

Frans Oort

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80.010

3508 TA Utrecht

f.oort@uu.nl

Geschiedenis

Grothendieck: de nieuwe algebraïsche meetkunde

Alexander Grothendieck, een man met een dramatische jeugd, een briljant wiskundige die wereldfaam verwierf, maar op latere leeftijd vereenzaamde in een kluizenaarsbestaan. Hoe benaderde hij de wiskunde? Frans Oort beschrijft een klein deel van Grothendiecks leven en werk en geeft een voorbeeld van zijn werkwijze.

In de laatste honderd jaar heeft de algebraïsche meetkunde meerdere malen een grote ontwikkeling doorgemaakt. De erfenis van grote wiskundigen uit de 19de eeuw werd door de Italiaanse wiskunde van totaal nieuwe meetkunde methoden voorzien; vaak virtuoos en mooi, lang niet altijd rigoureuus. Door Van der Waerden, Zariski en vele anderen werd de algebraïsche grondslag gelegd, door Weil op een heel hoog plan gebracht. De Weil vermoedens bleken een nieuwe impuls te geven aan dit toch al zo rijke vakgebied. Serre wist de meetkunde weer terug te brengen in deze theorie. De uitdaging van de Weil vermoedens en de rijkdom aan meetkundige en algebraïsche methoden lagen klaar toen Alexander Grothendieck besloot om het vakgebied op een geheel nieuwe leest te schoeien. Was er nog wel iets nieuws te brengen in dit vakgebied dat al zo ver door ontwikkeld was? Gebruikmakend van methoden van al die voorgangers, en met een groot doel voor ogen ging Grothendieck aan de slag. Ik probeer een beschrijving te geven van de revolu-

tionaire en stormachtige ontwikkeling die de algebraïsche meetkunde doormaakte aan de hand van Alexander Grothendieck in de jaren 1958 – 1970. We zien:

- Het ontwikkelen van een fundamenteel nieuwe opzet van een heel vakgebied.
- Veel vroegere technieken komen in een krachtiger vorm terug.
- De mens die daar de spil in is, heeft later een ongelukkig leven.

Wat daar aan vernieuwende gedachten geproduceerd werd is verbazingwekkend. Prachtige verbanden tussen schijnbaar disjuncte gebieden. Oplossingen van oude problemen. En een menselijk drama dat daar doorheen speelt: het leven van Grothendieck in al zijn facetten.

In dit artikel worden de volgende onderwerpen behandeld. Eerst probeer ik iets te zeggen over persoonlijke achtergronden in het leven van Alexander Grothendieck. Dan ga ik in op de manier waarop een wiskundige werkt. In een schetsmatig beeld geef ik aan wat de

grote kracht was van de werkwijze van Grothendieck, en wat de methode is die andere wiskundigen in staat stelt om ook resultaten te boeken. In de topologie wordt de fundamenteel groep gedefiniëerd. In de algebra de Galois groep. Ik schets deze (schijnbaar zo ver van elkaar liggende) begrippen. Ik besluit met het beschrijven van een resultaat zoals dat door Grothendieck bereikt werd.

Veel mensen denken dat zijn gedachten wereld zo abstract en moeilijk te begrijpen is dat welke beschrijving daarvan dan ook vele tientallen pagina's moeilijke wiskunde hoort te beslaan. Ik probeer juist aan dít lezerspubliek te laten zien dat de essentie van Grothendiecks werkwijze heel goed te vertellen en uit te leggen is. Ik doe dat aan de hand een voorbeeld, de *monodromie-stelling*. De vernieuwende opzet van Grothendieck van het begrip fundamenteelgroep geeft ons de sleutel in handen om een moeilijk en diep resultaat te bewijzen met behulp van eenvoudige lineaire algebra. Al beschrijft dat maar een klein deel van de essentie van zijn werk; ik hoop dat het een tipje van de sluier oplicht.

Leven en werk

Het leven van Alexander Grothendieck is vol met drama, fascinerende geschiedenis en



Serre en Grothendieck in 1958

grootse momenten [1, 5].

Hij werd geboren in Berlijn in 1928. Zijn moeder Hanka Grothendieck leefde in bittere armoede. Zijn biologische vader Sascha Schapiro had een leven vol met gevaren: hij werd gevangen als opstandeling tegen het Sovjet regime, verloor bij de vlucht een arm, ontmoette de even anarchistische Hanka in Berlijn; daarna vluchtte hij voor de nazi's naar Frankrijk en probeerde daar de kost te verdienen als fotograaf. Hanka liet Alexander in 1933 bij een familie in Hamburg achter en ook zij vertrok naar Parijs. Maar Sascha vocht mee in de Spaanse burgeroorlog, en stierf later in een nazi concentratie kamp. Alexander gaat in 1939 naar zijn moeder. De oorlog brengen Hanka en Alexander door in een Frans interneringskamp (als ongewenste vreemdelingen). Lees vooral de fascinerende beschrijving van die tijd, en van hun leven in [5].

