algemener. Definieer een binaire reflexieve relatie $\preceq$ op de verzameling vierkanten S. We zeggen dat vierkant v een vierkant u $\preceq$-*domineert* als $u \preceq v$ en u en v een niet-lege doorsnede hebben. Deze definitie leidt tot het kleinste $\preceq$-dominerende deelverzamelingsprobleem, een duidelijke generalisatie van ons eerdere probleem (laat de relatie $\preceq$ alle paren van vierkanten bevatten om terug te keren naar de originele definitie).

Wij kiezen hier echter een andere relatie $\preceq$, waarbij voor alle $u, v \in S$ geldt dat $u \preceq v$ dan en slechts dan als vierkant u even groot of kleiner is (qua oppervlak) dan v. Zie Figuur 2. De reden hiervoor zal zo duidelijk worden.

We stellen nu het geheeltallige lineaire programma op van het kleinste $\preceq$-dominerende deelverzamelingsprobleem:

$$z^* = \min \sum_{u \in S} x_u$$

zodanig dat

$$\sum_{v \in N_{\preceq}[u]} x_v \geq 1 \quad \forall u \in S$$
$$x_u \in \{0,1\} \quad \forall u \in S$$

Hier is $N_{\preceq}[u]$ de verzameling vierkanten v die u $\preceq$-domineren en x een $|S|$-dimensionale vector met één coördinaat voor ieder vierkant in S. Voor iedere $u \in S$ geldt nu dat $x_u = 1$ dan en slechts dan als u deel uitmaakt van de dominerende deelverzameling.

Relaxeer het lineaire programma door de laatste eis ($x_u \in \{0,1\} \ \ \forall u \in S$) te vervangen door

$$x_u \geq 0 \ \ \forall u \in S.$$

Los dit lineaire programma op (in polynomiale tijd [14]) en laat x^* een optimale oplossingsvector zijn en z^* het optimum. Merk nu op dat als $v \in N_{\preceq}[u]$, dat v dan tenminste één hoekpunt van u moet bevatten. Door de formulering van het gerelaxeerde lineaire programma betekent dit dat er tenminste één hoekpunt p van u moet zijn waarvoor

$$\sum_{v \in N_{\preceq}[u] : p \in v} x_v^* \geq 1/4.$$

Dat wil zeggen, er is een hoekpunt waar tenminste $1/4$ van x^* 'op' ligt. We noemen een dergelijk punt *zwaar bedekt*. Ieder vierkant bevat dus minstens één zwaar bedekt punt.

We maken nu gebruik van een zogenaamd ϵ-net. Laat een functie $w : S \to \mathbf{N}$ en een $\epsilon > 0$ gegeven zijn en laat $W = \sum_{v \in S} w(v)$. Dan is $R \subseteq S$ een ϵ-*net* als ieder punt p waarvoor $\sum_{v \in S : p \in v} w(v) \geq \epsilon W$, bevat is in een vierkant van R. Een reeds bekend resultaat [3, 5, 17] stelt dat voor iedere $\epsilon > 0$ zo'n ϵ-net R in polynomiale tijd gevonden kan worden (polynomiaal in $|S|$, $1/\epsilon$ en $\log \max_{v \in S} \{w(v)\}$), zodanig dat $|R| \leq c/\epsilon$ voor zekere constante $c > 0$.

Wij kiezen $w(u) = x_u^* |S| / z^*$ en $\epsilon = \frac{1}{4z^*}$. Met hulp van bovenstaande stelling berekenen we nu in polynomiale tijd een ϵ-net R. Dit is een dominerende deelverzameling, omdat voor ieder zwaar bedekt hoekpunt p geldt dat

$$\begin{aligned} \sum_{v \in S : p \in v} w(v) &= \sum_{v \in S : p \in v} x_v^* |S| / z^* \\ &= (|S|/z^*) \cdot \sum_{v \in S : p \in v} x_v^* \\ &\geq |S|/(4z^*) \\ &= \epsilon W. \end{aligned}$$

Ieder zwaar bedekt hoekpunt is dus bevat in een vierkant van R. Ieder vierkant heeft een zwaar bedekt hoekpunt en heeft dus een niet-lege doorsnede met een vierkant uit R. Per definitie is R dan een dominerende deelverzameling.

Door de keuze van w en ϵ bevat het ϵ-net hooguit $4cz^*$ vierkanten. Maar hoe ver ligt z^* van het optimum van het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem? Stel D is een (kleinste) dominerende deelverzameling van S. Voor ieder hoekpunt van ieder vierkant in D identificeren we het grootste vierkant dat dit hoekpunt bevat. Laat D' de verzameling van al deze vierkanten zijn. Nu is het eenvoudig om in te zien dat $D' \cup D$ een $\preceq$-dominerende deelverzameling is. Hieruit leiden we af dat $z^* \leq |D' \cup D| \leq 5\,|D|$.

