Gunther Cornelissen
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80.010
3508 TA Utrecht
g.cornelissen@uu.nl

Oratie

Het meten van dub

Ik heb de afgelopen tijd vooral nagedacht over de toepassing van transcendente analyse op de

Dubbelzinnigheid wordt meestal gezien als een obstakel, iets dat moet worden opgehelderd of zelfs bestreden. Volgens Gunther Cornelissen biedt dubbelzinnigheid juist een kans om de grenzen van ons begrip te onderzoeken, en doen zich hierbij vaak buitengewoon interessante fenomenen voor. Cornelissen kreeg in 2007 een vici-beurs van NWO voor onderzoek naar verbanden tussen niet-commutatieve en aritmetische meetkunde. Hij bezet de nieuwe leerstoel 'mathematische fysica', is directeur van de onderzoeksschool MRI, ontwikkelt en doceert wiskunde-modules op Junior College Utrecht, en is redacteur van Nieuw Archief. Op 16 januari j.l. sprak hij deze oratie uit.

Huishoudelijke vergissing

Vanmorgen kwam hij weer,
mijn ontrouwe vriend,
het lege blad.
Ik zit tegen hem aangeleund,
en wij bewachten samen de stilte.
Ondertussen staat in de keuken het leven
aan te branden.

Bovenstaand gedicht kan slaan op verschillende activiteiten, zoals wiskunde, filosofie, dichten of componeren: het lege blad kan worden gevuld met formules, wijsheid, dichtregels of notenbalken. Al deze creatieve bezigheden hebben iets gemeen: het lijkt, althans volgens een wijd verbreide mening, alsof je je tijd aan het verdoen bent. Volgens wiskundige grootheid Alain Connes (1947) wordt de beste wiskunde gedaan liggend op een bank in het halfduister. Dit romantische beeld past niet bij de dagelijkse realiteit van email, studentenbegeleiding, onderwijs, schrijven, besturen en vergaderen, maar het wijst wel naar de kern van het vak: nadenken.

Wie holt achter wie aan?

Vandaag wil ik het met u hebben over één van dit soort tijdsverspillingen. Natuurlijk vind ik het geen tijdsverspilling, maar u misschien wel, en natuurlijk *is* het ook geen tijdsverspilling. Laat me nogmaals het gebruikelijke bewijs geven: in het hart van de computer, Google, medische scans, veilig mobiel telefoneren, GPS en het spoorboekje bevindt zich moderne wiskunde.

Maar in de achterliggende, onzichtbare wiskunde geven wij dit oude, *verborgen* namen, zoals recursietheorie, lineaire algebra, Radontransformatie, elliptische kromme en grafentheorie. Die theorieën zijn écht niet bedacht om te worden toegepast; en ik verwacht niet dat u ze kent. Stiekem vind ik het zelfs onbevredigend dat zuivere wiskunde zich in dit tijdsgewricht moet rechthouden met het argument van de onverwachte toepassing. Om mijn wiskundig idool Yuri Manin (1937) te citeren: "Er schuilt een inherente zwakheid in de poging je interesses te verantwoorden door te zeggen dat ze toepasbaar zijn. Toepasbaar is een woord voor ingenieurs."

De afstand van zuivere wiskunde tot haar toepassing is groot. Daarmee bedoel ik niet zozeer in tijd. Ik bedoel dat de afstand groot is in zichtbaarheid. Zuivere wiskunde werkt echter omdat het *niet* met de toepassing samenvalt en er vaak op grote afstand uit voortkomt.

De maatschappij loopt werkelijk achter op de zuivere wetenschap, behalve dan natuurlijk op het soort wetenschap dat achter de maatschappij aanholt.

Ik weet niet of u persoonlijk het soort wiskunde waar ik het over wil hebben belangrijk vindt. Waarschijnlijk staat u hier algeheel neutraal tegenover, want het staat ver van uw bed — althans dat denkt u; alhoewel ik u hopelijk heb laten zien dat het eigenlijk onzichtbaar naast uw bed staat, bijvoorbeeld in de mobiele telefoon op uw nachtkastje.

Als de wiskundige op de bank ligt, zijn zijn of haar gedachten vrij en wild. Ik wil graag deze passie met u delen. Maar de afstand hindert mij daarbij. Wiskunde heeft een taalverdichting ondergaan die effectieve communicatie pas toestaat na jarenlange studie. Zon-


Foto: Arthur van Dam

Gunther Cornelissen

belzinnigheid

theorie der dubbelzinnigheid. — Évariste Galois, 1832

der deze taal van verdichte wiskundige symbolen kan wiskunde niet werken, maar precies daardoor creëert zij afstand.

Voor wiskunde is relevantie gekoppeld aan distantie: het afstand nemen en abstraheren. Met wiskunde en andere activiteiten die hoofdzakelijk uit Oblomoviaans op de bank liggen bestaan, wil ik hier *afstand nemen* propageren.

Laat ons nu dan wiskunde doen. Laat de buitenwereld even in de keuken aanbranden.

Dubbelzinnigheid in de wiskunde

We komen aldus aan bij de titel van deze lezing — 'het meten van dubbelzinnigheid'.

Het leven zit vol ambiguïteit. Omdat dit een wiskunde-oratie is, kunt u zich wel voorstellen dat mij hierbij iets heel anders voor ogen staat dan uzelf in gedachten heeft. Om meteen alle twijfel weg te nemen en mezelf als vakidioot te ontmaskeren: ik zal u vier voorbeelden geven van dubbelzinnigheid in de wiskunde.