Na de oorlog studeert Alexander wiskunde, en al gauw blijkt zijn grote talent. In zijn proefschrift in 1953 vernieuwt hij op fundamentele wijze de functionaal analyse. Hij raakt daarna onder de indruk van een vermoeden van André Weil, een probleem analoog aan het Riemann vermoeden. Weil geeft aan welke nieuwe structuur er zou moeten gemaakt worden om dit vermoeden te bewijzen. Weil zelf maakt een nieuwe opzet van de algebraïsche meetkunde, en bewijst een belangrijk speciaal geval. Grothendieck is gefascineerd en besluit die hypothetische, nieuwe theorie te ontwikkelen. In 1958 geeft hij een voordracht op het International Congress of Mathematicians, ICM 1958, waar hij de grote lijnen van zijn plan schetst. Ik was er bij en heb er helemaal niets van begrepen. Maar er was iemand op de eerste rij, die blijk gaf te kunnen volgen wat Grothendieck van plan was. Dat bleek Jean-Pierre Serre te zijn.

Als buitenlander heeft Grothendieck moeite om een positie in Frankrijk te krijgen. In 1959 wordt het nieuwe instituut IHES opge-

richt, speciaal om Grothendieck aan een trekking te helpen en de gelegenheid te geven zijn grote plannen gestalte te laten geven. Dat instituut nu in een dorpje even ten zuiden van Parijs, bestaat nog steeds, en is het centrum van veel belangrijke ontwikkelingen. In zijn vruchtbare jaren heeft Grothendieck veel contact met Serre, zowel per telefoon, als in gesprekken, als in brieven. Het is duidelijk dat Serre niet alleen als klankbodem dient, maar vooral ook als diegene die bij alle plannen van Grothendieck de voorbeelden geeft die de realiseerbaarheid ervan aangeven ("toujours lui" schrijft Grothendieck daar over).

In de periode 1958–1970 presteert Grothendieck iets wat haast niet te geloven is. Hij schrijft vele duizenden bladzijden heel abstract wiskunde. Hij geeft vele jaren een seminarium, waar hij de teksten levert, meer dan tien afleveringen van elk vele honderden pagina's, soms uitgewerkt en voorgedragen door mensen die met hem samen werken. Hij schetst in voordrachten in Séminaire Bourbaki dingen die hij al bewezen heeft en die hij later hoopt uit te werken. Hij beschrijft hoe hij denkt dat de ontwikkelingen verder zullen gaan. We zijn nu nog steeds bezig te begrijpen wat hij toen geschreven heeft. Het is duidelijk dat in het begin van de 60er jaren dit alles in zijn hoofd reeds gestalte had gekregen. Op het ICM 1966 in Moskou ontvangt Grothendieck de Fields Medal (een Nobel prijs is er niet voor wiskundigen; dit is de hoogste eer, die eenmaal in de vier jaar aan twee of aan vier jonge wiskundigen wordt toebedeeld).

Hier is een voorbeeld van de grondigheid en het formidabele inzicht van Grothendieck. Serre signaleert in een van zijn bewijzen een probleem, dat er ruwweg op neer komt dat een quotiënt afbeelding van algebraïsche groepen niet een lokaal triviale vezeling hoeft te zijn in de Zariski-topologie. In [6] vinden we de oplossing: een dergelijke vezeling is "localement isotrivial": na terugtrekken met een eindige onvertakte afbeelding is dat wel het geval. En daar laat Serre het verder bij. Grothendieck neemt dat probleem op: je moet overdekkingen van een topologische ruimte niet definiëren door een vereniging van open deelverzamelingen, maar door zulke deelverzamelingen met daaroverheen steeds een ander ruimte. Het begrip 'overdekking' in de topologie gaat op de helling. M. Artin geeft in 1962 aan Harvard University daar een seminarium over. Grothendieck wijdt er, met Artin en Verdier, een heel seminarium aan, 1963 – 1964, vele honderden bladzijden abstracties. Het idee van Serre wordt in al zijn al-



Grothendieck geeft college (IHES, Bures-sur-Yvette)

gemeenschap uitgewerkt, deels omdat het de benodigde middelen kan leveren voor het bewijs van de Weil vermoedens: de hypothetische 'Weil cohomologie' heet dan 'étale cohomologie'. Maar ook omdat het ontwikkelen van zo'n prachtig groot bouwwerk nu eenmaal de voorkeur had van Grothendieck boven het bestuderen van speciale gevallen. Het bleek veel toepassingen te hebben, bijvoorbeeld in de logica: onverwachts, moeilijk te begrijpen, visionair. Een indrukwekkend bouwwerk. Een techniek die nu nog steeds behoort tot de dagelijkse gereedschapskist van de algebraïsch meetkundige. En, deze aanzet van Grothendieck heeft weer geleid tot prachtige ontwikkelingen en tot problemen die nog steeds onopgelost zijn. Overigens is dit een voorbeeld van een heel algemeen uitgangspunt van Grothendieck: bestudeer niet een variëteit of schema op zichzelf, maar altijd in de relatieve situatie; een voordracht van Grothendieck begon altijd met: "zij X een schema boven S ".

Al in die jaren zijn er tekenen dat Grothendieck dwars ligt. Hij richt een beweging op 'Survivre' die onder meer alle landen wil overtuigen bewapening op te geven. Het is vol met idealisme.