We kunnen dus in polynomiale tijd een oplossing berekenen voor het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem op vierkanten van willekeurige grootte die hooguit $20c$ keer zoveel vierkanten bevat als een optimale oplossing.

Uitbreidingen en generalisaties

Het idee om $\preceq$-dominerende deelverzamelingen te gebruiken in combinatie met lineair programmeren en ϵ-nets is algemeen toepasbaar. 'Slechts' een juiste keuze van de relatie $\preceq$ en een aangetoonde bovengrens op z^* en de grootte van het benodigde ϵ-net volstaan voor het verkrijgen van een benaderingsalgoritme. Dit blijkt in veel gevallen mogelijk [7, 20]. Met dezelfde relatie $\preceq$ als hierboven geeft onze methode direct een $r(r+1)c$-benadering als de objecten willekeurig grote reguliere veelhoeken met r hoekpunten zijn voor even waarden van r. Als r oneven en tenminste 5 is, dan zijn kleine aanpassingen aan de relatie $\preceq$ afdoende om een $2r(2r+1)c$-benadering te krijgen. Door gebruik van een geheel andere relatie $\preceq$ te maken, kan zelfs een $(2r(r-2)+1)r^2c$-benadering gevonden worden voor willekeurige grote convexe veelhoeken met r hoekpunten voor willekeurige waarden van r.

Het is interessant om op te merken dat deze algemene methode een minder goede benadering geeft naarmate het aantal hoekpunten van de veelhoeken toeneemt. Toepasbaarheid op schijven is misschien mogelijk, maar ligt op deze manier niet direct voor de hand. Of dit überhaupt mogelijk is, is een belangrijke open vraag.

Aan de andere kant is de beschreven techniek wel toepasbaar op verzamelingen schijven met een kleine beperking [7]. Stel dat voor ieder punt in het vlak het aantal schijven dat dit punt strikt bevat (d.w.z. het punt is bevat in het object, maar ligt niet op de rand) begrensd is door γ. De kleinste waarde van γ noemt men de *overdekkingsgraad* van de schijven. We kunnen aantonen dat onze methode een $c\gamma$-benadering geeft, voor zekere constante c. Met een paar aanpassingen kunnen we bewijzen dat $c \leq 54$ en dat deze benadering in lineaire tijd gevonden kan worden. Bij een constante overdekkingsgraad is dit dus wederom een benadering binnen een constante multiplicatieve factor.

Middels geheel andere technieken kan in het geval van begrensde overdekkingsgraad zelfs een $(3+\epsilon)$-benadering gevonden worden in polynomiale tijd, voor vaste waarden van $\epsilon > 0$ [7]. Dit is bijna de vurige gewenste ptas. Dit algoritme generaliseert eenvoudig tot andere objecten, zolang deze maar voldoende op een schijf 'lijken'. Dit laatste kunnen we preciseren door bijvoorbeeld te eisen dat de ratio tussen de radius van de kleinste cirkel die een object omvat en de radius van de grootste cirkel die in het object bevat is, begrensd is door een constante. Een dergelijk object wordt *dik* genoemd.

Het algoritme geeft dus een benadering met een constante factor mits de objecten dik en convex zijn en begrensde overdekkingsgraad hebben. De restrictie van begrensde overdekkingsgraad is essentieel. Er bestaan namelijk verzamelingen dikke convexe objecten waarvoor onder redelijke aannamen geen polynomiaal algoritme bestaat dat een betere benaderingsfactor geeft dan $\ln|S|$ [7–8]. Zelfs als de vorm van de objecten maar een klein beetje afwijkt van de vorm van een schijf of van een vierkant geldt dit resultaat. Daarentegen is er een simpel polynomiaal algoritme dat voor alle verzamelingen objecten S (ongeacht hun overdekkingsgraad en of ze dik of convex zijn) een benaderingsfactor van $1 + \ln|S|$ geeft [13].

Conclusie

Bovenstaande resultaten geven duidelijk aan dat zowel de vorm van de objecten als hun structuur de benaderbaarheid van het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem sterk beïnvloedt. Voor verzamelingen veelhoeken heeft het probleem een constante-factor benaderingsalgoritme, maar voor verzamelingen schijven is het nog onduidelijk of een dergelijk algoritme bestaat. Is echter de overdekkingsgraad van de schijven begrensd, dan is een constante-factor benadering wel mogelijk. Een duidelijke verklaring voor dit ogenschijnlijke verschil ontbreekt op dit moment. Daarnaast is er nog de grotere open vraag naar het bestaan van een ptas voor het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem op objecten van willekeurige grootte.