Het **eerste voorbeeld** komt uit de algebra. De vierkantswortel uit 15 is een getal waarvan het kwadraat 15 is. Maar daar zijn er twee van. Als ik de ene 'vierkantswortel vijftien' ($\sqrt{15}$) noem, dan is de andere 'min vierkantswortel vijftien' ($-\sqrt{15}$). Immers, -1 maal -1 is 1. Hoe kan ik deze twee vierkantswortels onderscheiden? Gelukkig zijn het kommagetallen, en dus kan ik zeggen dat de ene positief, en de andere negatief is. En daarom mag ik dan van 'de' vierkantswortel praten, als naam voor de positieve wortel, zoals ik trouwens zonet al stiekem deed.

Maar nu proberen we hetzelfde in een nauwelijks ander geval. De vierkantswortel uit -15 is een getal waarvan het kwadraat -15 is. Gaat u alstublieft niet het bestaan van dit getal in twijfel trekken, het bestaat al eeuwenlang. Ik noem het even w, van 'wortel'. Maar dan is er een tweede vierkantwortel uit -15, namelijk $-$w. Hoe kan ik die wortels onderscheiden? Het antwoord is dat ik dat niet kan. Pas als ik de ene heb gemeten, dat wil zeggen een naam heb gegeven, dan ken ik de andere ook precies.

De oplossingen van $X^4 - X = 15$ zijn

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-20\sqrt[3]{\frac{2}{\alpha}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha}} \quad \pm \quad \frac{1}{2}\sqrt{20\sqrt[3]{\frac{2}{\alpha}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha}\pm\frac{2}{\sqrt{-20\sqrt[3]{\frac{2}{\alpha}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha}}}},$$

met $\alpha = 1+\sqrt{32001}$ en allevier combinaties van keuzes van tekens voor de symbolen $\pm$.

Vergelijk: in de huidige interpretatie van de theorie van waarneming in de kwantummechanica pint een meting zèlf de waarde van het gemetene vast.

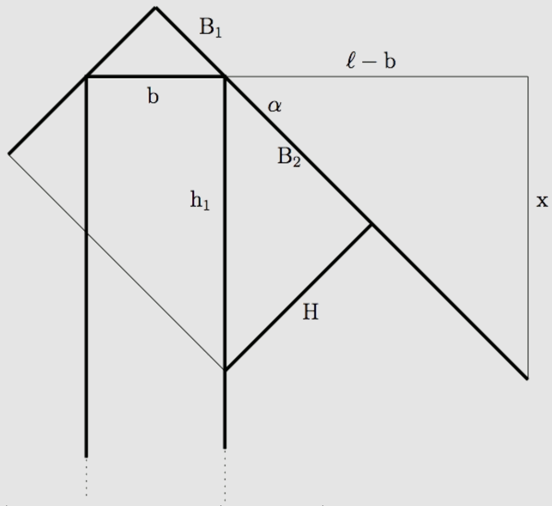
Dingen vallen pas op hun plaats als ze een naam hebben gekregen. "Als dit 'w' is, dan is dat '-w'."

Met deze onvermijdelijke dubbelzinnigheid leven heet 'Galoistheorie'. Of, om het onderwerp wat meer recht te doen: een theorie die precies *meet hoe dubbelzinnig de situatie is*. Dankzij Galoistheorie kan ik beweren dat de oplossingen van $X^4 = 15$ in precieze zin drie keer minder dubbelzinnig zijn dan die van $X^4 - X = 15$.

Het lijkt in eerste instantie misschien vreemd dat er een kwantitatief verschil is tussen deze twee vergelijkingen, omdat ze allebei vier oplossingen hebben. Het cruciale nieuwe idee van Galoistheorie is dat het aantal oplossingen minder belangrijk is dan het verschil in vrijheid bij het geven van namen aan die oplossingen.

Évariste Galois (1811-1832), de wiskundige waarnaar deze theorie is vernoemd, stierf in een duel. In de beroemde 'laatste brief', geschreven de avond voor zijn dood, stelde hij al: "Ik heb de afgelopen tijd vooral nagedacht over de toepassing van transcendente analyse op de theorie der dubbelzinnigheid." Dit is

Schematische weergave van het probleem van de zakkende slagboom



Gegeven zijn b (breedte van de pilaar), B en H (breedte en lengte van de holle buis) en ℓ (lengte van de slagboom). Gevraagd is x (daling aan de andere kant van de slagboom). Met de notaties van de figuur geldt:

$$x = (\ell - b)\tan\alpha; \sin\alpha = \frac{B_2}{h_1}; \cos\alpha = \frac{B_1}{b} = \frac{H}{h_1}; B_1 + B_2 = B$$

We vinden dat $X = \cos\alpha$ voldoet aan

$$b^2X^4 - 2bBX^3 + (B^2 + H^2)X^2 - H^2 = 0,$$

en dan is een oplossing $x = (\ell - b)\sqrt{1 - X^2}/X$. De benadering van mijn zwager is $b = 0$ (dus de buis heeft dikte nul; het plaatje is dan hetzelfde als hierboven zonder het stuk links van de horizontale lijn h_1) en dan is de oplossing $x = B\ell/H$.

het motto van de lezing van vandaag.

Er moet mij in verband met polynoomvergelijkingen oplossen nog een anekdote van het hart, die ik vaak op het algebra-college vertel. Mijn schoonvader wilde zelf een draaihek maken. Dat bestond uit een lange metalen horizontale slagboom, vastgelast aan een verticale holle buis. Die holle buis op zijn beurt moest over een ronde pilaar worden geschoven die in de grond was geplaatst, om aldus het draaien van de slagboom mogelijk te maken. Het probleem is dat er speling in de constructie zat: de buis was te ruim voor de pilaar, en ging daar dus scheef op hangen. Daardoor zou de verticale boom van het draaihek aan het verder gelegen uiteinde lager komen te hangen. De vraag is: hoeveel lager? Met alle cijfers in de hand kwamen wij snel op een vierdegraadsvergelijking, die vervolgens per internet en computer exact werd opgelost.