Maar zo briljant als Grothendieck was als wiskundige, zo bevlogen als hij in zijn idealisme is, zo weinig kennis van zaken en overzicht heeft hij in sociale en politieke zaken. Steeds vaker heeft hij aanvaringen met de directie van zijn instituut. In 1970 blijkt dat het IHES deels gefinancierd wordt met behulp van geld uit militaire bronnen. En Grothendieck neemt ontslag. Als U wilt proeven hoe Grothendieck daarover dacht en voelde, lees dan zijn stuk 'Responsabilité du savant dans le monde d'aujourd'hui, le savant et l'appareil militaire' [8]. En mogelijk waren er ook heel andere redenen waarom Grothendieck tot deze stap kwam.

In de jaren tussen 1970 en nu vervreemdt Grothendieck steeds meer van de wereld. Hij



Grothendieck in Montreal, 1970

schrijft vele duizenden bladzijden van memoires, vol venijn en vele honderden bladzijden met ideeën hoe de wiskunde zich verder zou moeten ontwikkelen. Van dat laatste is veel nog niet gepubliceerd, en zeker nog niet begrepen. Zijn grote droom, het bewijzen van de Weil vermoedens, wordt gerealiseerd door een leerling van hem, Pierre Deligne, maar Grothendieck heeft daar weinig waardering voor. Nu weet bijna niemand meer waar hij woont (ergens in de Pyreneeën). Hij weigert nu contact in het algemeen. Het lijkt een droevig bestaan.

Kortom: een heel moeilijk jeugd, als vreemde levend in eigen land – als student al indrukwekkende resultaten; als wiskundige eigenhandig een heel nieuw fundament leggend voor een heel vakgebied, met indrukwekkende resultaten, voor ons een reeks gereedschappen ontwikkelend die nog heel lang gebruikt zullen worden; steeds meer ontsporend in sociaal opzicht, met een leven nu dat wij toch als troosteloos ervaren. In 2008 werd hij 80 jaar oud. Maar als je denkt hoe hij nu leeft, daar word je niet vrolijk van.

Een paar van mijn gedachten:

Het komt voor dat iemand in het ene aspect van het leven briljant is, terwijl hij niet datzelfde indrukwekkende overzicht heeft in een ander gebied. Soms wordt die gedachtenfout wel gemaakt: omdat iemand goed is het ene 'moet' hij ook wel goed zijn in andere dingen. Laten we niet in die valkuil lopen. Hoe vaak heb ik niet een student gezien die iets niet begreep of iets niet kon, maar dan juist in iets anders vreselijk goed was. Of omgekeerd. Het blijft mooi om te zien wat voor mogelijkheden mensen hebben.

Soms wordt het gedrag van Grothendieck in zijn latere leven gezien als consequentie van een moeilijke jeugd. Een dergelijk redenering vind ik gevaarlijk. Er is mogelijk een verband, maar niet een logische implicatie. Er zijn heel wat mensen met een moeilijke jeugd

die stabiele en vriendelijke mensen zijn.

Wiskundigen genieten van de schoonheid van hun vak, en daardoor zijn het vaak zulke vriendelijke en tevreden mensen. De gedrevenheid van Grothendieck in zijn productieve jaren lijkt zich haast tegen hem gekeerd te hebben in zijn latere jaren. Ik denk dat een persoonlijkheidsstructuur niet een logisch gevolg is van het werken aan de wiskunde, al kan het er wel mee samen hangen, zowel in positieve als in negatieve zin.

Ik ken vele bevlogen, aardige en heel stabiele wiskundigen. Allicht, als je met zo'n mooi vak omgaat. Het gangbare oordeel 'een wiskundige, dus een nerd' klopt bijna nooit.

Hoe werkt een wiskundige?

Stel, je wordt geconfronteerd met een probleem of een vraag P . Dan zijn er twee verschillende manieren om naar een oplossing te zoeken (ter wille van de duidelijkheid chargeer ik wat, in de praktijk passen wiskundigen vaak een mengsel van de beide methoden toe).

Methode (G)

Generaliseer het probleem naar AP . Ontwikkel vervolgens een algemene theorie, een 'machine', een logische stelsel van redeneringen $Mach$. Voer het probleem AP in $Mach$ in, en wacht af wat er gebeurt. Als er een goed antwoord uitrolt, dan ben je erg tevreden. Als er geen antwoord uitrolt, dan ben je vastgelopen.

Grothendieck paste deze methode veel toe. Het grote voordeel is dat je door iets te ge-

neraliseren hinderlijke details en bijverschijnselen uitschakelt. Als je maar creatief genoeg bent dan zie je essentie van de structuur, en kom je tot veel algemenere opvattingen en meer nieuwe inzichten dan voorheen.

Zie ook een interview met Yuri Manin [3], die zegt: "I see the process of mathematical creation as a kind of recognizing a preexisting pattern." En in die visie spelen vermoedens en concrete problemen meestal geen grote rol. Er ligt meer nadruk op het vinden van een structuur, dan op het oplossen van een probleem.

Voordeel. Nieuwe, abstracte methoden worden ontwikkeld. De essentie van een structuur wordt niet versluierd door details.

Nadeel. Soms wordt het contact met 'de werkelijkheid' zo schimmig dat methoden lijken te bewijzen "dat de lege verzameling leeg is". Ik zag een keer Grothendieck ploeteren aan het bewijs van een heel algemene bewering, maar Serre gaf met een eenvoudig voorbeeld aan dat die bewering onjuist was.