Zoals eerder gezegd komt de motivatie om naar het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem te kijken uit toepassingen in draadloze netwerken. Het gebruikte model en het gevonden benaderingsalgoritme combineert ideeën uit de meetkunde en de combinatorische optimalisering. Een dergelijke samensmelting tussen deze twee vakgebieden is ook zeer nuttig gebleken in onderzoek in bijvoorbeeld de computationele biologie en de cartografie. Dankzij dit brede scala aan relevante toepassingen zijn er nog veel openstaande vraagstellingen om te verkennen.

Dankwoord

Dit artikel is gebaseerd op gezamenlijk werk met Thomas Erlebach (University of Leicester) [7] en werd deels ondersteund door het BSIK/BRICKS project.

Referenties

1 Arora, S., Lund, C., Motwani, R., Sudan, M., Szegedy, M., "Proof Verification and the Hardness of Approximation Problems", *J. ACM* 45:3 (1998), pp. 501-555.

2 Ausiello, G., Crescenzi, P., Gambosi, Kann, V., Marchetti-Spaccamela, A., Protasi, M., *Complexity and Approximation – Combinatorial Optimization Problems and Their Approximability Properties*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

3 Chazelle, B., Friedman, J., "A Deterministic View of Random Sampling and Its Use in Geometry", *Combinatorica* 10:3 (1990), pp. 229–249.

4 Clark, B.N., Colbourn, C.J., Johnson, D.S., "Unit Disk Graphs", *Discrete Math.* 86 (1990), pp. 165–177.

5 Clarkson, K.L, Varadarajan, K.R., "Improved Approximation Algorithms for Geometric Set Cover", *Discrete Comput. Geom.* 37:1 (2007), pp. 43–58.

6 Erlebach, T., Jansen, K., Seidel, E., "Polynomial-time Approximation Schemes for Geometric Intersection Graphs", *SIAM J. Comput.* 34:6 (2005), pp. 1302–1323.

7 Erlebach, T., van Leeuwen, E.J., "Domination in Geometric Intersection Graphs" in Laber, E.S., Bornstein, C., Nogueira, L.T., Faria, L. (eds.) *Proc. LATIN 2008*, LNCS 4957, Springer-Verlag, Berlin, 2008, pp. 747-758.

8 Feige, U., "A Threshold of $\ln n$ for Approximating Set Cover", *J. ACM* 45:4 (1998), pp. 634–652.

9 Fortnow, L., "The Status of the P versus NP problem", *Comm. ACM* 52:9 (2009), pp. 78–86.

10 Garey, M.R., Johnson, D.S., *Computers and Tractability – A Guide to the Theory of NP-completeness*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.

11 Hale, W.K., "Frequency Assignment: Theory and Applications", *Proc. IEEE* 68:12 (1980), pp. 1497–1514.

12 Hunt, III, H.B., Marathe, M.V., Radhakrisnan, V., Ravi, S.S., Rosenkrantz, D.J., Stearns, R.E., "NC-Approximation Schemes for NP- and PSPACE-Hard Problems for Geometric Graphs", *J. Algorithms* 26:2 (1998), pp. 238–274.

13 Johnson, D.S., "Approximation algorithms for combinatorial problems", *J. Comput. Syst. Sci.* 9:3 (1974), pp. 256–278.

14 Khachiyan, L.G., "A Polynomial Algorithm in Linear Programming", *Soviet Math. Dokl.* 20:1 (1979), pp. 191–194.

15 Marathe, M.V., Breu, H., Hunt, III, H.B., Ravi, S.S., Rosenkrantz, D.J., "Simple Heuristics for Unit Disk Graphs", *Networks* 25 (1995), pp. 59–68.

16 Marx, D., "On the Optimality of Planar and Geometric Approximation Schemes" in *Proc. FOCS 2007*, IEEE, 2007, pp. 338–348.

17 Pyrga, E., Ray, S., "New Existence Proofs for ϵ-nets" in Teillaud, M. (ed.) *Proc. SOCG 2008*, ACM, 2008, pp. 199–207.

18 Schrijver, A., *Combinatorial Optimization – Polyhedra and Efficiency*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

19 Sivakumar, R., Das, B., Bharghavan, V., "An Improved Spine-Based Infrastructure for Routing in Ad Hoc Networks", in *Proc. Intl. Conf. Comput. Comm. Networks*, 1997.

20 van Leeuwen, E.J., *Optimization and Approximation on Geometric Intersection Graphs*, Proefschrift, Universiteit van Amsterdam, 2009.