Jan Hogendijk
Mathematisch Instituut,
Universiteit Utrecht
Postbus 80.010
3508 TA Utrecht
J.P.Hogendijk@uu.nl

Bernouillilezing 2009

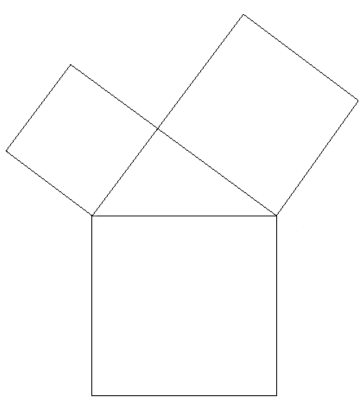
Arabische astrologie en West-Europese wiskunde

Wiskunde, dat is toch iets met stellingen en bewijzen? Zelfs de minst wiskundig-onderlegden zijn het daar nog wel over eens. Maar waar komt het werken met stelling en bewijs vandaan? En hoe en wanneer is men dit in West-Europa gaan doen? Jan Hogendijk, hoogleraar geschiedenis van de wiskunde, is specialist in de wis- en sterrenkunde in het middeleeuws islamitisch cultuurgebied. Dit artikel is een verkorte versie van zijn Bernoulli-lezing in Groningen, uitgesproken op 14 april van dit jaar.

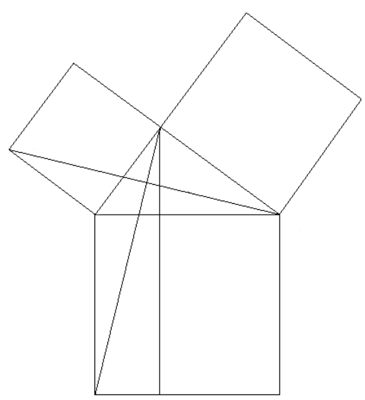
De opvatting dat wiskunde te maken heeft met theorieën, stellingen en bewijzen is in de vijfde en vierde eeuw voor Christus in de Griekse cultuur ontstaan. In de *Elementen* van Euclides (circa 300 voor Christus) wordt de meetkunde helemaal op deze manier opgebouwd. Euclides begint met definities, axioma's en postulaten. In de definities legt hij de betekenis van termen vast, zoals cirkel, rechte hoek, en evenwijdig. De axioma's en postulaten zijn onbewezen aannamen, zoals: het geheel is groter dan een deel, door twee punten gaat een rechte lijn, en alle rechte hoeken zijn gelijk. Daarna behandelt Euclides meer dan 450 stellingen en constructies. Hij leidt deze allemaal met logische redeneringen af uit zijn axioma's en postulaten en uit de stellingen en constructies die hij al eerder behandeld heeft. Wij kijken tegenwoordig op een andere manier naar axioma's en constructies dan Euclides, maar bewijzen zijn in de huidige wiskunde nog steeds wezenlijk, en de theoretische diepgang van de *Elementen* is indrukwekkend (zie bijvoorbeeld [8]). Ook andere Griekse auteurs hadden '*Elementen*' geschreven, maar Euclides heeft deze concurrentie weggevaagd. In de rest van de Griekse oudheid was zijn boek het fundament van een groot deel van de wiskunde.

De kunst van het wiskundig bewijzen is op een ingewikkelde manier en met een omweg bekend geworden in West-Europa. In dit artikel bespreken we dit proces in zijn historische context. We zullen het verhaal af en toe illustreren aan de hand van de stelling van Pythagoras, die in de *Elementen* voorkomt als stelling 47 van boek 1. De meeste lezers kennen de stelling van Pythagoras in een moderne notatie: in een rechthoekige driehoek met zijden a, b en c geldt $a^2 + b^2 = c^2$.

De kwadraten a^2, b^2 en c^2 waren voor de Grieken echte vierkanten. De stelling van Pythagoras is in de woorden van Euclides (zie figuur 1): "in rechthoekige driehoeken is het vierkant op de schuine zijde gelijk aan de vierkanten op de rechthoekszijden."

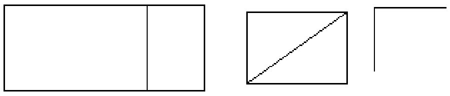


Figuur 1



Figuur 2

De Romeinen waren geïnteresseed in praktisch landmeten, maar ze hadden geen belangstelling voor de theoretische Griekse wiskunde op de manier van Euclides. Pas na de val van het West-Romeinse rijk werden de eerste zes boeken van de *Elementen* door Boethius (circa 500 na Chr.) in het Latijn vertaald. Kort daarna stortten de cultuur en de wetenschap in West-Europa in, om pas in de tijd van Karel de Grote (742-814) weer op te leven. Aan kathedralen en kloosters werden scholen verbonden, waarin aanstaande geestelijken les kregen, niet alleen in geestelijke zaken maar ook in de zeven 'vrije kunsten'. Drie hiervan waren de *arithmetica, geometria* en *astronomia*. We moeten ons niet te veel illusies maken over dit onderwijs. De vertaling van Boethius was alleen een zeer verkorte samenvatting, met daarin de definities, postulaten, constructieopgaven en stellingen. De uitwerkingen van de constructies en de bewijzen zijn weggelaten, en daardoor is de samen-



Figuur 3

hang van de tekst verdwenen. Laten we twee voorbeelden bekijken. We vinden de Stelling van Pythagoras, als in het citaat van Euclides hierboven, en een figuurtje (figuur 2), met hulplijnen die ooit in het bewijs gebruikt waren. Het bewijs zelf is verdwenen. Sommige stellingen waren zo verbasterd dat ze niet meer begrijpelijk waren. Zo werd propositie 45 van boek 1 weergegeven als het “beschrijven van een parallellogram gelijk aan een gegeven rechtlijnige hoek, in een gegeven rechtlijnige hoek, dat is de diameter.” Het bijgeleverde figuurtje (figuur 3) helpt niet om dit begrijpelijk te maken [9], en de Latijnse samenvatting geeft geen verdere informatie.

