Klaas Pieter Hart
Faculteit EWI
TU Delft
Postbus 5031
2600 GA Delft
k.p.hart@tudelft.nl

De Continuümhypothese

In het Nieuw Archief voor Wiskunde van Maart 2007 beschreef Teun Koetsier een opera over het leven en werk van Georg Cantor, door vrijwel iedereen gezien als de vader van de Verzamelingenleer. Een belangrijk thema in de opera was het probleem waar Cantor zich vrijwel vanaf het begin van zijn opbouw van de Verzamelingenleer het hoofd over gebroken heeft: de Continuümhypothese, die in de opera uitgedrukt wordt als $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Dit artikel legt uit wat die Continuümhypothese is, wat men er mee kan doen en waarom Cantor's streven naar een bewijs tot mislukken gedoemd was.

De Continuümhypothese, vanaf nu kortweg met CH aangeduid, is onlosmakelijk verbonden met de vraag hoeveel punten er op een lijn liggen of, wat op hetzelfde neerkomt, hoeveel reële getallen er zijn.

In een brief, gedateerd Halle, d. 29$^{\text{ten}}$ Nov. 73, stelde Cantor de volgende vraag aan Dedekind:

> Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n); ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrössen x und bezeichne ihn mit (x); so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordenen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?

Met een schijnbaar typisch Duitse omhaal van woorden vroeg Cantor of er een bijectieve afbeelding tussen de verzamelingen $\mathbb{N}$ en het interval $(0,\infty)$ bestaat. Die omhaal was echter nodig omdat onze 'moderne' noties van afbeelding, injectie, surjectie en bijectie die namen nog niet gekregen hadden.

Het antwoord liet niet lang op zich wachten. In 1874 publiceerde Cantor het artikel [4] waarin hij twee dingen bewees.

Ten eerste liet hij zien dat het mogelijk was de verzameling van alle reële algebraïsche getallen te nummeren met behulp van de natuurlijke getallen. Het argument is te aardig om hier onbeschreven te laten. Elk algebraïsch getal is nulpunt van een polynoom

$$a_0 + a_1x + + \cdots + a_nx^n$$

met gehele coëfficiënten. De som

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

noemen we de *hoogte* van het polynoom. De hoogte van het minimale polynoom van een algebraïsch getal noemen we dan de hoogte van dat getal. Bij elke N horen slechts eindig veel polynomen met hoogte N en die hebben elk weer eindig veel nulpunten en dus zijn er slechts eindig veel getallen van hoogte N.

We kunnen nu als volgt een lijst van de algebraïsche getallen maken: eerst sorteren naar hoogte en per hoogte ordenen naar opklimmende grootte binnen $\mathbb{R}$.

Het tweede resultaat was het antwoord op de vraag uit de brief:

> Wenn eine nach irgendeinerm Gesetze gegebenen unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrößen
>
> $$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots \qquad (4)$$
>
> vorliegt, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4) nicht vorkommt; dies sol nun bewiesen werden.

Ook het bewijs van deze stelling laat zich snel schetsen. Met recursie definieerde Cantor twee rijen getallen $\langle\alpha_n\rangle$ en $\langle\beta_n\rangle$ door telkens α_{n+1} en β_{n+1} (met $\alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$) de eerste twee termen uit de gegeven rij te laten zijn die in het interval (α_n, β_n) liggen (beginnend met $\alpha_0 = \alpha$ en $\beta_0 = \beta$). Als dit proces stopt, omdat er nog ten hoogste één term in (α_n, β_n) ligt, laat zich het bestaat van een η snel aantonen. Als dit proces niet stopt convergeren de rijen $\langle\alpha_n\rangle$ en $\langle\beta_n\rangle$ naar respectievelijk $\alpha_\infty = \sup_n \alpha_n$ en $\beta_\infty = \inf_n \beta_n$. Dan geldt $\alpha_\infty \leqslant \beta_\infty$. Kies η in $[\alpha_\infty, \beta_\infty]$; dan volgt enerzijds $\eta \in \bigcap_n(\alpha_n, \beta_n)$ en anderzijds geldt voor elke ν dat $\omega_\nu \notin (\alpha_\nu, \beta_\nu)$; η komt dus

Lineaire ordeningen

In het artikel [7] bewees Cantor, in essentie, dat een aftelbare lineair geordende verzameling zonder begin- en eindpunten die dicht geordend is (als $x < y$ dan is er een z met $x < z < y$) isomorf is met $\mathbb{Q}$, de verzameling der rationale getallen. In [8] maakte hij dit expliciet en gaf hij het ordetype van $\mathbb{Q}$ aan het η.