Methode (M)

Bekijk het probleem P van alle kanten. Maak voorbeelden. Reken speciale gevallen door. En probeer zo een indruk te krijgen van de structuur van de materie. Soms zie je dan dat een deel van het probleem past in een algemene theorie. Dan ploeter je verder tot alle gevallen herleid kunnen worden tot die oplosbare gevallen, en je kijkt tevreden terug op de bereikte resultaten.

Voordeel. Je blijft met beide benen op de grond staan. In elke stap van het proces ben

Alexander Grothendieck
 1971
 Riemann-Roch'scher Satz: der letzte Schrei: der Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K'(X) & \xrightarrow{f^*} & K'(Y) \\ \downarrow \tau(\psi)_* & & \downarrow \chi_* \\ Gr(K(X) \otimes Q) & \xrightarrow{f_*} & Gr(K(Y) \otimes Q) \end{array}$$

 ist kommutativ!
 Um dieser Aussage über $f: X \rightarrow Y$ einen approximativen Sinn zu geben, musste ich nahezu zwei Stunden lang die Geduld der Zuhörer missbrauchen. Schwartz auf Weiss (in Springer's Lecture Notes) nimmt's wohl an die 400,500 Seiten. Ein packendes Beispiel dafür, wie unser Wissen und Entdeckungsweg sich immer mehr in einen lebensentrichteten logischen Delirium verliert, während das Leben selbst auf tausendfache Art zum Teufel geht – und mit endgültiger Vernichtung bedroht ist. Höchste Zeit, unsern Kurs zu ändern!
 (6.12.1971)
 Alexander Grothendieck

In 1971 schreef Grothendieck, na zijn lezing aan de Universiteit Bielefeld, deze tekst in het colloquiumboek. Zijn frustratie omtrent het wetenschappelijke 'delirium' en de wereldproblematiek spat er vanaf

je bezig met dat probleem. Concrete voorbeelden behoeden je soms voor zinloze uitspraken, voor het inslaan van doodlopende wegen. En je mag ook best abstracte methoden toepassen.

Nadeel. Doordat je ‘laag bij de grond’ blijft mis je soms algemene principes. Je loopt het gevaar lange berekeningen te doen die overbodig zijn in een algemenere theorie.

Zo kun je werken aan een wiskundige probleem. Als je bezig bent met creatieve wiskunde (oplossen van een vraagstuk, werken aan een scriptie, het oplossen van een moeilijk probleem), probeer dan een mengsel van deze beide methoden. Aarzel niet om af en toe zo maar een wilde algemene theorie te ontwikkelen of proberen toe te passen. Maar aarzel ook niet om eens een moeilijk speciaal geval door te rekenen, om zodoende gevoel te krijgen waar de essentie van het probleem te vinden is. Sommige wiskundigen vinden dat een goed wiskundige niet passen, maar daar trek ik me meestal niets van aan. Probeer een bewijs te vinden, en een probleem op te lossen. Als dat niet lukt, gebruik dan de ‘reden’ waarom dat niet lukt om een tegenvoorbeeld te vinden. Als dat niet lukt, gebruik dan die ‘obstructie’ voor het vinden van een tegenvoorbeeld als argument in een bewijs, enzovoort. Een methode die ik vaak toepas, soms met een beetje succes, en die ik altijd vertel aan studenten en leerlingen.

De topologische fundamentealgroep en een toepassing

We illustreren methode (G) met behulp van een bewijs van de ‘monodromie-stelling’, in deze vorm gevonden door Grothendieck, gepubliceerd door Serre en Tate. Eerst ontwikkelen we een algemene theorie (zo prachtig mooi in dit geval). Dan voeren we het probleem in de machine, en de oplossing rolt er uit.

Veronderstel dat we een *topologische ruimte* T hebben, met een gemarkeerd punt $b \in T$. Daaraan voegen we toe een groep $(T, b) \mapsto \pi_1^{\text{top}}(T, b)$, de *topologische fundamentealgroep*. Lussen in T worden beschouwd: een afbeelding van het reële interval $\gamma : [0, 1] \rightarrow T$ met $\gamma(0) = b = \gamma(1)$. Twee lussen heten ‘homotoop’ als ze continu in elkaar kunnen worden overgevoerd. Homotopie-equivalentieklassen van zulke lussen vormen de elementen van de fundamentealgroep. De inverse: de lus in omgekeerde richting doorlopen. Compositie in de groep: twee lussen achter elkaar doorlopen. Voor de theorie, zie een tekstboek over

topologie.

Prachtig: aan een topologische ruimte met basispunt wordt een ‘invariant’ gehecht, een groep; die vertelt iets over de topologische structuur. Vaak is die groep eenvoudiger te hanteren dan het topologische object waar het vandaan komt.

Een voorbeeld. Neem $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, de cirkel met straal 1 in het complexe vlak, met basis punt $b = 1$. Intuïtief is duidelijk:

$$\pi_1^{\text{top}}(S^1, b) \cong \mathbb{Z}.$$

Hierin tellen we hoe vaak een lus om de cirkel heenloopt, zeg tegen de wijzers van de klok in. Een bewijs dat de bovenstaande formule juist is vergt wel wat werk. We zullen in het bewijs hieronder alleen maar gebruiken dat $\pi_1^{\text{top}}(S^1, b)$ niet de triviale groep is.