We kunnen concluderen dat de techniek van het wiskundige bewijzen in het Europa van Karel de Grote onbekend was; en het is nog maar de vraag of de samenvatting van Boethius op alle kloosterscholen onderwezen werd. Om het verdere historisch proces te volgen moeten we nu eerst aandacht besteden aan de sterrenkunde.

Het begin van de sterrenkunde in Europa

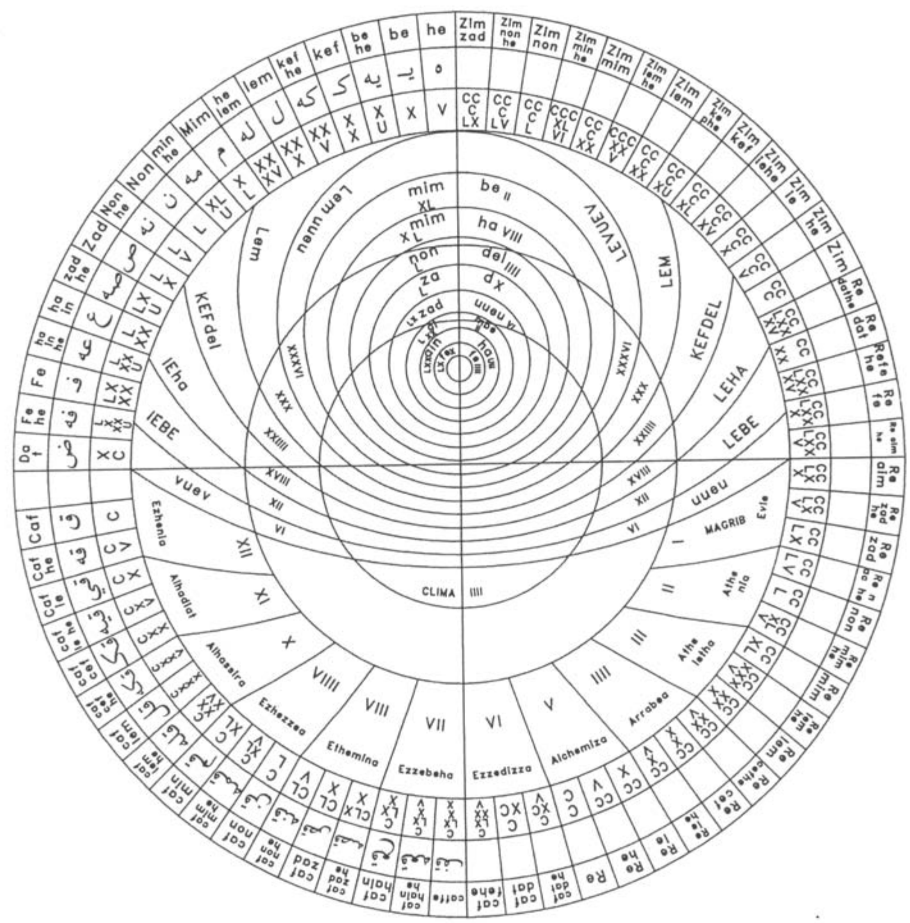
De wis- en sterrenkunde stonden op de kloosterscholen vooral in dienst van het berekenen van de paasdatum. Pasen valt op de eerste zondag na de eerste volle maan na het begin van de lente. De dag van de volle maan werd berekend met een schematische maankalender, gebaseerd op de aanname dat 19 zonnejaren precies gelijk zijn aan 235 perioden tussen twee nieuwe manen. Preciezere methoden waren niet bekend. De leerlingen werden ook onderwezen in de bolvorm van de aarde, en de verklaring van de seizoenen en de maanfasen. Zo ontstond er in de kloosterscholen belangstelling voor sterrenkunde.

In de tiende eeuw kwam de studie van de wis- en sterrenkunde en astrologie in islamitisch Spanje op gang [2]. In het islamitische Midden-Oosten was men al anderhalve eeuw eerder begonnen, en veel literatuur was aldaar uit het Grieks in het Arabisch vertaald. De eerste twee eeuwen bleef de islamitische wetenschap voor christelijk Europa grotendeels een gesloten boek. Wel maakten de kloostergeleerden kennis met een fraai sterrenkundig instrument uit islamitisch Spanje, het astrolabium (zie figuur 5). Dit is een rond metalen instrument, niet groter dan circa 30 cm, met als belangrijkste onderdelen de spin en de plaat. De spin is een stereografische projectie van de hemel, met sterren en en dierenriem, vaak fraai vormgegeven en opengewerkt. De plaat bevat een stereografische projectie van de horizon en hoogtecirkels, en in het lege gedeelte onder de horizon staan lijnen die de uren van de nacht weergeven. De spin draait om een as (die de hemelnoordpool voorstelt) over de plaat, en op deze manier kan het opgaan en ondergaan van hemellichamen worden gesimuleerd. Een plaat is altijd van toepassing op slechts één breedtegraad op aarde; daarom hadden de meeste astrolabia diverse platen voor verschillende breedtegraden.