Het antwoord: 5,9 centimeter. Bij het avondeten werd trots de oplossing gemeld. Waarop mijn zwager opmerkte dat “dit ongeveer dat en zus en zo, dus het antwoord is ongeveer 6 centimeter”.

Ik gebruik dit voorbeeld graag om te illustreren wat voor wiskunde ik doe. Bij het soort wiskunde waar ik het vandaag over heb, gaat het om de theorie: de algebra van de eerste oplossing. De tweede, het schattend rekenen, deugt niet voor het zien van een algemene theorie over het oplossen van vergelijkingen. De theorie heeft distantie en universaliteit die *later* een toepassing vindt.

Deze dure woorden gebruik ik natuurlijk enkel om het schaamrood op onze kaken te verbergen toen mijn zwager in tien seconden een juiste benadering had gevonden. Hij deed trouwens alsof de binnenste pilaar geen dikte had, en dan zijn congruente driehoeken voldoende voor een oplossing.

Het **tweede voorbeeld** van dubbelzinnigheid is meetkundig. Stelt u zich een cirkel voor. Kijk bijvoorbeeld naar de sterren op de Europese vlag. Als ik deze vlag met de verkeerde kant aan de vlaggenstok bevestig, dan ziet u geen verschil. Hoe ik de vlag moet ophangen is dubbelzinnig. (Behalve dan dat er aan de ene kant van de vlag wel haakjes zijn om hem aan de vlaggenstok te bevestigen en aan de andere kant niet, maar het gaat me weer om de theorie.)

Stel, ik teken in het midden van de vlag een verticale lijn, dan liggen de sterretjes gespiegeld ten opzichte van deze lijn. Ik kan wel één kant als ‘links’ zien en de andere als ‘rechts’, maar als ik de vlag omdraai, creëer ik weer dubbelzinnigheid, nu tussen links en rechts.

De sterretjes vervang ik door een cirkel. Ten opzichte van de verticale lijn liggen de punten van de cirkel nu in paren. Als we deze situatie algebraïsch beschrijven en coördinaten kiezen waarin de y-as de verticale lijn is, de x-as hier loodrecht op staat door het middelpunt van de cirkel, en de cirkel straal 4 heeft, dan liggen links en rechts van het punt op de y-as met y-coördinaat 1 precies de twee punten op de cirkel met x-coördinaat $\sqrt{15}$ en $-\sqrt{15}$. Dus dit tweede voorbeeld is eigenlijk het eerste voorbeeld, maar in meetkundige vermomming.

Het **derde voorbeeld** komt uit de mathematische fysica. In veel berekeningen in de theorie van elementaire deeltjes is het nodig te *renormaliseren*. Dit is een natuurkundig rekenrecept dat op verschillende manieren kan worden uitgevoerd, maar de uiteindelijke berekende ‘constanten der natuur’ moeten natuurlijk onafhankelijk zijn van de gekozen methode. Daar zit een Galoisgroep achter, door Pierre Cartier (1932) de ‘Kosmische Galoisgroep’ genoemd. Wederom kan ik kwantitatieve uitspraken doen: een vierdimensionale veldentheorie met een derdegraadspotentiaal (ook bekend als een ϕ^3_4) is wel ambigu, maar oneindig veel minder ambigu dan een driedimensionale theorie met zesdegraadspotentiaal (ϕ^6_3). De Galoisgroepen zijn hier soms oneindig groot, maar daardoor laat de wiskundige zich niet afschrikken.

Voor het **vierde voorbeeld** zet ik hier op een podium twee schermen neer, en plaats daarachter twee trommelaars, onzichtbaar voor het publiek. Ieder van hen speelt op een trommel, die evenwel niet de gebruikelijke ronde vorm hoeft te hebben: het zou ook een driehoek, ster, of wolkje kunnen zijn. Kunt u dan horen of deze twee trommels dezelfde vorm hebben of niet?

In 1910 gaf de Nederlandse natuurkundige Hendrik Lorentz (1853-1928) een lezing in Göttingen, toen het Mekka van de wiskunde.

Een kort terzijde. De lezing werd mogelijk gemaakt door het legaat van Paul Friedrich Wolfskehl (1856-1906), die 100.000 Duitse Mark ter beschikking stelde aan het wiskundig instituut te Göttingen, om te worden uitgereikt voor de oplossing van de Laatste Stelling van Fermat; maar zolang deze oplossing er niet was, mocht een deel van de rente worden gebruikt om een jaarlijkse lezingenreeks mee te bekostigen. Met moet nu bedenken dat de Wolfskehl-lezing van Lorentz aan de wieg stond van de ontwikkeling van de theo-

De doorgestreepte Europese vlag

rie van integraalkernen, en hiermee de inhoud van bijna het hele eerste volume van het klassieke werk van Richard Courant (1888-1972) en David Hilbert (1862-1943) getiteld *Methoden der Mathematischen Physik*. Het ontstaan van deze tak van mathematische fysica is dus te danken aan het *niet* oplossen van het getaltheoretische probleem van Fermat. Misschien is dit wel de betekenis van de naamgeving van mijn leerstoel, die het verband tussen fysica en getaltheorie behelst.

Lorentz stelde de vraag of het mogelijk is door luisteren naar een trommel zijn oppervlakte te berekenen. Het antwoord blijkt 'ja' te zijn. De paus van de Göttingse wiskunde, David Hilbert, die bij de lezing aanwezig was, zei dat hij het antwoord op deze vraag niet meer tijdens zijn leven zou vernemen. Het vermoeden van Hilbert was fout: hij leefde tot in de jaren 1940 en zijn briljante student Hermann Weyl (1885-1955), die ook in het publiek zat, loste het probleem een jaar later op, in 1911.