De dekpuntstelling van Brouwer
Stelling. Beschouw de cirkel-schijf

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

Een continue afbeelding $f : D \rightarrow D$ heeft een dekpunt, oftewel er is een $e \in D$ met $f(e) = e$.

Deze stelling, genoemd naar de Nederlandse wiskundige L. E. J. Brouwer, heeft veel toepassingen. Wat is het ‘glibberige’ van het probleem? De verzameling van alle continue afbeeldingen f zoals in de stelling is heel erg groot. Hoe werk je ooit concrete gevallen uit? *Bewijs.* Zie [9]. Omdat D samentrekbaar is zien we dat $\pi_1^{\text{top}}(D, b) = \{e\}$.

Veronderstel dat f geen dekpunt zou hebben. Trek voor iedere $x \in D$ de halfrechte H die begint in $f(x)$ en vervolgens door x gaat; omdat $f(x) \neq x$ voor elke x is deze halfrechte goed gedefiniëerd. Loop vanuit $f(x)$ langs H naar x en loop (eventueel) verder tot je de cirkel snijdt in het punt $F(x)$. Bewijs dat de afbeelding $F : D \rightarrow S^1$ die je zo krijgt continu is. Verder is duidelijk dat voor elke $x \in S^1$ geldt: $F(x) = x$. We krijgen

$$h := F \cdot i : S^1 \hookrightarrow D \rightarrow S^1, \quad \text{met } h = \text{id}_{S^1}.$$

(Hier krijgen we toch al het gevoel dat dit niet kan maar hoe bewijzen we dat?) Het effect van h op $\pi_1^{\text{top}}(S^1, t)$ is

$$\text{id}_{\mathbb{Z}} = h_* : \left(\pi_1^{\text{top}}(S^1, b) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(D, b) = \{e\} \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(S^1, b) \cong \mathbb{Z} \right) = 0.$$

Deze tegenspraak bewijst de stelling. $\square$

De Galoisgroep en een toepassing

Neem een lichaam K , en een polynoom $F = F(T) \in K[T]$. De verzameling van nulpunten van F in een algebraïsche afsluiting $k = \bar{K}$

heeft symmetrie-eigenschappen: beschouw automorfismen van k die elementen van K invariant laten en die nulpunten van F permuteren. Bijvoorbeeld $K = \mathbb{Q}$ en $F = T^2 + 5$; de nulpunten zijn $\pm\sqrt{-5}$ en complexe conjugatie verwisselt die twee nulpunten. Of $K = \mathbb{Q}$ en $F = T^3 - 2$; wat zijn de nulpunten? welke permutaties komen voor? Het antwoord op deze vragen (en op veel andere problemen die hiermee samenhangen) worden gegeven door Galois theorie. De droevige levensgeschiedenis van Galois is te lezen op Wikipedia.

In de Galois theorie wordt het kleinste lichaam L bestudeerd dat K en de nulpunten van F bevat. De groep van automorfismen van L over K (automorfismen van L die elementen van K invariant laten) is eindig en permuteert de nulpunten van F . De structuur van deze groep beschrijft eigenschappen van F . Wat is die groep voor het geval $F = T^3 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$?

Met behulp van deze theorie is het niet moeilijk om een prachtig resultaat van Ruffini en van Abel te beschrijven en te bewijzen. Neem een ‘willekeurig’ polynoom $F \in K[T]$. Kun je de nulpunten van F beschrijven met behulp van worteltekens? We kennen allemaal de ‘ $A - B - C$ formule’ voor een kwadratische vergelijking. Cardano beschreef een dergelijke formule voor polynomen van graad 3. Ook is het mogelijk om een dergelijke formule op te schrijven voor een polynoom van graad 4.

Abel, Ruffini

Stelling. Voor $n \geq 5$ is er niet een formule opgebouwd met behulp van worteltekens die voor elk polynoom $F \in \mathbb{Q}[T]$ van graad n de nulpunten uittekent.

Een andere formulering: voor $n \geq 5$ is er een $F \in \mathbb{Q}[T]$ polynoom van graad n over een lichaam $\mathbb{Q}$ waarvoor de Galois groep van F een niet oplosbare groep is; voor een dergelijk polynoom zijn de nulpunten niet op te schrijven in een formule met worteltekens.

De Galois theorie heeft een grote invloed gehad op het systematiseren en begrijpen van grote delen van de wiskunde.

Stop. We lezen niet verder, maar denken eerst na over de vraag:

“Wat is het verband tussen de topologische fundamentealgroep en de Galois groep?”

Het lijken begrippen in heel verschillende werelden. We zullen zien dat deze klassieke begrippen, die we goed dachten te begrijpen, door Grothendieck in een heel ander perspectief geplaatst zijn. En dan komt er een techniek beschikbaar die een moeilijk probleem eenvoudig maakt.

Schema's

Uitgaande van een variëteit construeren we een ring. Voor een lichaam k wordt de affiene ruimte van dimensie n gegeven als $\mathbb{A}^n = k^n$. Een affiene algebraïsche variëteit $V \subset \mathbb{A}^n$ wordt gegeven als nulpunten-verzameling van een stelsel polynoom vergelijkingen $f_1 = 0 = f_2 = \dots = f_s$. Dit werkt goed over een algebraïsch gesloten lichaam k . (In andere gevallen moet je meer structuur aanbrengen.) We kunnen 'reguliere functies' op V bekijken. Dat zijn quotiënten van polynomen modulo I , het ideaal voortgebracht als $I = (f_1, \dots, f_s)$, zodanig dat een dergelijke quotiënt in elk punt $P \in V$ geschreven kan worden als F/G met $G(P) \neq 0$. We kunnen nu bewijzen: de ring van functies die regulier zijn op V is gelijk aan $k[V] = R = [T_1, \dots, T_n]/I$.