In de elfde eeuw werden Arabische astrolabia in Latijnse handschriften nagetekend. Figuur 4 is een getrouwe weergave van zo’n tekening die in Frankrijk is gemaakt, vermoedelijk in de Benedictijner Abdij van Fleury aan de Loire [13]. We zien in de tekening de plaat van een astrolabium voor ‘clima IIII’, dat wil zeggen, voor ongeveer 36 graden noorderbreedte, veel zuidelijker dan Frankrijk. De tekenaar kende zelf weinig Arabisch maar hij heeft sommige Arabische inscripties zo goed nagetekend dat ze nog leesbaar zijn. Andere Arabische woorden en letters (die getallen aanduiden) zijn in Latijns schrift weergegeven. Deskundige lezers kunnen allerlei fouten in de tekening ontdekken. De kloostergeleerden wisten hoe het astrolabium gebruikt kon worden om de tijd te meten, maar begrepen lang niet alles van de constructie en de theoretische achtergrond. Zij werden wel geïntrigeerd door deze voortbrengselen van ‘Arabische’ wetenschap, en beseften dat in islamitisch Spanje nog veel op dit gebied te halen was.

Wiskunde in middeleeuws islamitisch Spanje

We onderbreken het verhaal nu even voor een overzicht van de middeleeuwse islamitische wiskunde. Deze kan globaal in twee soorten worden onderscheiden, die ik voor het gemak ‘lager’ en ‘hoger’ zal noemen [15]. ‘Lagere’



Figuur 4 Elfde-eeuwse tekening van een plaat van een astrolabium.

Figuur 5 Replica van een astrolabium dat in 1029 in Zaragoza werd vervaardigd

wiskunde bestond uit praktisch rekenen en meetkunde nodig voor landmeten en architectuur. Er bestonden handboekjes waarin allerlei regels en constructievoorschriften werden uitgelegd, soms met getallenvoorbeelden, maar altijd zonder bewijzen.

Tot de 'hogere' wiskunde behoorde in de eerste plaats de inhoud van de boeken 1–6 en 11–13 van de *Elementen* van Euclides, inclusief de bewijzen. Dit was een voorbereidende studie voor meetkunde van de bol, trigonometrie in het vlak en op de bol, methoden voor het berekenen van sinustabellen, en allerlei andere onderwerpen in de sfeer van de Griekse wiskunde. Een voorbeeld hiervan is de stereografische projectie, die noodzakelijk is om alle lijnen en cirkels op het astrolabium precies te tekenen. In Spanje was op dit gebied een behoorlijk niveau bereikt. De 'hogere' wiskunde had twee soorten toepassingen:

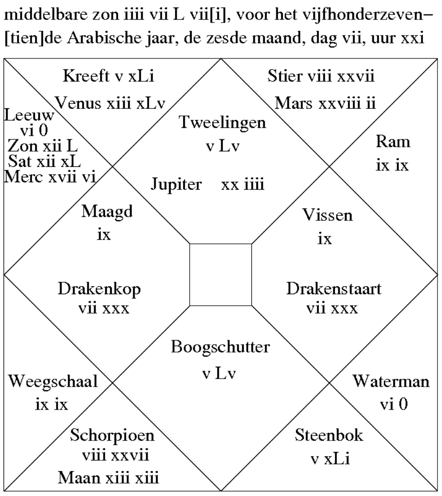
- Islamitische toepassingen, zoals het bepalen van de richting naar Mekka, het berekenen van gebedstijden, en het voorspellen van de eerste zichtbaarheid van de maansikkel. Deze toepassingen waren in de praktijk niet erg belangrijk. Zelfs bij het bouwen van moskeeën hield men in Spanje geen rekening met de wiskundige berekeningen van de richting van Mekka.
- Toepassingen in de tijdmeting, de sterrenkunde en de astrologie. Af en toe kwamen er aanvallen vanuit islamitische theologische hoek, omdat de astrologie in strijd zou zijn met de almacht van God. Maar voor de wiskunde en sterrenkunde konden zulke aanvallen gepareerd worden met de islamitische toepassingen van het vorige punt.

Omdat de astrologie de belangrijkste toepassing was, zullen we er in dit artikel wat uitgebreider op ingaan. De astrologie was gebaseerd op het geloof (dat trouwens ook nu nog springlevend is) dat de standen van de hemellichamen in relatie staan met gebeurtenissen op aarde. Voor de zon en maan is het duidelijk dat die het leven op aarde beïnvloeden, en men nam aan dat van de overige planeten ook invloeden zouden kunnen uitgaan, of in elk geval dat het ritme van het leven op aarde analoog is aan dat van de planeten. De astrologische interpretatie werd altijd gebaseerd op de precieze stand van hemellichamen op een bepaald moment. Een astroloog moest dus in staat zijn, deze standen voor elk gegeven moment uit te rekenen, en hoe preciezer hij dit deed, des te beter de voorspelling. Dit leidde tot een vraag naar nauwkeurige sterrenkundige tabellen. Een middelmatige astroloog had in principe genoeg aan deze tabellen en wat rekenvaardigheid. De meeste tabellen hadden echter een beperkte nauwkeurigheid en houdbaarheid. Als er een zonsverduistering was, bleek er vaak een verschil te zijn tussen het waargenomen en het voorspelde tijdstip van de verduistering en ook tussen waargenomen en voorspelde grootte. Ook namen de verschillen tussen waargenomen en voorspelde planeetstanden meestal toe met de tijd.