Bij al deze turbulente ontwikkelingen wordt vaak vergeten dat een promovenda van Lorentz, Johanna Reudler (1879–?), in haar prachtige proefschrift 'Over de zwarte straling in ruimten van verschillenden vorm' het vermoeden verifieerde voor cirkels, rechthoeken, bollen, parallelepipeda en cilinders. De enige verwijzing naar 'Fräulein Reudler' staat in een voetnoot van het artikel van Weyl, en de al vermelde lezing van Lorentz laat haar anoniem.

In de jaren 1990 construeerden Carolyn Gordon, David Webb en Scott Wolpert de eerste voorbeelden van trommels die er niet hetzelfde uitzien, maar toch hetzelfde klinken. Hier betekent 'hetzelfde klinken': 'hetzelfde Laplace-spectrum hebben'. Een recente studie van Koen Thas (1977) en zijn medewerkers laat zien dat alle bekende dubbelzinnigheden tussen de vormen van dergelijke trommels verklaard worden vanuit de symmetriegroepen van bepaalde soorten meetkundes, genaamd *Galoismeetkundes*. Zo zijn we weer, via het tweede voorbeeld, aangekomen bij het eerste voorbeeld.

Samenvattend. We hebben nu vier voorbeelden van dubbelzinnigheid: polynoomvergelijkingen oplossen en worteltrekken, symmetrie in figuren, invariantie in renormalisatie en het trommelvormen-probleem. Steeds is een soort Galoistheorie verantwoordelijk voor ons begrip van de situatie, of liever gezegd: het meten van ons onbegrip van de situatie.

Deze voorbeelden lopen ook dwars door de zogenaamde grenzen tussen algebra, getaltheorie, meetkunde, analyse en mathematische fysica. Frans Oort gaf ooit een lezing als titel 'Algebra of meetkunde?', en gaf hierop het antwoord 'Algebra en meetkunde!'. Ik zou nog verder gaan en Jean Dieudonné (1906-1992) citeren: "Het zou absurd zijn en tegen de geest zelf van onze wetenschap ingaan om haar te willen opdelen in rigide delen, op de wijze van de traditionele verdeling in algebra, analyse, meetkunde, etc. die heden ten dage compleet stukloopt."

Het dubbelzinnige verleden

Voor ik verder inga op muziek maken met wiskunde, grijp ik de eerste twee voorbeelden aan om u wat te vertellen over mijn eigen onderzoek van de afgelopen tien jaar. Wie mij kent weet dat ik in de wiskunde graag van de hak op de tak spring, wat ik zelf (zie het citaat van Dieudonné) als pluspunt ervaar. Nu zal ik proberen in deze potpourri een lijn te vinden.

Galoistheorie in hyperbolische meetkunde
In het eerste voorbeeld ging het om de dubbelzinnigheid die bestaat tussen de oplossingen van polynoomvergelijkingen. We weten van verrassend weinig polynomen wat de dubbelzinnigheid tussen de oplossingen precies is. In zekere zin hebben we weliswaar een wiskundige theorie over het meten van deze dubbelzinnigheid, maar het concreet bepalen daarvan, oftewel het berekenen van de Galoisgroep, is veel moeilijker. Wiskundigen zijn notoir lui als het om rekenen gaat.

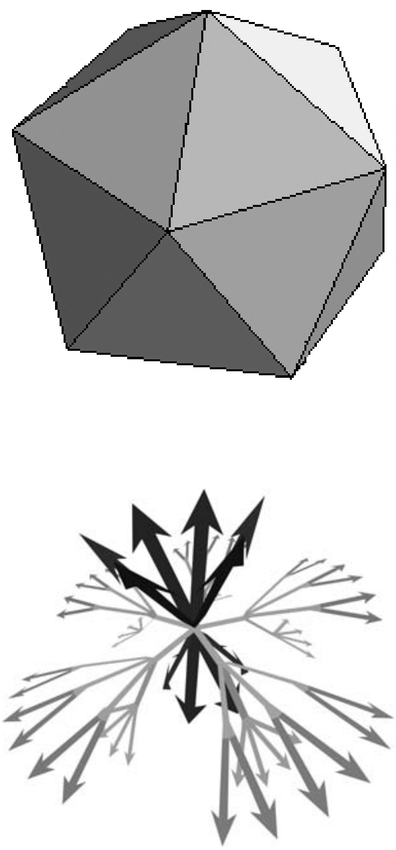
Ik ben mijn carrière begonnen met het overwinnen van deze luiheid, namelijk: met het berekenen van Galoisgroepen in de theorie van modulaire vormen. De achtergrond vormt het werk van Issai Schur (1875–1941) aan de Galoisgroepen van klassieke orthogonale polynomen: ze zijn, in mooie traditionele terminologie, *zonder emotie* ('ohne Affekt').

Ik heb laten zien dat precies dezelfde dubbelzinnigheid optreedt in de hyperbolische meetkunde, namelijk voor de verzameling nulpunten van Eisenstein-reeksen op de modulaire kromme. De moraal is dat Eisensteinreeksen misschien wel een soort orthogonale polynomen zijn in het hyperbolische vlak, compatibel met werk van Masanobu Kaneko en Don Zagier (1951).

Vervorming van symmetrie
In het tweede voorbeeld ging het om dubbelzinnigheid in de meetkunde, die te wijten is aan symmetrieën, zoals in de Europese vlag. In het geval van mijn eigen onderzoek gaat het om het bestuderen van de vervormingen ('deformaties') van objecten die eventuele symmetrieën van het object behouden. Zo is de vlag symmetrisch onder het verwisselen van linker- en rechterkant.

