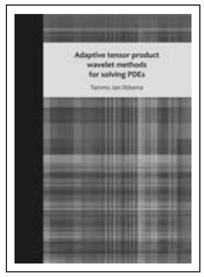
In de verdediging

In defence



Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
G.M.Hek@uva.nl

Adaptive tensor product wavelet methods for solving PDEs
Tammo Jan Dijkema

Wie tussen nu en 2015 een keer een bezoek brengt aan het Universiteitsmuseum in Utrecht kan daar onder andere de tentoonstelling *Boeiende bagage* bekijken. Het museum zegt hierover: “Je gaat de deur uit en neemt mee ... je telefoon en agenda, je bril, pen of potlood, een banaan voor onderweg, deo en een condoom voor het geval dat ... Hele gewone, alledaagse voorwerpen zou je denken.” De mobiele telefoon, met camera wel te verstaan, is het voorwerp waarmee Tammo Jan Dijkema in het museum zijn promotieonderzoek naar benadering met behulp van wavelets illustreert. Op 29 juni promoveerde hij bij Rob Stevenson (UvA) en Henk van der Vorst (UU) aan de Universiteit Utrecht, op een proefschrift getiteld *Adaptive tensor product wavelet methods for solving PDEs*. Zelf noemt Tammo Jan ook meteen de Nederlandse versie van de titel, *Adaptieve tensorproductwaveletmethoden voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen*. Deze vormt namelijk een prachtig voorbeeld bij zijn favoriete stelling bij het proefschrift: “De regels voor spatiegebruik in het Nederlands zorgen voor erg lange woorden. Toch zijn ze te prefereren boven hun Engelse equivalenten, omdat ze ambiguïteit kunnen wegnemen”.

Dimensievloek omzeilen

Bovengenoemde waveletmethoden zijn numerieke methoden voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen. Tammo Jans onderzoek was onder andere gericht op het omzeilen van de zogenaamde *curse of dimensionality* die hierbij een rol speelt. Die dimensievloek legt hij als volgt uit: “Met een normale discretisatie van het domein groeit het aantal rekenpunten N als $N \sim (1/h)^d$, terwijl de afname van de fout maar evenredig is met h^p, waarbij h de afstand tussen de punten is, d de dimensie en p de orde van de methode. Dit betekent dat de fout zich gedraagt als $N^{-\frac{p}{d}}$: hoe hoger de dimensie, des te langzamer de convergentie.”

Op productdomeinen zoals $(0,1)^d$ kan deze curse of dimensionality worden omzeild met een adaptieve waveletmethode die Tammo Jan met Rob Stevenson en Christoph Schwab heeft ontwikkeld. Met die methode gaat de convergentie, onafhankelijk van de dimensie, als N^{-p}. Dit is volgens Tammo Jan het belangrijkste resultaat in zijn proefschrift: omdat de asymptotische convergentie van de waveletmethode onafhankelijk van de dimensie is, kunnen er, in ieder geval asymptotisch, optimaal vergelijkingen mee kunnen worden opgelost in tien dimensies of meer. ‘Gewone’ eindige-elementenmethodes zijn voor meer dan vier dimensies praktisch niet bruikbaar.

Anisotrope tensorproductwaveletbases

Concreter gezegd komt het oplossen van een partiële differentiaalvergelijking neer op het vinden van een u in een Hilbertruimte H die, voor een gegeven $f \in H'$ en een elliptische lineaire operator $A : H \to H'$, voldoet aan $Au = f$. Denk voor A bijvoorbeeld aan de Laplaceoperator, en voor H aan een Sobolevruimte op $(0,1)^d$.

De truuk voor het vinden van een benadering voor u is nu om de onbekende functie u te schrijven als $u = \sum_j \mathbf{u}_j \psi_j$, waarbij $\Psi = (\psi_j)_j$ een basis voor H is en $\mathbf{u}$ een (oneindig lange) vector. Dan is het probleem te schrijven als $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$, met $\mathbf{A}_{ij} = (A\psi_j)\psi_i$ en $\mathbf{f}_i = f(\psi_i)$. Op dit matrix-vectorprobleem kan je nu een benaderende iteratieve methode loslaten. Als Ψ een Riesz-basis is, is de convergentie van de benadering $\tilde{\mathbf{u}}_n$ naar $\mathbf{u}$ equivalent aan convergentie in H van $\tilde{u}_n := \sum_k \tilde{\mathbf{u}}_{n,k}\psi_k$ naar u.