Bij het herzien van tabellen op grond van waarnemingen moesten ingewikkelde meetkundige problemen worden opgelost met methoden uit de *Elementen* van Euclides. In Spanje werd dit soort werk in de elfde eeuw onder andere in Toledo gedaan, enkele decennia voordat deze stad door de christenen veroverd werd. Er bestond zelfs een standaard studieprogramma voor de leerling die zich op dit gebied wilde bekwamen. Eerst moest de noodzakelijke rekenvaardigheid worden aangeleerd. Dan werd begonnen met de studie van een Arabische versie van de *Elementen* van Euclides, in elk geval de boeken 1 tot en met 6, en 11 tot en met 13. Daarna bestudeerde de leerling een paar boeken uit de categorie van de 'middelste boeken', bijvoorbeeld de *Data* van Euclides, de *Cirkelmeting* van Archimedes (circa 250 v. C.), de *Sferica* van Theodosius van Bithynië (circa 100 v. C.) over de bol, alle drie in een Arabische versie, en minstens één boek over boldriehoeksmeetkunde, bijvoorbeeld van Thabit ibn Qurra (circa 870). Daarna ging hij (bijna nooit zij) aan de slag met een of meer boeken over sterrenkunde. Een goede theoretische basis was te vinden in de *Almagest* van Ptolemaeus (circa 150 n. C.), waarin de hele sterrenkunde inclusief planeetbewegingen wordt opgebouwd in de stijl van de *Elementen* van Euclides. Het theoretisch kader van de *Almagest* was nog grotendeels geldig, maar het boek was lang en moeilijk, en veel tabellen waren 700 jaar na Ptolemaeus niet meer bruikbaar. Daarom werd de studie van de *Almagest* gecombineerd met andere boeken en tabellenwerken uit de negende, tiende en elfde eeuw na Christus. Natuurlijk hoorde het astrolabium ook tot het leerprogramma. Voor de would-be astroloog restten dan nog een stel dikke pillen over astrologische interpretatie, meestal van Arabische auteurs. Deze werken waren ook zonder de 'harde' wiskundige en sterrenkundige vooropleiding toegankelijk, maar dan werd men wel astroloog van lager allooi. Meer vooropleiding betekende een nauwkeuriger berekening van horoscopen, en daardoor vaak betere klandizie. Zo zorgde de astrologie voor een maatschappelijke inbedding van de sterrenkunde en de 'hogere' wiskunde. Natuurlijk waren er ook geleerden die vooral geïnteresseerd waren in wiskunde en sterrenkunde en die niet in astrologie geloofden. Algemeen werd erkend dat de astrologie minder zeker was dan wis- en sterrenkunde.

De vertalingen in de twaalfde eeuw

In 1085 veroverden de christenen zonder bloedvergieten de stad Toledo. Hierdoor viel het belangrijkste centrum van de islamitische wetenschap in Spanje in christelijke handen. Een aantal islamitische geleerden vertrok, maar veel Arabische boeken bleven achter. Onder beschermheerschap van de plaatselijke aartsbisschop werden in de twaalfde eeuw veel teksten uit het Arabisch in het Latijn vertaald. Ook in andere centra werden vertalingen gemaakt. De twee meest productieve vertalers van wiskundige en sterrenkundige werken waren de Engelsman Adelard van Bath (circa 1080-1150) en de Italiaan Gerard van Cremona (1114-1187). Deze laatste werkte aan de kathedraal van Toledo en vertaalde meer dan 70 Arabische teksten, niet alleen voor gebruik ter plaatse maar ook voor export naar de rest van christelijk Europa [5]. In dit verhaal houden wij ons vooral bezig met Adelard van Bath, omdat over diens wetenschappelijke opvattingen meer bekend is. Adelard werd geboren in Engeland, studeerde in Frankrijk, en reisde daarna naar het Midden Oosten. Hij leerde daar Arabisch en studeerde er diverse wetenschappen. Terug in Engeland vestigde hij zich in Bath. Of hij zelf in Spanje is ge-



Figuur 6 Engelse horoscoop, berekend circa 1160

weest, is niet bekend; wel weten we dat hij teksten uit dat gebied heeft vertaald.