In een jarenlang project met Fumiharu Kato (1968), Ariane Mézard (1974) en Jakub Byszewski (1984) heb ik onderzocht wat de structuur is van de 'deformatieruimte' van krommen met symmetrieën.

Niet-archimedische platonische lichamen
De meeste symmetrie ter wereld ligt verborgen in de zogenaamde platonische lichamen: de regelmatige convexe 4-, 6-, 8-, 12- en 20-vlakken tetraëder, kubus, octaëder, icosaëder, dodecaëder. Het zijn de wonderen van onze alledaagse meetkunde. Men kan nu de vraag stellen of er zoiets als platonische lichamen bestaat in andere meetkundes. De-



Een 'normale' en een '2-adische' icosaëder (gemaakt door Bill Casselman)

Roze ruis en dobbelstenen

Roze ruis kan met dobbelstenen als volgt worden benaderd: nummer drie dobbelstenen. Gooi eerst met alle dobbelstenen. Gooi vervolgens achtereenvolgens enkel met de derde, tweede en derde, derde, eerste en tweede, tweede en derde en enkel de derde dobbelsteen, en schrijf na iedere worp de som van de ogen van alledrie de dobbelstenen op (dus ook de dobbelstenen die zijn blijven liggen). Laat ieder getal tussen het minimale aantal ogen 3 en het maximale aantal ogen 18 corresponderen met een noot (bijv. in een chromatische toonladder).

ze vraag heb ik beantwoord in werk met Kato en Aristides Kontogeorgis (1972) voor *niet-archimedische meetkunde*. Die is anders dan de huis-, tuin- en keukenmeetkunde die u gewend bent, maar het is een natuurlijke manier om het klassieke 'meten' met reële getallen door te trekken naar andere gebieden: een getal is in dit soort meetkunde klein als het door een hoge macht van een gegeven priemgetal deelbaar is.

De verrassende fysische relevantie kwam o.a. met de berekening van de partitiefunctie van de Polyakovsnaar door Manin, en nu ook in het werk van Maxim Kontsevich (1964) en Yan Soibelman aan spiegelsymmetrie. Manin illustreert het verband tussen priemgetallenmeetkunde en fysica met volgende gelijkheid: het product van de uitdrukking '1 min het inverse kwadraat' over alle priemgetallen is gelijk aan $6/\pi^2$. De linkerkant van deze gelijkheid is getaltheoretisch, en de rechterkant is 'fysisch', of 'analytisch'.

Ons werk konden we gebruiken als 'chemische' bouwstenen voor het beantwoorden van de vraag wat voor symmetrieën er überhaupt mogelijk zijn in de niet-archimedische meetkunde.

Aantoonbare onmogelijkheid

Tenslotte wil ik nog kort ingaan op mijn onderzoek naar 'aantoonbare onmogelijkheid'. Het is een sterk punt van de wiskunde dat zij haar eigen grenzen kent: ze weet soms heel precies, op meetbare wijze, duidelijk te maken wat ze zelf niet kan. De dubbelzinnigheid waarover ik het hier heb is de onvolledigheidsstelling van Kurt Gödel (1906–1978).

Yuri Matijasevich (1947) gaf volgende versie van deze stelling: er bestaat een *spel*, zoiets als schaken, of kaartspelen, tussen uzelf en een andere speler, zo dat u bij iedere zet van de andere speler een winnende strategie heeft, maar die strategie niet door een computer kan worden berekend. Kortom: winnen is aantoonbaar altijd mogelijk, maar tegelijkertijd is het aantoonbaar onmogelijk de oplossing te berekenen. Als u in deze formulering 'spel' door 'wiskunde' vervangt, en 'berekenen' door 'bewijzen', komt u in de buurt van de stelling van Gödel.

Men kan wiskundig meten hoe onmogelijk iets is. De vraag hoe onmogelijk het is diophantische vergelijkingen op te lossen heb ik met Karim Zahidi (1972), Thanases Pheidas en Sasha Shlapentokh onderzocht via de onzichtbare elliptische krommen uit uw mobiele telefoon. Het is een kwantificatie van de onbeslisbaarheid bij Gödel.

Conclusie

Samenvattend, en terugkijkend naar de afgelopen jaren, zie ik het volgende patroon te voorschijn komen.

In de wiskunde hebben wij in de twintigste eeuw geleerd uit de nood een deugd te maken, door dubbelzinnigheid enerzijds, en onze onwetendheid of onkunde om iets te kunnen meten anderzijds, zélf te kwantificeren, en op die manier de grenzen van onze kennis om te zetten in een object dat we op zijn beurt dan weer met wiskunde kunnen bestuderen en meten. *Die Vermessung des Unvermögens zu Messen.* Ook dit is Galoistheorie.

We mogen niet te snel opgeven: een methode die niet werkt heeft vaak als oorzaak een interessant onderliggend fenomeen, dat we dan op zijn beurt weer kunnen bestuderen.

Ik denk hierbij aan de Bernoullilezing van mijn collega Hendrik Lenstra, waarin 'onbegrip' als belangrijke drijfveer voor het maken van nieuwe wiskunde wordt aangedragen. Aan het scala onderzoekstechnieken dat door Lenstra wordt opgesomd wil ik vandaag toevoegen: meet je onbegrip, en maak van deze meting een nieuw studie-object.

Hieruit kunnen wij misschien in de echte wereld, die ondertussen in de keuken flink is aangebrand, ook wat lering trekken. Onvermogen kan een kwaliteit zijn, mits begrepen. Als je weet dat je iets niet kan, probeer dan te meten in hoeverre je het niet kan.

