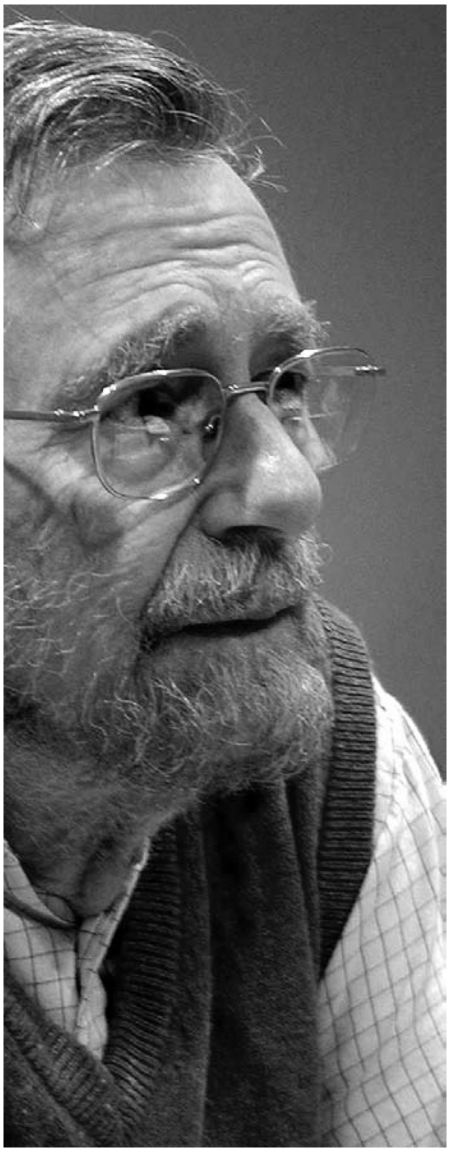
Klaas Pieter Hart
Faculteit EWI
TU Delft
Postbus 5031
2600 GA Delft
k.p.hart@tudelft.nl

Onderzoek A dead horse by E.W. Dijkstra

On the theorem of Pythagoras

Edsger Wybe Dijkstra (1930–2002) is een informatica-icoon met een heel eigen plek. Van oorsprong theoretisch fysicus, werd hij in 1952 de eerste Nederlandse programmeur aan het Mathematisch Centrum in Amsterdam. Noodgedwongen werden toen programmatuur en documentatie geschreven voor een computer die nog gebouwd moest worden. De techniek schreed voort en de computer werd dagelijks onderdeel van vrijwel ieder beroep, maar Dijkstra bleef trouw aan het werken op papier. In zijn loopbaan was Dijkstra hoogleraar aan de Universiteit Eindhoven en de University of Texas at Austin. In 1972 ontving hij de prestigieuze Turing Award. Hij oogstte internationaal veel waardering en heeft nog altijd enthousiaste volgelingen, maar kwam met zijn kritische en rechtlijnige houding ook regelmatig in conflict met collega's. Dijkstra is vooral bekend om zijn algoritmen zoals het 'kortste pad-algoritme', zijn pioniers-werk aan gedistribueerde systemen, en zijn methode voor foutvrij programmeren: door een programma in stapjes te construeren uit de wiskundige specificatie, verkrijgt men een gegarandeerd correct product. De bijdrage die volgt is een manuscript uit zijn EWD-serie [1].



Edsger W. Dijkstra in januari 2002

Iedereen kent de stelling van Pythagoras: "... oh ja, $a^2+b^2=c^2$ ..." Hoeveel mensen weten waar de a, b en c voor staan, dat is een ander verhaal; de helft? tien procent? Hoeveel mensen kunnen de stelling bewijzen? En hoeveel mensen weten dat de stelling ook omgekeerd kan worden, dat wil zeggen: als $a^2+b^2=c^2$ dan vormen a, b en c een rechthoekige driehoek met c als hypotenusa. Stratenmakers en hoveniers gebruiken deze omkering als ze met behulp van de 3-4-5-steek een rechte hoek uitzetten.