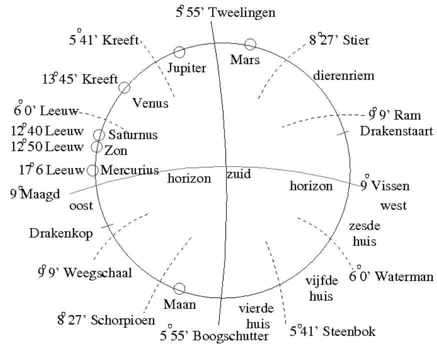
De bedoeling van Adelard van Bath en Gerard van Cremona was een zodanige hoeveelheid literatuur uit het Arabisch in het Latijn te vertalen, dat wiskunde, sterrenkunde en astrologie in christelijk Europa op dezelfde manier zouden kunnen worden bestudeerd als in de islamitische wereld (in het bijzonder islamitisch Spanje). Bij Gerard kunnen we een deel van dit programma terugzien in de enorme lijst van zijn vertaalde werken (hij vertaalde daarnaast ook nog veel van Aristoteles). Adelard heeft zijn opvattingen expliciet uiteengezet in een brief aan een (fictieve) neef [1]. Hij voert hierin de zeven vrije kunsten op als zeven vrouwen. De *geometria* krijgt van de zeven de meeste bladzijden tekst, maar zij is kleiner dan de *astronomia*, die volgens Adelard de mooiste vrouw is van de zeven. Zij heeft een astrolabium in de hand, en wat zij allemaal omvat is niet uit te leggen aan iemand die geen specialist is. Adelard legt uit dat als iemand haar voor zich kon winnen, hij niet alleen de huidige situatie van de dingen op aarde zou kennen maar ook het verleden en de toekomst ervan. Elders vermeldt hij, onder verwijzing naar Plato, dat de mens de toekomst kan voorspellen vanwege de eeuwigheid van zijn ziel.

Dat het werk van Adelard en zijn collega's al snel enig resultaat heeft gehad, blijkt uit een groep van tien horoscopen die omstreeks 1160 in Zuid-Engeland zijn berekend. Deze horoscopen zijn bewaard op twee oude stukken perkament, en ze zijn geanalyseerd door John North (1934-2008), jarenlang hoogleraar aan de Universiteit van Groningen. Figuur 6 is een van deze horoscopen in vertaling. We bespreken deze horoscoop hier kort om de lezer een concreet idee te geven van de hoeveelheid wiskunde die nodig is voor de beoefening van de astrologie [3].

De twaalf driehoeken in de horoscoop komen overeen met de twaalf astrologische 'huizen' (die niet hetzelfde zijn als de twaalf tekens van de dierenriem Ram, Stier, enz.) De getallen worden weergegeven in Romeinse cijfers, en ook is linksboven en rechtsonder een 0 zichtbaar.

Figuur 7 is een schets van de situatie aan de hemel die in de horoscoop van Figuur 6 wordt weergegeven. In de figuur is de hele ecliptica te zien, dat wil zeggen de schijnbare baan die de zon gedurende een jaar doorloopt tegen de achtergrond van de vaste sterren. De maan en de planeten zijn altijd in de buurt van de ecliptica te vinden. De ecliptica is verdeeld in de twaalf bekende tekens Ram tot en met Vissen, die elk 30 graden lang zijn. Het begin van de Ram is per definitie het snijpunt met de hemelevenaar waar de zon van het Zuidelijk halfrond naar het Noordelijk halfrond gaat. Deze overgang geeft het begin van de lente aan, en het begin van de Ram heet dan ook lentepunt.

De ecliptica wordt in vier kwadranten verdeeld door het vlak van de horizon en het vlak van de meridiaan, dat verticaal door het Noorden en Zuiden gaat. De twee snijpunten met de horizon zijn in de horoscoop het punt 9 graden Maagd, dat opgaat in het Oosten, en het punt 9 graden Vissen, dat ondergaat in het Westen. Het punt 5 graden 55 minuten Tweelingen staat precies in het Zuiden, dus in het meridiaanvlak boven de horizon; en 5 graden 55 minuten Boogschutter staat in het meridiaanvlak onder de horizon. Elk van de vier kwadranten kon op verschillende manieren worden onderverdeeld in drie astrologische huizen. Het berekenen van huizen (volgens verschillende systemen) was een favoriet onderzoeksthema in islamitisch Spanje; we zullen de lezer de details besparen. Als we de hemel voorstellen als een grote bol met onszelf in het midden, kunnen we de verdeling van deze hemelbol in de 12 huizen vergelijken met de verdeling van een sinaasappel in 12 partjes. De grenzen tussen de huizen zijn in figuur 7 met stippellijnen aangeduid. Het eerste huis is vlak onder de Oostelijke horizon en de huizen worden genummerd tegen de wijzers van de klok in. Elk huis heeft een astrologische interpretatie: omdat in deze horoscoop de zon, Saturnus en Mercurius in het twaalfde huis staan, hebben zij bijvoorbeeld iets te maken met vijanden. Om de astrologische huizen te vinden was meestal een indrukwekkende trigonometrische berekening nodig. Er was dus wiskundig werk aan de winkel.



Figuur 7 De hemellichamen en huizen in de horoscoop

Vanuit de waarnemer gezien draait de hele sterrenhemel, samen met alle tekens van de dierenriem, een maal per dag om de aarde [16]. Dit betekent dat het punt '9 graden Maagd' maar even aan de horizon staat; een paar minuten later komt het punt 10 graden Maagd op, enzovoort. Ook de grenzen van de huizen veranderen in hetzelfde snelle tempo: een planeet die nu in het twaalfde huis staat, zal over circa twee uur in het elfde huis staan. Voor de astroloog is het daarom belangrijk precieze tijdsaanduidingen te hebben, want de astrologische interpretatie van de hemel verandert van minuut tot minuut.