Zo'n stelling bestaat niet zonder meer voor lineair geordende verzamelingen van kardinaliteit $2^{\aleph_0}$, de reële rechte is niet isomorf met de verzameling van irrationale getallen, bijvoorbeeld.

Om toch tot zo'n stelling te komen voerde Hausdorff de zogeheten η_1-verzamelingen in: dit zijn lineair geordende verzamelingen die net als $\mathbb{Q}$ geen begin- en eindpunten hebben en dicht geordend zijn; meer dan dat: als A en B aftelbaar zijn en $a < b$ telkens als $a \in A$ en $b \in B$ dat bestaat een z met $a < z < b$ voor alle $a \in A$ en $b \in B$.

De Continuümhypothese kan nu gebruikt worden om Cantor's stelling te generaliseren tot: elk tweetal η_1-verzamelingen van kardinaliteit $2^{\aleph_0}$ is isomorf. Het bewijs is dat van Cantor; CH zorgt er voor dat het isomorfisme in 'slechts' $\aleph_1$ stappen gemaakt kan worden en de eis op de aftelbare deelverzamelingen zorgt dat elke stap ook daadwerkelijk genomen kan worden.

De notie van η_1-verzameling is niet zo esoterisch als men zou denken: elk niet-standaard model van de reële rechte is een η_1-verzameling. Verder is het zo dat de eis op de aftelbare deelverzamelingen geleid heeft tot de notie van *verzadiging* in de Modeltheorie en de ultieme generalisatie van Cantor's isomorfiestelling: CH impliceert dat elk tweetal elementair equivalente en aftelbaar verzadigde structuren van kardinaliteit $2^{\aleph_0}$ isomorf is. Dit alles wordt in Hoofdstuk 8 van [20] netjes uitgelegd.

De isomorfiestelling is equivalent met CH: als CH namelijk niet geldt kan men niet-isomorfe niet-standaard modellen van $\mathbb{R}$ vinden.

niet in de rij voor. Als de ω_ν een nummering van de algebraïsche getallen vormen geldt natuurlijk $\alpha_\infty = \beta_\infty$.

Cantor bleef over dit soort problemen met Dedekind van gedachten wisselen, getuige deze vraag uit een brief, gedateerd Halle, d. 5ten Januar 74.

Lässt sich eine Flache (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) eindeutig auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Puncte der Fläche ein Punct der Linie und umgekehrt zu jedem Puncte der Linie ein Punct der Fläche gehört?

Het antwoord verscheen in [5].

(A.) Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ voneinander unabhängige, veränderliche reele Größen, von denen jede alle Werte, die $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, annehmen kann, und ist t eine andere Veränderliche mit dem gleichen Spielraum ($0 \leqq t \leqq 1$), so ist es möglich, die Größe t dem Systeme der n Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ so zuordnen, daß zu jedem bestimmten Werte von t ein bestimmtes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ und umgekehrt zu jedem bestimmten Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein gewisser Wert von t gehört.

Cantor's eerste bewijs, in een brief aan Dedekind, bestond uit het ineen vlechten van decimale ontwikkelingen van de x_i tot één voor t en liep spaak op het niet uniek zijn van die ontwikkeling. Het gepubliceerde bewijs verliep als volgt.

Stap 1: zij $\mathbb{P}$ de verzameling irrationale getallen in $[0,1]$; door middel van het ineenvlechten van kettingbreukontwikkelingen (die wel uniek zijn) construeert men eenvoudig een bijectie tussen $\mathbb{P}^n$ en $\mathbb{P}$.

Stap 2: construeer een bijectie tussen $\mathbb{P}$ en $[0,1]$. Kies hiertoe een rij irrationale getallen $\langle a_n \rangle$ die naar 0 convergeert, zeg $a_n = \sqrt{2}/2^{n+1}$, en een aftelling $\langle q_n \rangle$ van de rationale getallen in $[0,1]$. Schrijf $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ en $B = [0,1] \setminus (A \cup Q)$. Definieer nu $b : [0,1] \to \mathbb{P}$ door

- $b(x) = x$ als $x \in B$,
- $b(a_n) = q_{2n-1}$ en
- $b(q_n) = q_{2n}$.

Stap 3: via $\mathbb{P}$ en $\mathbb{P}^n$ verkrijgt men door samenstelling een bijectie tussen $[0,1]^n$ en $[0,1]$:

$$[0,1]^n \to \mathbb{P}^n \to \mathbb{P} \to [0,1]$$

Door de paren natuurlijke getallen af te tellen en zo oneindig veel kettingbreukontwikkelingen te vervlechten lukte het Cantor ook een bijectie tussen $\mathbb{P}^\infty$ en $\mathbb{P}$, en daarmee tussen $[0,1]^\infty$ en $[0,1]$, te maken.