Voorbeeldcompositie 4 (met Karim Zahidi): muziek bij de reeks 15,3,6,4,13,4,5,5,13,5,7,2,12,4,9,4. Notenzetting: Derk Pik

De autocorrelatiefunctie

$$R : \{1,\ldots,N-1\} \to [-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}]$$

van een dataset $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ is

$$R(k) = \frac{\sum_{t=1}^{N-k}(x_t-\bar{x})(x_{t+k}-\bar{x})}{\sum_{t=1}^{N}(x_t-\bar{x})^2}$$

Componeren met wiskunde

De dubbelzinnigheid in het trommelvormenprobleem wil ik gebruiken om u iets te vertellen over mijn huidige onderzoek.

Straks zullen we bekijken hoe een muziektoon is opgebouwd. Muziek bestaat echter niet alleen uit individuele tonen, maar uit een opeenvolging van tonen.

Die opeenvolging van tonen blijkt statistisch interessant gedrag te vertonen, zoals in de jaren 1970 werd ontdekt door Voss en Clarke. Als we een dobbelsteen opgooien voor iedere toon, dan krijgen we 'witte ruis' — het klinkt niet als muziek, want er is geen *correlatie* tussen tonen. Als we daarentegen een dobbelsteen opgooien en daarmee de afwijking ten opzichte van de vorige toon bepalen, is er wel een verband tussen opeenvolgende tonen. We krijgen dan 'bruine ruis', en het klinkt als erg saaie muziek, omdat er *te veel* correlatie tussen de tonen is. Bij analyse van bestaande muziek blijkt deze te voldoen aan een correlatieproces dat *roze ruis*, of 1/f-ruis heet. Roze ruis kan ook met een dobbelstenen-proces worden benaderd. Voor een lerarensymposium in België hebben Karim Zahidi en ikzelf jaren geleden op die manier een aantal melodieën bij mekaar gedobbeld en van ritme en harmonie voorzien.

Helaas (of gelukkig?) hadden wij het dobbelrecept voor roze ruis echter verkeerd begrepen, doordat we bij iedere gooibeurt enkel de dobbelstenen opgeteld hadden die bij die beurt werden gegooid. Hierdoor ging heel wat correlatie verloren. Wij gooiden bij nader inzien gewoon willekeurig afwisselend met 3, 1, 2 en 1 dobbelsteen. Hierdoor vallen de waarden opeenvolgend in de intervallen 3 tot 18, 1 tot 6, 2 tot 12 en 1 tot 6. Er ontstaat dan echter een soort standaard ‘akkoordenstructuur’ waarbij vier opeenvolgende noten vanzelf een harmonie suggereren. Ik weet niet wat U vindt, maar ons hebben deze melodieën aangenaam verrast, en stiekem vind ik ze zelfs beter klinken dan ‘roze ruis’. Voor wie Karim kent is er maar één mogelijke naam voor dit proces: *dieprode* ruis. De autocorrelatiegrafiek laat zien dat dieprode ruis een zogenaamde ‘sinusoïdale’ correlatie vertoont; dit betekent grofweg dat de verbandenstructuur in deze melodie zélf de vorm van een pure boventoon heeft — een mooie zelfverwijzing.

De muziek van de relativiteitstheorie?

Hiermee komen we nu aan bij de wiskundige structuur van een individuele toon, het coloriet van een instrument. Wat we horen als we een vioolsnaar aanslaan, op een trommel slaan, of lucht door een orgelpijp jagen, bestaat uit een grondtoon en boventonen. De trillingen worden beschreven via de golfvergelijking, en de pure tonen corresponderen met zogenaamde eigenfuncties van de bijbehorende Laplace-operator. Die kunt u zich als volgt voorstellen. Als we een foto maken van een trillende snaar op een vast moment in de tijd, dan zien we een plaatje dat is opgebouwd uit het over mekaar leggen van dergelijke eigenfuncties: het zijn de sinussen en cosinussen van de middelbare school.

Het coloriet van een specifiek instrument is bepaald door de wijze waarop de boventonen gecombineerd worden, van een snerpende zaag tot een liefelijke blokfluit. De hoorbare informatie heet in de wiskunde ‘spectrale data’. Er zijn twee soorten vragen: inverse problemen, oftewel ‘Welke informatie is spectraal, dus hoorbaar?’, en directe problemen, oftewel ‘Wat weten we over het spectrum als we het instrument kennen?’.

Ter herinnering: volgens Weyl is oppervlakte spectraal, en volgens Gordon, Webb en Wolpert vorm niet.

De inverse spectrale vraag duikt voor het eerst op in een rapport van de natuurkundige Arthur Schuster voor de Brittish Association in 1882. Schuster, de bedenker van de term ‘spectroscopie’, schrijft: “Een oplossing van het inverse probleem zou zelfs de meest bekwame wiskundige verbazen: de vorm van een klok afleiden uit de geluiden die ze kan voortbrengen. [...] Ondertussen moeten we zelfs de kleinste stap in deze richting vreugdevol verwelkomen.”

De chemische samenstelling van de zon kennen we *niet* doordat we een retourtje zon hebben gemaakt en een schepje helium meegebracht. We weten dat door te kijken en spectroscopie te bedrijven.

Een verrassende toepassing van het inverse spectrale probleem uit de **gravitatietheorie** dat erg dicht bij mijn huidige interesse staat is het werk van de Japanse fysicus Masafumi Seriu: het spectrum wordt gebruikt als afstandsmaat tussen verschillende oplossingen voor de vergelijkingen van Einstein voor het universum. Zoals u vast wel ooit heeft gehoord, is de ruimte waarin wij leven gekromd en zijn ‘ruimte’ en ‘tijd’ ondeelbaar met mekaar verbonden op kosmische schaal. De vergelijkingen van Einstein geven mogelijke modellen voor het universum, maar daar zijn er meerdere van.