De horoscoop van figuur 6 blijkt inderdaad overeen te komen met de stand van de hemellichamen op een bepaald moment, namelijk op 1 augustus 1123 in de ochtend [4]. De fouten in de planeetstanden zijn niet meer dan een paar graden. Dat het hier om berekeningen en niet om waarnemingen gaat, is aan twee dingen duidelijk: ten eerste kon men in de Middeleeuwen de planeetstanden niet in boogminuten nauwkeurig waarnemen, en ten tweede was de zon op dat moment het enige zichtbare hemellichaam. Het blijkt dat de huizen en ook de positie van de zon zijn berekend met de *Tabellen van Toledo*. Dit sterrenkundig handboek is omstreeks 1070 samengesteld, kort voor de verovering van de stad door de christenen, en het is in de twaalfde eeuw in het Latijn vertaald [14]. Omdat in de *Tabellen van Toledo* de islamitische kalender gebruikt wordt, moest de astroloog eerst de datum (1 augustus 1123 in de ochtend) omrekenen in de islamitische kalender. Het resultaat staat boven de horoscoop aangegeven als uur 21 van de 7e dag van de 6e maand van het jaar 507 (dit is een schrijffout, het moet zijn: 517). In de *Tabellen van Toledo* begint de dag om 12 uur 's middags, dus '21 uur' komt overeen met 9 uur 's ochtends.

Er staat geen astrologische interpretatie bij de horoscoop, maar ik kan wel een gokje wagen. Op hetzelfde stukje perkament staat een tweede horoscoop, van 16 september 1151, en hierbij staat het advies aan de koning om zijn baronnen te dwingen eer te bewijzen aan zijn zoon [11–12]. Misschien is de horoscoop voor 1 augustus 1123 negen uur 's ochtends de geboortehoroscoop van deze zoon.

De horoscopen zijn historisch belangrijk omdat zij laten zien dat de vertalingen door Adelard van Bath en anderen in Europa al snel succes hadden: een Engelse astroloog was omstreeks 1160 in staat zelfstandig berekeningen uit te voeren voor een specifiek Engelse situatie.

De vertalingen van de *Elementen*

Nu we iets van de historische context van de vertalingen behandeld hebben, kunnen we een kleine greep doen uit de Latijnse vertalingen van de *Elementen* zelf. In de vertaling van Adelard van Bath worden alle stellingen en bewijzen compleet weergegeven, dus ook de stelling van Pythagoras. Een verschil met de Griekse tekst is de oriëntatie van de figuur. In figuur 8 staat links de Griekse figuur, rechts die van Adelard. De Arabische vertalers in de negende eeuw hadden de figuren gespiegeld om ze aan hun schrijfrichting aan te passen [17], maar Adelard liet de figuren in de Arabische oriëntatie staan.

Zoals beloofd, behandelen we nu het bewijs van de stelling van Pythagoras in de vertaling van Adelard. In deze vorm werd dit bewijs in de twaalfde eeuw voor het eerst in West-Europa bekend [6]. Euclides trekt een loodlijn aml en de twee hulplijnen ad en gH. Hij merkt eerst op dat za en ag op een rechte lijn liggen, die evenwijdig is met Hb. Daarna laat hij zien dat in de driehoeken abd en Hbg, twee zijden en de ingesloten hoek gelijk zijn. Daarom zijn deze driehoeken gelijk; hiermee bedoelt Euclides dat ze gelijke oppervlakte hebben. Omdat zag evenwijdig is aan Hb, is vierkant $azHb$ twee maal driehoek Hbg (wij zouden kunnen zeggen, dat de oppervlakte van vierkant $AzHb$ twee maal de oppervlakte van driehoek Hbg is, omdat de basis en de hoogte gelijk zijn). Omdat al en bd evenwijdig zijn, is rechthoek $bdlm$ twee maal driehoek abd. Daarom is vierkant $azHb$ gelijk aan rechthoek $bdlm$. Met dezelfde redenering volgt dat vierkant $agkt$ gelijk is aan rechthoek $lmgh$. De conclusie is dat de som van de twee kleine vierkanten $azHb$ en $agkt$ gelijk is aan het grote vierkant $bdhg$. De stelling is hiermee bewezen.

De vertaling van Adelard werd omstreeks 1160 omgewerkt, vermoedelijk door Robert van Chester. Robert liet in de boeken 1 tot 6 van de *Elementen* de bewijzen weg, en ook de letters die Euclides en Adelard hadden gebruikt om punten in de figuur aan te geven. Vermoedelijk heeft hij daarna aanwijzingen toegevoegd om de figuur te tekenen; zulke aanwijzingen zijn in veel handschriften bewaard. Bijvoorbeeld bij de Stelling van Pythagoras moet de lezer volgens Robert het volgende doen met Figuur 1:

"Vanuit de rechte hoek van deze driehoek trek drie rechte lijnen naar een basis van het grote vierkant: een loodlijn, en twee schuine zijden naar twee uiteinden. Trek daarna uit de twee overige hoeken van de driehoek en binnen de driehoek naar de twee hoeken van de kleinere vierkanten twee rechte lijnen, die elkaar op hun beurt snijden."

Hierop volgen aanwijzingen om het bewijs te vinden: "Dan gebruik je de 14e (d.w.z. stelling 14 van boek 1) twee maal. Uit de 4e twee maal, en de 41e twee maal en nog eens twee maal, haal je het argument" [7].

Robert zegt niet waarom hij deze wijzigingen heeft aangebracht. De meeste historici geven als verklaring dat hij de bewijzen minder belangrijk vond dan de stellingen; maar het lijkt mij ook mogelijk dat hij de zelfwerkzaamheid van zijn lezer wilde stimuleren. In de middeleeuws islamitische wiskunde heb ik nergens zo'n aanpak gezien, maar wel in de *Grondbeginsels der Meetkunde* van Jan Hendrik Van Swinden (1790), een boek dat in het begin van de negentiende eeuw in Nederland populair was. Over didactiek van de wiskunde in de twaalfde eeuw zou nog veel interessants uit te zoeken zijn.