Uit die ring kan de variëteit teruggevonden worden. Omgekeerd kan uit R de variëteit V teruggevonden worden: elk punt van V correspondeert met een maximaal ideaal van R .

Een voorbeeld

Voor $V = \mathbb{A}^1$ geldt $R = k[T]$; en het punt $P \in V$ gegeven door zijn coördinaat t correspondeert met het ideaal $(T - t) \subset R$. Eenvoudige opgave: bewijs dat voor k de algebraïsche gesloten toevoeging $t \mapsto (T - t)$ een bijjectie geeft tussen V en de verzameling van maximale idealen van $R = k[T]$.

Stelling. Er is een anti-equivalentie van categorieën

$$\{\text{affiene variëteit over } k\}^0 \xrightarrow{\sim} \text{Alg}_k, \\ V \mapsto k[V].$$

Hier is Alg_k de categorie van commutatieve k -algebras van eindig type die geen nuldelers hebben.

Het idee dat een ruimte teruggevonden kan worden als verzameling van bepaalde idealen in de ring van functies op die ruimte was aan Grothendieck al bekend uit de lineaire analyse.

Aha! Je kunt dus een meetkundig object beschrijven als als verzameling van priemidealen in een ring. (Het blijkt technisch van belang te zijn niet alleen maar maximale idealen te beschouwen.) Kunnen we omgekeerd uit die ring de variëteit V terug vinden?

Definitie. Voor een commutatieve ring R met $1 \in R$ schrijven we $X = \text{Spec}(R)$ voor de verzameling van priemidealen $I \subset R$ met $1 \notin I$. Het 'spectrum' van de ring R .

Voor elk element $f \in R$ schrijven we U_f voor de verzameling van alle I met $f \notin I$ (de verzameling waar f "niet de waarde 0 heeft").

Het blijkt dat $\{U_f \mid f \in R\}$ een subbasis vormt voor een topologie op X . Dit was al bekend in de algebraïsche meetkunde als de 'Zariski topologie'.

Voor $P \in X$, gegeven door het priemideaal $I_P = I \subset R$ schrijven we

$$O_P = R_I = \{f/g \mid f, g \in R, g \notin I\}.$$

We hebben nu $\text{Spec}(R)$: een ruimte, met een topologie, en een verzameling van "functies", en de theorie kan opgezet worden. Eigenlijk zou ik ook het begrip 'schoof' moeten behandelen, maar dat voert ons te ver.

Stelling. Er is een anti-equivalentie van categorieën

$$\{\text{affien schema}\}^0 \xrightarrow{\sim} \text{Rg}, \quad R \mapsto \text{Spec}(R).$$

Hier is Rg de categorie van commutatieve ringen met 1.

Fantastisch toch? Een eenvoudig idee ont-doen van alle franje: geen condities aan R opleggen, hele rare commutatieve ringen mogen voorkomen. Het blijkt dat er diepe toepassingen zijn, dat dit de goede manier is om tegen de objecten aan te kijken.

Bovendien kunnen we nu heel andere vakgebieden erbij betrekken. Bijvoorbeeld de ring $\mathbb{Z}$ is toegestaan, de getaltheorie gaat meespelen.

Een voorbeeld: $R = \mathbb{Z}[T]$. We kunnen $\text{Spec}(\mathbb{Z}[T])$ intuïtief aanvoelen als het 'product' van een ééndimensionale affiene ruimte met $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. We hebben plotseling een object waar we 'in de ene richting' meetkunde kunnen doen, en 'in de andere richting' getaltheorie. We komen hier later op terug.

Veel van deze begrippen waren deels al bekend (Weil, Zariski, Serre, en vele anderen). Maar de sprong naar de grote abstractie, de durf om het zo te doen, je vrij maken van vooroordelen, en het visionaire inzicht dat dit leidt tot de kern van de zaak, dat is de grote bijdrage van Grothendieck.

Het lijkt een eenvoudig spel, maar wie de vele pagina's theorie ziet, geschreven door Grothendieck, nodig om dit begrip in volle algemeenheid te ontwikkelen en toe te passen, weet wel beter. En dan komt het karakter van Grothendieck boven: alles tot in de meest gevorderde abstractie uitwerken, en alles opzetten met zo min mogelijk beperkende voorwaarden. En vele malen in de geschiedenis hebben we gezien hoe we de vruchten kunnen plukken van deze ontwikkelingen.

Zie [2], waar in het eerste hoofdstuk Grothendieck al meer dan tweehonderd bladzijden nodig heeft om het begrip een affien

schema in alle abstracties uit te leggen. In totaal zijn er acht delen van EGA verschenen, in totaal ongeveer 1600 bladzijden, een deel van de eerste vier hoofdstukken van de oorspronkelijk geplande dertien hoofdstukken van de *Éléments de géométrie algébrique*. In 1959 schreef Grothendieck aan Serre zijn plan voor de hoofdstukken van EGA, dat hij dit plan wilde afronden in drie, hooguit vier jaar, en dat we dan "algebraïsche meetkunde kunnen gaan doen"...