In het bijzonder is er de vraag deze modellen met elkaar en met de realiteit te vergelijken. Een centrale vraag in de algemene relativiteit is ‘of cosmologie mogelijk is’, dat wil zeggen, of er een realistisch model is voor de complete evolutie van het heelal. Door Seriu wordt het spectrum gebruikt als afstand tussen verschillende universa. Maar het probleem van de ‘isospectraliteit’, dus dat de vorm van het universum niet noodzakelijk uit zijn klank is af te leiden, blijft bestaan. Hoe gaan we daarmee om? We zoeken het even op bij Riemann.

Riemann en Riemann

Als promovendus nam ik bij het surveilleren bij tentamens altijd een deel van het verzameld werk van een Groot Wiskundige mee, om door te bladeren en hier en daar in te lezen. Ik weet nog goed dat ik stukjes van Leopold Kronecker (1823–1891) zó kon lezen, maar dat ik van het werk van Bernhard Riemann (1826–1866) werkelijk niets begreep. Nu, vijftien jaar later, heb ik een jaar lang in zijn verzameld werk zitten lezen. Het is een boek van iets meer dan 500 bladzijden, waarvan er ongeveer 200 tijdens zijn leven gepubliceerd werden. Ik begrijp er nog steeds niks van. Ik neem nu de uitdaging aan te proberen aan dit werk een ‘epsilon’ toe te voegen. ‘Epsilon’ is wiskundejargon voor ‘een verwaarloosbaar kleine kwantiteit’.

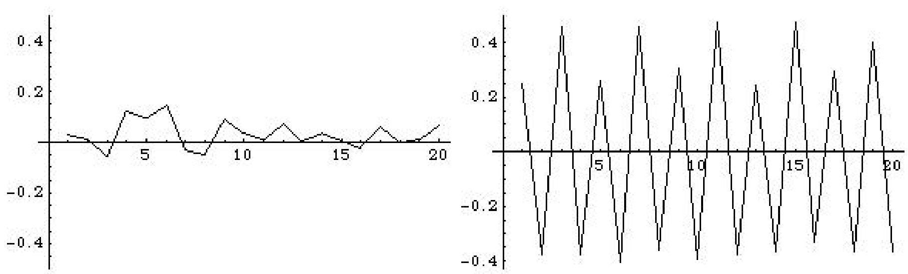
Riemann leverde ons fundamentele concepten als de Riemann zeta-functie en Riemannse meetkunde, en ik heb beide nodig.

Foto: Arthur van Dam

Organist Gert Oost (1942–2009) improviseert ‘dieprode ruis-muziek’ op het Hinszorgel tijdens de oratie.

Eerst iets over de **Riemann zeta-functie** en de Riemann-hypothese, het beroemdste open probleem in de wiskunde. Het spectrum (de boventonen) worden in de wiskunde samengepakt in een *zeta-functie*. De Riemann zeta functie hoort bij de boventonen van een cirkelvormige snaar.

De getaltheoreten in de zaal huiveren van mijn definitie van de Riemann zeta-functie. Immers, voor hen (en voor mij) meet de zetafunctie hoe priemgetallen verdeeld zijn. Als je



Autocorrelatiefunctie (zie kader op de vorige pagina) voor witte (links) en dieprode (rechts) ruis, op basis van een simulatie met 250 ‘random’ tonen in Mathematica

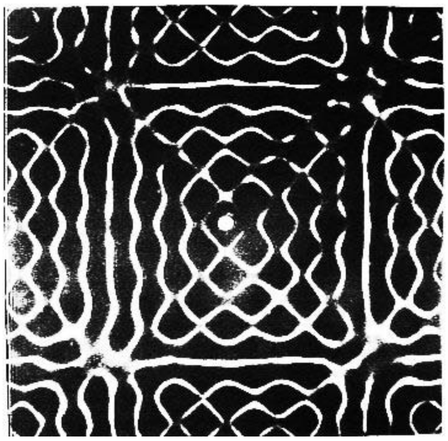


Foto: Stephen Morris, Experimental Nonlinear Physics, University of Toronto

Chladni-patroon op een zwart geschilderde 0.125 inch dikke vierkante alluminium plaat van 70x70 cm, bij 3678.1 Hz

begint te kijken waar in de natuurlijke getallen de priemgetallen zitten, dus getallen met als enige delers zichzelf en 1, dan lijkt dat in eerste instantie willekeurig. Maar op basis van lange berekeningen zag Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dat de priemgetallen wel degelijk gemiddeld op een bijzondere manier in de verzameling van alle getallen liggen. En de fout die wordt gemaakt tussen de werkelijke verdeling van de priemgetallen en die van Gauss is het 'minst opvallend' precies als de Riemannhypothese klopt. Trouwens, met Oliver Lorscheid (1978) heb ik in de afgelopen jaren een oud idee van Don Zagier opgepikt om dit te proberen bewijzen — uiteraard met epsilon succes. Toch is deze getaltheoretische zeta-functie hetzelfde als die van de cirkelvormige snaar, en dat is het begin van het grote mysterie. Als we de titel van het populaire boek van Marcus du Sautoy, 'De muziek van de priemgetallen' bekijken, dan krijgen we de indruk ook naar de priemgetallen te kunnen luisteren. Met het spectrum dat bij de priemgetallen hoort kun je inderdaad echt een toon voortbrengen, dat heeft Sir Michael Berry een keer gedaan, maar over het resultaat lopen de meningen uiteen. 'In ieder geval beter dan Wagner', heb ik een keer gehoord.

Een ander fundamenteel concept van Riemann is de zogenaamde **Riemannse meetkunde**, een flexibele modelmeetkunde, met enige aanpassingen bruikbaar in de relativiteitstheorie. Er is namelijk niet één meetkunde, maar er zijn er vele. Het leven op een bol is anders dan in een plat vlak; op grote schaal althans. Op een bol kom je bijvoorbeeld na lange tijd weer terug waar je bent begonnen, en op de vlakke eindige aarde val je ergens over de rand tussen monsters.