Om een ander verschil tussen Adelard en Robert te illustreren, bekijken we de constructie van de regelmatige dodecaëder uit Boek 13 van de *Elementen*.

Adelard vertaalt: "Nunc demonstrandum est quomodo fiat figura solida xii *alkaidarum* contenta in *alkoram* assignatam ..."

Als Latijn door Nederlands wordt vervangen maar Arabisch blijft staan komt er:

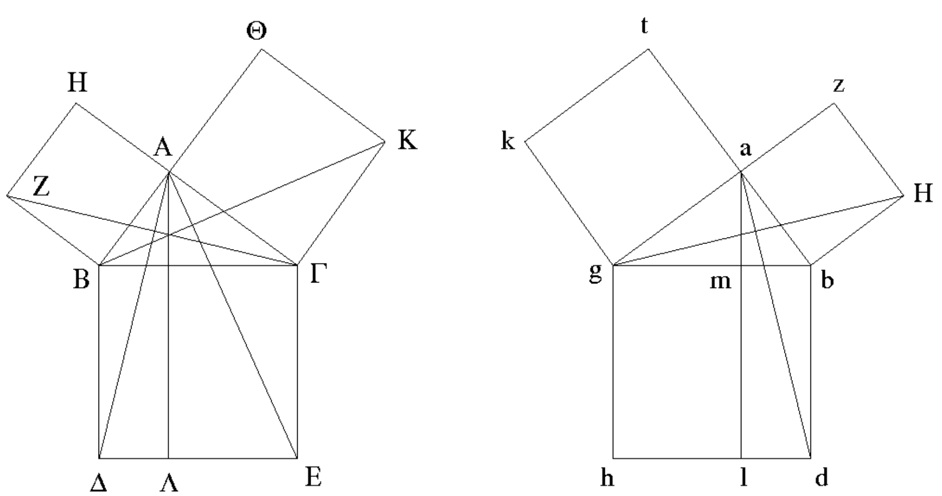
"Nu moet worden aangetoond hoe een lichaam van 12 *alkaidas* gemaakt wordt, dat bevat is in een gegeven *alkora*, en er moet worden aangetoond dat de zijde van het lichaam een irrationale lijn is, die *elmunfascel* genoemd wordt.

Laten ab, ag twee zijvlakken zijn van een *elmukaab* die in de gegeven *alkora* bevat is, en laat de zijde van de *elmukaab* rationaal zijn ..." [6]

Het woord al-kaida, dat tegenwoordig helaas zeer bekend is, betekent basis of, in deze context, zijvlak; en een lichaam 'van 12 alkaidas' is een vertaling van een Arabische vakterm die 'regelmatig twaalfvlak' betekent. Alkora betekent bol, en de constructie begint met een elmukaab, dat is de kubus, die in een eerdere propositie in dezelfde bol beschreven werd.

Robert verving al deze Arabismen door Latijnse woorden, en hier liet hij de ingewikkelde constructie en het bewijs helemaal staan. Hij merkt nog op dat je de twee zijvlakken van de kubus kan voorstellen door een vel met twee vierkanten onder een rechte hoek te vouwen [7]. Dat moet een echt vel geweest zijn — dus een stuk perkament — omdat papier in die tijd in West-Europa nog niet gemaakt werd. Blijkbaar wilde Robert zijn lezer aanmoedigen een aanschouwelijke voorstelling te maken.

De vertaling van Adelard was zeldzaam maar de versie van Robert was een eeuw lang (tussen 1150 en 1250) wijd verspreid, en is in wel 59 manuscripten bewaard. Het lijkt erop dat Gerard van Cremona toegang had tot de



Figuur 8 Figuren bij Euclides (links) en Adelard

versie van Robert en het lastig vond dat de bewijzen niet allemaal waren opgenomen. In elk geval maakte Gerard in Toledo zijn eigen vertaling waar de bewijzen wel weer helemaal in stonden.

Voorzover ik kan beoordelen hebben zowel Adelard als Gerard de stof in de *Elementen* van Euclides goed begrepen. Gerard had in Toledo een groep mensen om zich heen die zich ook inhoudelijk met wis- en sterrenkunde bezighielden. Het is waarschijnlijk dat Adelard en Gerard allebei wiskundig onderwijs hebben genoten van leraren in de islamitische wetenschappelijke traditie - dit hoeven geen moslims geweest te zijn, maar het kunnen in het geval van Gerard ook joodse leraren geweest zijn of tot het christendom bekeerde ex-moslims. Een aanzienlijke minderheid van de 'islamitische' wis- en sterrenkundigen bestond uit christenen, joden en aanhangers van andere religies. Er is een passage bekend waarin Adelard zijn 'Arabische meesters' noemt. Hij zegt dat deze meesters zich door rationele argumenten lieten leiden, terwijl zijn West-Europese leraren aan de leiband liepen van zogenaamde autoriteiten [1].

De dertiende eeuw en verder

Vanaf de dertiende eeuw werden gedeelten van de *Elementen* onderwezen aan de nieuw opgerichte universiteiten. Dit onderwijs hield verband met Aristotelische filosofie. De belangrijke theoloog Albertus Magnus schreef rond 1255 in dit kader een commentaar op Boek 1 van de *Elementen*. Uit dit commentaar blijkt dat hij van de wiskundige leerstof heel wat minder begreep dan de vertalers uit de twaalfde eeuw [10].