De Grothendieck fundamentealgroep en een toepassing: monodromie-stelling

Lemma. Zij $K = \mathbb{Q}(T)$. Beschouw $f = X^n - T$, met $n \in \mathbb{Z}_{>1}$. Beschouw $L \supset \mathbb{Q}(T)$, het kleinste lichaam dat alle nulpunten van f bevat. Dan is $L = \mathbb{Q}(\zeta_n, \sqrt[n]{T})$; hier is ζ_n een primitieve n -de eenheidswortel. Schrijf

$$K = \mathbb{Q}(T) \subset E = \mathbb{Q}(\zeta_n, T) \subset L.$$

Er is er een exacte rij

$$1 \rightarrow N := \text{Aut}(L/E) \cong \mathbb{Z}/n \rightarrow \text{Aut}(L/K) = G \\ \rightarrow H := \text{Aut}(E/K) \cong (\mathbb{Z}/n)^* \rightarrow 1.$$

Hier is $(\mathbb{Z}/n)^*$ de multiplicatieve groep van eenheden in de ring $\mathbb{Z}/n$. Door conjugatie in G werkt $H = \text{Aut}(E/K)$ op de commutatieve normaaldeler $N \subset G$. Zo komt er een homomorfisme

$$H \cong (\mathbb{Z}/n)^* \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(N) \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}/n) \cong (\mathbb{Z}/n)^*.$$

Bewering: Dit is een isomorfisme.

Het is niet moeilijk een bewijs uit te schrijven, als we eenmaal de notatie begrijpen. Dit eenvoudige resultaat is het hart van het bewijs dat straks volgt.

Schrijf N multiplicatief, $N = \langle \tau \rangle$ met $\tau^n = 1$. Het resultaat van het lemma in deze taal is: zij $\sigma \in G$ met $\sigma \mapsto (t \bmod n) \in (\mathbb{Z}/n)^*$; dan is $\sigma^{-1} \cdot \tau \cdot \sigma = \tau^t$.

De *monodromie-stelling* zegt iets over de eigenwaarden van de monodromie-matrix. Helaas, het zou te ver voeren om een complete, sluitende definitie te geven. De methode van bestuderen van matrices, die substituties in matrix vorm geven als we met oplossingen rond een singulariteit lopen, stamt al van Gauss. Jordan benadrukte dat deze substituties een groep voortbrengen (die we nu de monodromie-groep noemen).

Om het probleem aan te geven in het geval dat ons interesseert: in een familie van variëteiten, geparametriseerd door de cirkel of door de eenheids-schijf zonder oorsprong, levert eenmaal rondwandelen een substitutie

op, bijvoorbeeld op een homologie groep van de vezels. Dat geeft een matrix. Er waren allerlei moeilijke bewijzen om te laten zien dat de eigenwaarden van die matrix eenheidswortels zijn.

Grothendieck formuleert een veel algemenere theorie, die de topologische fundamenteelgroep en de Galois groep in één concept onderbrengt. We geven als voorbeeld $R = \mathbb{Q}[T, \frac{1}{T}]$, en we proberen een fundamenteelgroep te definiëren voor $X = \text{Spec}(R)$. We kunnen een (eindige) onvertakte overdekking van $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ geven door middel van $\sqrt[n]{T} = S$:

$$\text{Spec}(\mathbb{Q}[S, \frac{1}{S}]) \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Q}[T, \frac{1}{T}]), \quad T \longmapsto S^n.$$

Dit geeft het *meetkundige deel* van de fundamenteelgroep, zulke overdekkingen. Maar je kunt ook de inclusie $\text{Spec}(\mathbb{Q}) \subset \text{Spec}(K_n)$ met $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ beschouwen, waar ζ_n een ‘primitieve n -de eenheidswortel’ is: een nulpunt van $Y^n - 1$ zodanig dat $\zeta_n^r \neq 1$ voor $1 \leq r < n$. Dat geeft een ‘onvertakte overdekking’

$$\text{Spec}(K_n) \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Q});$$

dit geeft

$$\text{Spec}(K_n[T, \frac{1}{T}]) \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Q}[T, \frac{1}{T}]).$$

Grothendieck beschrijft de fundamenteelgroep van een schema X als de groep die alle eindige ‘onvertakte overdekkingen’ van X classificeert. Onder andere bewijst hij dat er voor een schema X over een lichaam K een exacte rij bestaat

$$1 \rightarrow \pi_1(X_k) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow$$

$$\pi_1(\text{Spec}(K)) = \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) \rightarrow 1$$

bestaat; hier is k een algebraïsche afsluiting

van K . (Ik laat basis punten weg in de notatie.) We herkennen deze structuur als we het vorige lemma nog eens lezen. In veel gevallen lukt het Grothendieck het ‘meetkundige deel’ van de fundamenteelgroep in verband te brengen met de topologische fundamenteelgroep, en deze dan ook te berekenen met zuiver topologische middelen. Voor $n > 1$ is de afbeelding $\text{Spec}(O_n) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ vertakt, waar O_n de ring van gehelen is in K_n . Daarom zegt men in de algebraïsche getaltheorie dat de uitbreiding $\mathbb{Q} \subset K_n$ vertakt is, bedoelend dat $\mathbb{Z} \subset O_n$ vertakt is.