Floris Takens (1940) vroeg mij vorig jaar: hoe is het mogelijk verschillende Riemannse meetkundes te vergelijken, want ze zijn uit lokale informatie opgebouwd. De aanleiding voor deze vraag was een misverstand: ik wilde graag een goede notie van 'hetzelfde zijn' in de niet-commutatieve meetkunde bedenken, laat staan alles met elkaar vergelijken. Maar het heeft me toch aan het denken gezet.

Riemannse meetkundes brengen geluid voort. De spectrale meetkunde, dat wil zeggen Riemannse meetkunde vanuit het standpunt van de Laplace-operator, de zeta-functie, dus het 'geluid' dat de meetkunde voorbrengt, heeft in de afgelopen twintig jaar een vlucht genomen in het bouwwerk van Alain Connes, genaamd *niet-commutatieve meetkunde*. Ik zal u de details hiervan besparen, maar de wortels ervan zijn te vinden in de kwantummechanica. Een probleem met dit pas twintig jaar jonge gebied van de wiskunde wordt treffend samengevat in volgend citaat van Yuri Manin: "Niet-commutatieve meetkunde ziet er vandaag uit als een gigantische bouwput, maar het ontbreekt aan een gemeenschappelijk fundament: van veel interessante constructies van 'niet-commutatieve ruimten' kunnen we zelfs niet met zekerheid zeggen of ze hetzelfde zijn of niet." Vandaar mijn vraag naar 'hetzelfde zijn'.

Nu is het in de niet-commutatieve meetkunde gebruikelijk om naar *families* van zetafuncties te kijken, geïndiceerd door functies op de meetkunde die men als muziekinstrument gebruikt.

Dit roept meteen de vraag op of die families van zeta-functies *wel* de meetkunde, ons muziekinstrument, uniek bepalen; een centraal punt in mijn huidige onderzoek. Met Matilde Marcolli (1969) heb ik vorig jaar al aangetoond dat trommels in de vorm van een gesloten oppervlak (eigenlijk compacte hyperbolische Riemannoppervlakken) reconstrueerbaar zijn uit een dergelijke Connesachtige meetkunde. Nu werk ik aan het geval van een algemene Riemannse meetkunde.

Als antwoord construeren wij bij ieder paar diffeomorfe Riemannse meetkundes een *veld* van zeta-functies. Als de theorie werkt, dan geeft een constant zetaveld gelijke meetkundes. Een holomorf veld duidt op een overdekking. In het algemene geval is dit zetaveld een maat voor het verschil tussen de Riemannse meetkundes. Dit is dan een soort antwoord op de vraag van Takens. We weten nog niet in hoeverre deze theorie werkt; we weten bijvoorbeeld wel al dat een constant veld gelijkheid impliceert in een residuele verzameling Riemannse metrieken op de gegeven ruimte.

In plaats van hier verder op in te gaan, verwijs ik naar een filmpje van een object dat in het bewijs een belangrijke rol speelt: de knopenverzamelingen, oftewel de nulpuntsverzamelingen van de eigenfuncties. Die werden voor een vlakke trillende glasplaat voor het eerst zichtbaar gemaakt in een experiment van Robert Hooke (1635-1703) in 1680, dat werd herhaald en populair gemaakt door Ernst Chladni (1756-1827). Ondertussen gebruikt een new age bedrijf dit zelfs om uw eigen stemgeluid in een psychedelisch patroon om te zetten. Hooke en Chladni strooiden fijn zand op een glazen of metalen plaat die ze vervolgens lieten trillen. Het experiment is aan de Wake Forrest University opgenomen. Bekijk eens het spectaculaire filmpje met zout gestrooid op een luidsprekerplaat (http://www.wfu.edu/academics/physics/demolabs/demos/avimov/waves/chladni_plates/resonance_square.MPG). Voor mijn wiskundige collega's nog de opmerking dat we hier niet alleen de nulpuntsverzamelingen van de eigenfuncties van de Laplace-operator zien, want we hebben niet van doen met de gebruikelijke golfvergelijking. In deze patronen komen symmetrie en trommels weer op een verrassende manier samen.

Ik zou mijn onderzoeksprogramma als volgt willen samenvatten: door kwantummechanisch, dat wil zeggen met het veld van zetafuncties uit de niet-commutatieve meetkunde, te luisteren naar klassieke instrumenten, kunnen we die instrumenten reconstrueren. Dit luisteren gebeurt door zoiets als het afdekken van gedeelten van de trommel en luisteren naar het geluid dat dan wordt voortgebracht. Een soort trommelspel met twee handen, dus.

Maar wacht, de zeta-functie was toch iets getaltheoretisch? De vraag is dan ook wat voor implicaties of analogieën dit werk weer heeft voor de getaltheorie. Sir Michael Atiyah zei al dat het 'Fort der Getaltheorie' het volgende is dat door methodes uit de mathematische fysica zal worden overwonnen. Ik heb hier geen voorstelling bij, maar intrigerend is het wel.

Men neme het universum, en twee heel erg grote handen. Met één hand wordt stukje bij beetje het universum afgedekt. Met de andere hand wordt op het universum getrommeld. We bekijken de wonderbaarlijke Chladni-patronen. Zo kunnen we precies horen en zien in welk universum we onszelf bevinden. Als u zich ooit door mekaar geschud voelt, dan is het misschien wel omdat mijn onderzoeksgroepje weer eens het universum aan het aftasten is.

Volledige versie
De volledige tekst met annotaties, vertalingen, foto's en geluidsfragmenten vindt u op www.math.uu.nl/people/cornelis/oratie/oratie.shtml