In de dertiende eeuw vinden we ook de eerste sporen van wiskundige en sterrenkundige creativiteit in christelijk Europa, bij personen die in nauw contact stonden met de islamitische wereld. Aan het hof van Alfonso de Wijze (alweer in Toledo) werd omstreeks 1260 een nieuwe verzameling sterrenkundige tabellen samengesteld, door een team van voornamelijk joodse geleerden. De belangrijkste dertiende-eeuwse wiskundige was Leonardo Fibonacci uit Pisa (circa 1170-1240). Deze heeft op diverse plaatsen in de islamitische wereld wiskunde bestudeerd. Hij deed creatieve wiskunde, maar het soort problemen waaraan hij werkte werd nog wel bepaald door de islamitische wiskunde [18]. In de veertiende en vijftiende eeuw gingen de wis- en sterrenkunde in Europa langzamerhand hun eigen weg.

In 1533 werd de Griekse tekst van de *Elementen* van Euclides in West-Europa voor het eerst gedrukt. Vaak wordt vergeten dat de inhoud van de Elementen, en ook de methode van het wiskundig bewijzen, in Europa toen allang bekend waren. Dit is te danken aan de vertalingen uit het Arabisch in het Latijn in de twaalfde eeuw, en de contacten tussen de islamitische wetenschap en Europa. Juist in de moderne tijd is deze geschiedenis het waard om te onderzoeken en bekend te maken.

Dankwoord

Ik dank Prof.dr. F. Sezgin (Frankfurt) voor de toestemming om Figuur 4 te reproduceren, en Eric van Lit (Montreal) voor zijn commentaar op een eerdere versie van dit artikel.

Noten

1. *Adelard of Bath: Conversations with his Nephew: On the Same and the Different, Questions on Natural Science and On Birds*, edited and translated by Charles Burnett, Cambridge: Cambridge University Press, 1998, pp. 69, 103, 151.
2. Wij zullen het woord 'Spanje' aangeven om een gebied aan te duiden, hoewel dit eigenlijk niet juist is, omdat het koninkrijk Spanje pas rond 1500 ontstond. Het is historisch correcter het Arabische woord 'Al-Andalus' te gebruiken, dat echter een veel groter gebied omvatte dan het huidige Andalusië.
3. Zie voor de analyses van de horoscopen en de reproducties van het perkament [11] en [12] .
4. Volgens North ([11], [12]) was het 2 augustus.
5. Charles Burnett, The Coherence of the Arabic-Latin Translation Program in Toledo in the Twelfth Century, *Science in Context* 14 (2001), 249-288.
6. H.L.L. Busard, *The first Latin translation of Euclid's* Elements *commonly ascribed to Adelard of Bath*, Toronto: Pontifical Institute of Medieval Studies, 1983, pp. 68, 370.
7. H.L.L. Busard and M. Folkerts, *Robert of Chester's (?) Redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard II Version*, Basel: Birkhäuser, 1992, 2 vols. Zie vol. 1, pp. 130,325.
8. E.J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*, Groningen: Noordhoff, 1929-1930, 2 delen.
9. M. Folkerts, *Boethius Geometrie II: Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters*, Stuttgart: Steiner, 1970, pp. 127, 223.
10. Anthony LoBello, *The Commentary of Albertus Magnus on Book I of Euclid's Elements of Geometry*, Leiden: Brill, 2003, pp. 295–299.
11. J.D. North, *Horoscopes and History*, London: Warburg Institute, 1986, pp. 98–102.
12. J.D. North, Some Norman Horoscopes, in Charles Burnett, ed., *Adelard of Bath: An English Scientist and Arabist of the Twelfth Century*, London, Warburg Institute, 1997, pp. 147–162. Zie vooral pp. 152-156.
13. M. Schramm u.a., Der Astrolabtext aus der Handschrift Codex 196, Bürgerbibliothek Bern - Spuren arabischer Wissenschaft im mittelalterlichen Abendland, *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften* 17 (2006/7), 199–300, zie p. 207.
14. Fritz S. Pedersen, *The Toledan Tables*, Copenhagen: Royal Danish Academy of Sciences and Letters, 2002, 4 vols.
15. Algebra heeft een tussenstatus.
16. De oorzaak van dit verschijnsel is de rotatie van de aarde om zijn as. In de Middeleeuwen nam men aan dat het universum om de aarde roteerde.
17. In de editie [6], p.68 is de figuur zonder de letters opnieuw gespiegeld, en daarna zijn de letters weergegeven in de links-rechts oriëntatie als bij Adelard.
18. Het is goed mogelijk dat de beroemde 'getallen van Fibonacci' (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ...) uit de islamitische wereld afkomstig zijn. De Iraakse wiskundige Kamal al-Din ibn Yunus wist dat als een segment volgens de gulden snede wordt verdeeld, de verhouding bij benadering 34:21 is. In de islamitische wereld zou daarom bekend geweest kunnen zijn dat de gulden snede te benaderen is door opeenvolgende 'getallen van Fibonacci'. Leonardo zou 'zijn' getallen in de islamitische wereld geleerd kunnen hebben, maar ook aan het hof van Frederik II in Sicilië, waarmee ook Kamal al-Din in verbinding stond.