De stelling van Pythagoras lijkt de meestbewezen stelling uit de Wiskunde; de meest uiteenlopende figuren hebben zich er aan gewaagd, van Multatuli tot de Amerikaanse president Garfield. Zo ook Edsger Dijkstra; in zijn rondschrijven genummerd EWD975 deed hij, in een fraai handschrift, zijn eigen duit in het zakje. We kunnen slechts raden naar zijn drijfveren maar zijn analyse van de formulering van de stelling en zijn herformulering ervan doen sterk denken aan een wens de stelling en het bewijs in één of ander formeel systeem onder te brengen: hij kwam tot een gelijkheid die voor *alle* driehoeken geldt. Ook zijn commentaar na het bewijs, "Three cheers for formalism", wijst in die richting.

In de opmerkingen vinden we nog een impliciete vraag: "lack of axiomatization forced us to resort to a picture". Is er, uitgaande van een goede axiomatisering van de vlakke meetkunde, een synthetisch bewijs van Dijkstra's formulering te bedenken, zonder plaatjes en liefst zonder al te veel gevallen te onderscheiden? Op de website Cut-the-Knot [2] staat een bewijs dat gebruik maakt van de cosinusregel. Het is de vraag of dat uiteindelijk eenvoudiger is want de bewijzen van die regel kunnen ook uitlopen op gevallen onderscheiden.

Hoe dan ook: geniet van een fraai opgeschreven stukje Wiskunde.

⇠

Referenties

1. www.cs.utexas.edu/users/EWD
2. www.cut-the-knot.org/pythagoras/Dijkstra.shtml

EWD975-0

On the theorem of Pythagoras

For the theorem of Pythagoras, I start from Coxeter's formulation ("Introduction to Geometry", p. 8):

"In a right-angled triangle, the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the two catheti."

Let us play a little bit with that formulation. In a triangle with sides a, b, and c — different from 0 so as to make its angles well-defined — we introduce the usual nomenclature α, β, and γ for their respective opposite angles. (We introduced one angle name so as to be able to express right-angledness, and the other two for reasons of symmetry.)

A formal expression of Coxeter's formulation is

$$\gamma = \pi/2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 .$$

Besides the nomenclature we introduced, this formulation contains the (transcendental!) constant π. Fortunately we can eliminate it thanks to

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma .$$

Elementary arithmetic yields the equivalent formulation

$$\alpha + \beta = \gamma \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 .$$

Isn't that nicely symmetric? It immediately suggests — at least to me — the strengthening

(0) $$\alpha + \beta = \gamma \equiv a^2 + b^2 = c^2 .$$

EWD975 - 1

(This will turn out to be a theorem.) We get an equivalent formulation by negating both sides:

$$\alpha+\beta \neq \gamma \;\equiv\; a^2+b^2 \neq c^2 \quad .$$

But $x \neq y \equiv x<y \vee x>y$, and the latter disjuncts are mutually exclusive. Remembering that the larger angle is opposite to the larger side, is it bold to guess

(1) $\alpha+\beta<\gamma \;\equiv\; a^2+b^2<c^2$ and

(2) $\alpha+\beta>\gamma \;\equiv\; a^2+b^2>c^2$?

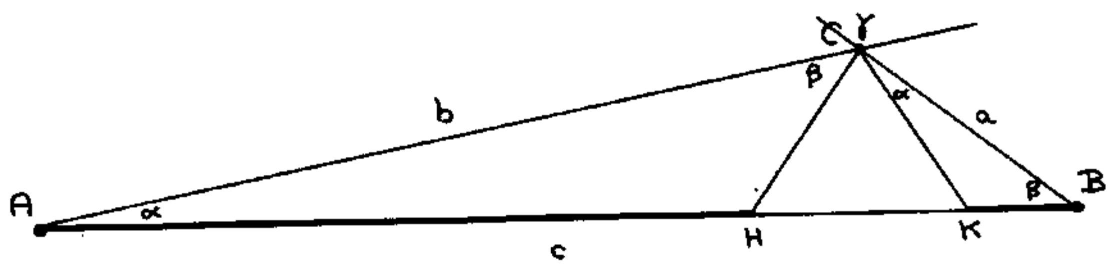
Bold perhaps, but not unreasonable.