Een belangrijk ingrediënt voor de constructie van een Riesz-basis Ψ voor H is een waveletbasis $\Phi = (\phi_k)_k$ voor $L_2(0,1)$. De basis voor H wordt vervolgens gemaakt door geschaalde tensorproducten van deze basisfuncties te nemen: $\psi_{\vec{k}} = c_{\vec{k}}\phi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{k_d}$. Dit worden erg anisotrope (langgerekte) functies. Omdat op productdomeinen de te benaderen functie veelal ook anisotrope kenmerken heeft, bijvoorbeeld singulariteitein langs een rand, is het gebruik van dergelijke anisotrope functies heel handig.

Waveletmethodes om partiële differentiaalvergelijkingen mee op te lossen zijn in feite een soort eindige-elementenmethodes, waarbij de elementen wavelets zijn. Een essentieel verschil is alleen dat in eindige-elementenmethodes van tevoren een ‘benaderingsruimte’ wordt vastgesteld (bijvoorbeeld stuksgewijs bilineaire functies t.o.v. een of ander rooster), terwijl waveletbases direct een basis vormen voor heel H. Daardoor is convergentie naar de oplossing beter te bewijzen.

Resultaten die echt gebruikt zullen worden

De bewezen optimaliteit van de convergentie geldt alleen asymptotisch. Om een in de praktijk efficiënte methode te maken, is meer nodig. In veel schattingen speelt het zogenaamde conditiegetal van de stijfheidsmatrix namelijk een rol. Hoe kleiner dat conditiegetal, des te beter het kwantitatieve gedrag van de methode. Het conditiegetal van de tensorproductbasis groeit als het conditiegetal van de eendimensionale basis tot de macht van de dimensie. Dus het is handig als de eendimensionale basis goed geconditioneerd is, ofwel, een conditiegetal dichtbij 1 heeft (een conditiegetal 1 betekent dat het om een orthogonale basis gaat). Sterker nog, om naar echt hoge dimensies te gaan moet je wel beginnen met een orthogonale basis in een dimensie.

Tammo Jan heeft een basis gemaakt die een veel kleiner conditiegetal heeft dan tot nu toe bekende bases, maar wel de voordelen van waveletbases heeft. Hij voelt zich gevleid dat hij gevraagd werd om een hoofdstuk van zijn proefschrift te presenteren aan een Duitse universiteit, waar ze zijn wavelets willen toepassen in een computerprogramma voor financiële wiskunde. Geweldig dat de resultaten daadwerkelijk gebruikt gaan worden!

Leuke en moeilijke aspecten van het aio-schap

Het leven als aio vond Tammo Jan erg leuk; de combinatie van onderwijs geven, prutsen aan onderzoek, en conferenties bezoeken en praatjes geven beviel hem goed. Sommige aspecten sprongen er echter uit. Behalve het feit dat zijn resultaten echt gebruikt zullen worden en dat er een poster over zijn onderzoek in het universiteitsmuseum hangt, verscheen er ook nog een stukje over een lunchprojectje over voetbalplaatjes in dagblad *De Pers* [1]. Naar aanleiding van dat laatste stond hij ook in het universiteitsblaadje en was hij zelfs op Radio Rijnmond.

Met zijn promotor Rob Stevenson heeft hij erg actief samengewerkt. Toen Rob naar Amsterdam vertrok, is Tammo Jan ook steeds meer daar gaan werken, omdat hij het fijn vond om even snel te kunnen overleggen. Het pendelen naar Amsterdam was voor hem geen enkel probleem. Het was zelfs wel zinnig: in Utrecht was het soms een beetje te gezellig om efficiënt te schrijven, terwijl hij in Amsterdam een iets teruggetrokkener bestaan leidde. Overigens was die gezelligheid in Utrecht in de eerste jaren zeker niet slecht: met veel van zijn collega-aio’s heeft hij kleine probleempjes uit zijn werk opgelost.

Tammo Jan vond het wel moeilijk om zo lang motivatie op te brengen voor één project. Al organiseerde hij als aio de Studiegroep Wiskunde met de Industrie en gaf hij praatjes voor ouderdagen, voorlichtingsdagen en conferenties, toch zoekt hij in zijn volgende baan iets meer afwisseling. Op het moment van schrijven was hij aan het solliciteren in het bedrijfsleven: na tien jaar universiteit wil hij wel eens kijken wat er verder nog te doen is.

Referenties

1. http://www.tammo80.nl/weblog/?p=1164

De poster over Dijkema’s onderzoek in het Universiteitsmuseum in Utrecht