We beschouwen een familie van variëteiten. Omdat maar eindig veel coëfficiënten worden gebruikt, kunnen we dit definiëren over een lichaam eindig voortgebracht over $\mathbb{Q}$. Dus werkt er nog steeds een heel grote Galois groep op de meetkundige fundamenteelgroep. Het bovenstaande lemma geeft (laat n naar oneindig gaan) de volgende situatie (ik simplificeer, maar de essentie van het bewijs van Grothendieck zien we hier):

Lemma. Zij $M \in \text{GL}(m, \mathbb{Q})$, een $m \times m$ matrix over $\mathbb{Q}$ waarvan de determinant niet gelijk aan nul is. (Dit is de monodromie-matrix.) Veronderstel dat er een $S \in \text{GL}(m, \mathbb{Q})$ is en een geheel getal $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat:

$$S^{-1} \cdot M \cdot S = M^t.$$

(De matrix S komt van de werking van de Galois groep en deze gelijkheid is precies de gelijkheid zoals in het voorgaande lemma.) Dan is er een $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat voor elke eigenwaarde $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$ van M geldt: $\lambda^e = 1$.

Bewijs. Laat $\Lambda \subset \overline{\mathbb{Q}}^m$ de verzameling van eigenwaarden van M zijn; merk op dat alle eigenwaarden ongelijk aan nul zijn. Dan is Λ

ook de verzameling van eigenwaarden van $S^{-1} \cdot M \cdot S$. Dat weten we toch uit de lineaire algebra. Dus geeft $\lambda \mapsto \lambda^t$ een permutatie van de verzameling Λ . Als we die permutatie $m!$ keer uitvoeren dan komt er de identiteit. Dus:

$$\lambda^{t^{(m!)}} = \lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda; \quad \text{dus}$$

$$\lambda^e = 1 \quad \text{met} \quad e = t^{(m!)} - 1. \quad \square$$

Voor een precieze formulering van de monodromie-stelling, en voor een bewijs in de algemene situatie zie [7], Proposition (Grothendieck) op pagina 515; zie ook [4].

Wat is er gebeurd? De algemenere theorie van de *Grothendieck fundamenteelgroep*, die de topologische fundamenteelgroep en de Galoisgroep in één concept verenigt, geeft een werking van de Galois groep op de meetkundige fundamenteelgroep; het vertaalt een moeilijk meetkundig probleem in een eenvoudige berekening met matrices. Indrukwekkend! We zien hoe voor variëteiten over $\mathbb{C}$ juist ook de structuur over een lichaam eindig voortgebracht over $\mathbb{Q}$ van nut kan zijn: laat alle overbodige informatie weg.

Tot besluit

Dit is een voorbeeld van de vernieuwende werking van het gedachtengoed van Grothendieck, nu 40 jaar geleden ontwikkeld. We kunnen er nog veel van verwachten, en als gereedschap in de moderne wiskunde is het niet meer weg te denken.

Nawoord

Een eerdere versie van dit artikel verscheen in: “Vakidiot”, Studievereniging A-Eskwadraat, Jaargang 2008-2009:3, pp. 46–56. Met dank aan de redactie van dat tijdschrift voor de stimulerende uitnodiging dit artikel te schrijven. Met dank aan Sander Kupers voor commentaar en voor hulp bij de illustraties.

Referenties

- Hier vinden we een beschrijving, verwijzingen en veel artikelen over Grothendieck: <http://people.math.jussieu.fr/~leila/grothendieck-circle/biographic.php>.
- A. Grothendieck & J. Dieudonné (1960), *Éléments de géométrie algébrique*. Oorspronkelijk bedoeld als 13 hoofdstukken, waarvan er slechts 4 gedeeltelijk verschenen zijn. Hier verwijzen we naar: deel I, *Le langage des schémas*. Publications Mathématiques de l’IHES **4** (1960). Zie: http://en.wikipedia.org/wiki/Éléments_de_géométrie_algébrique
- Yuri I. Manin, *Good proofs are proofs that make us wiser*. Interview door Martin Aigner en Vasco A. Schmidt. The Berlin Intelligencer, 1998, pp. 16–19. Zie: <http://www.ega-math.narod.ru/Math/Manin.htm>
- F. Oort, *Good and stable reduction of abelian varieties*. Manuscr. Math. **11** (1974), 171–197.
- W. Scharlau, *Wer is Alexander Grothendieck? Anarchie, Mathematik, Spiritualität*. Te koop direct van de auteur voor € 12, scharlau@math.uni-muenster.de Winfried.Scharlau@web.de. Zie ook de artikelen op: <http://www.scharlau-online.de/ag-1.html>.
- J.-P. Serre, *Espaces fibrés algébriques*. Séminaire de Chavaley **3** (1958), 1–37.
- J.-P. Serre & J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*. Ann. Math. **88** (1968), 492–517.
- ‘Responsabilité du savant dans le monde d’aujourd’hui, le savant et l’appareil militaire’, 50 pp, voordracht in Orsay in juni 1970. Beschikbaar op: <http://www.grothendieckcircle.org>.
- http://en.wikipedia.org/wiki/Brouwer_fixed_point_theorem