Note that (0), (1) and (2) are not independent: from any two of them the third can be derived. They can be jointly formulated in terms of the function sgn - read "signum" - given by

$$sgn.0=0 \;\wedge\; (sgn.x=1 \equiv x>0) \;\wedge\; (sgn.x=-1 \equiv x<0),$$

viz. $$sgn.(\alpha+\beta-\gamma) = sgn.(a^2+b^2-c^2) \quad .$$

Consider now the following figure. We have drawn



the case $\alpha+\beta<\gamma$, in which the triangles ΔCKB and ΔAHC, of disjoint areas, don't cover the whole of ΔACB; denoting the area of ΔXYZ by "XYZ" we have in this case

EWD975-2

$$CKB + AHC < ACB \quad .$$

In the case $\alpha+\beta=\gamma$, H and K coincide and we have

$$CKB + AHC = ACB \quad ,$$

and in the case $\alpha+\beta>\gamma$, the two triangles overlap and we have

$$CKB + AHC > ACB \quad .$$

In summary

$$\text{sgn.}\,(\alpha+\beta-\gamma) = \text{sgn.}\,(CKB + AHC - ACB) \quad .$$

The three areas at the right-hand side are those of similar triangles and hence have the same ratios as the squares of corresponding lines, in particular

$$\frac{CKB}{a^2} = \frac{AHC}{b^2} = \frac{ACB}{c^2} > 0 \quad ;$$

hence

$$\text{sgn.}\,(CKB + AHC - ACB) = \text{sgn.}\,(a^2+b^2-c^2) \quad .$$

Hence we have proved

$$\text{sgn.}\,(\alpha+\beta-\gamma) = \text{sgn.}\,(a^2+b^2-c^2) \quad ,$$

a theorem, say, 4 times as rich as the one we quoted from Coxeter.

* * *

The title of this note could make one wonder why I would waste my time flogging a horse as dead as Pythagoras's Theorem. So let us try to summarize what we could learn from this

EWD975-3

exercise.

• Three cheers for formalization! Instead of setting out to prove $a^2+b^2=c^2$ for a right-angled triangle, we included the antecedent $\gamma=\pi/2$ in the formal statement of what was to be proved. It was only after the introduction of π that we could eliminate it and met the "nicely symmetric" formulation.

• Three cheers for the equivalence! It makes quite clear that the theorem is not about right-angled triangles, but about triangles in general.

• Three cheers for the notational device captured in sgn. If we had not been careful, we would have ended up proving

$$(\alpha+\beta)\,\underline{R}\,\gamma \;\equiv\; (a^2+b^2)\,\underline{R}\,c^2$$

for $\underline{R}$ any of the six relations $=, \neq, <, \leq, >,$ and $\geqslant$

• No cheers at all for that stage of the argument in which lack of axiomatization forced us to resort to a picture. Pictures are almost unavoidably over-specific and thereby often force a case analysis upon you. Note that I carefully avoided the pictures for $\alpha+\beta>\gamma$; there are 9 of them: K to the right of A, coincident with A, and to the left of A, and similarly for the pair H and B. For the argument these distinctions are irrelevant but, when drawing a picture, you can hardly avoid making them.

• One of these days I would like to find a convincing explanation of the circumstance that youngsters continue

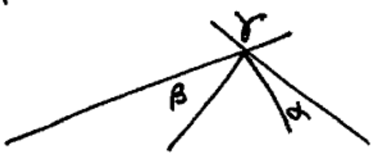
EWD975-4

to be educated with the theorem of Pythagoras in its diluted form as quoted from Coxeter. Notice that the 9 figures could have been avoided by also proving

$$CKB + AHC < ACB \Rightarrow \alpha + \beta < \gamma \quad \text{and}$$
$$CKB + AHC = ACB \Rightarrow \alpha + \beta = \gamma \quad ,$$

i.e. proving (0) and (1) in full.

• Notice that our figure was <u>not</u> pulled out of a magicians hat! As soon as sgn. $(\alpha + \beta - \gamma)$ occurs in the demonstrandum, it is sweetly reasonable to construct that difference. In order not to destroy the symmetry between α and β, one starts with γ and subtracts α at the one side and β at the other:



and this is the germ of the figure we drew.

<u>Epilogue</u>. I am in a paradoxical situation. I am convinced that of the people knowing the theorem of Pythagoras, almost no one can read the above without being surprised at least once. Furthermore I think all those surprises relevant (because telling about their education in reasoning). Yet I don't know of a single respectable journal in which I could flog this dead horse.

Austin, 7 September 1986

prof. dr. Edsger W. Dijkstra
Department of Computer Sciences
The University of Texas at Austin
Austin, TX 78712-1188, USA