In een brief aan Dedekind schreef Cantor: Je le vois, mais je ne le crois pas. Wat voortvarend concludeerde hij dat hiermee het begrip 'dimensie' op losse schroeven kwam te staan; Dedekind voerde echter aan dat Cantor's bijecties verre van continu waren. Zoals we nu, dankzij Brouwer, weten bestaan inderdaad geen *continue* bijecties tussen $[0,1]^n$ en $[0,1]^m$ als $n \neq m$.

In [5] begon Cantor de deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ in klassen te verdelen: hij definieerde wanneer twee verzamelingen M en N *dezelfde machtigheid* hebben, genoteerd $M \sim N$: namelijk als er een bijectie tussen M en N bestaat. De relatie $\sim$ is reflexief, symmetrisch en transitief en dus een equivalentierelatie. Deze relatie heeft oneindig veel klassen: voor elk natuurlijk getal n is er de klasse van deelverzamelingen A met $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$. Verder hebben we de equivalentieklassen van $\mathbb{N}$ en die van $\mathbb{R}$; deze zijn, wegens de stelling uit [4], verschillend.

Aan het eind van [5] schreef Cantor over het aantal equivalentieklassen van *oneindige* verzamelingen het volgende (een *lineare Mannigfaltigkeit* is een oneindige deelverzameling van $\mathbb{R}$):

Durch ein Induktionsverfahren, auf dessen Darstellung wir hier nicht näher eingehen, wird der Satz nahe gebracht, daß die Anzahl der nach diesem Einteilungsprinzip sich ergebenden Klassen linearer Mannigfaltigkeiten eine endliche und zwar, daß sie gleich *Zwei* ist.

Dit nu is waar dit artikel uiteindelijk over gaat: het idee van Cantor dat er voor oneindige deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ maar twee mogelijkheden zijn: gelijkmachtig met $\mathbb{N}$ of gelijkmachtig met $\mathbb{R}$. Wat ook verduidelijking behoeft is hoe dit vermoeden van een probleem uiteindelijk een Hypothese geworden is.

In [7] bewees Cantor dat voor de oneindige *gesloten* deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ de dichotomie inderdaad opgaat en hij kondigde andermaal aan een bewijs van de algemene dichotomie te produceren.

De dichotomie werd door Alexandroff en Hausdorff uitgebreid tot de klasse der Borelverzamelingen en later door Souslin tot de familie van alle analytische verzamelingen, dat zijn de continue beelden van Borelverzamelingen.

De formulering uit de opera

De lezer van [21] herinnert zich ongetwijfeld de gelijkheid

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \qquad (*)$$

die in de opera zo'n belangrijke rol speelde. Wat heeft deze met het probleem van Cantor te maken? Wel, het is er, onder zekere voorwaarden, een herformulering van en vormt het samenkomen van twee lijnen van onderzoek die Cantor volgde bij zijn werk aan de structuur van de deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. De ene lijn hebben we al gezien: deze betreft het *aantal* elementen van verzamelingen. De andere lijn had zijn oorsprong in de theorie van de trigonometrische reeksen.

Kardinaalgetallen
In [8] introduceerde Cantor het begrip *Kardinaalgetal* als volgt

'Mächtigkeit' oder 'Cardinalzahl' von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird.

Das Resultat dieses zweifachen Abstractionsacts, die Cardinalzahl oder Mächtigkeit von M, bezeichnen wir mit

$$\overline{\overline{M}}$$

Hier valt het nodige op af te dingen maar Cantor maakte duidelijk dat $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$ equivalent is met $M \sim N$ en elk bewijs van gelijkheid van kardinaalgetallen verliep door een bijectie tussen de onderhavige verzamelingen aan te geven.

Cantor liet zien hoe met kardinaalgetallen gerekend kon worden: sommen werden door middel van disjuncte verenigingen gedefinieerd, producten door middel van productverzamelingen en machtsverheffen geschiedde door naar verzamelingen afbeeldingen te kijken.

In dit artikel werd ook de $\aleph$-notatie voor oneindige kardinaalgetallen ingevoerd met als begin $\aleph_0 = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$. Per definitie is dan $2^{\aleph_0}$ het kardinaalgetal van de verzameling van alle afbeeldingen van $\mathbb{N}$ naar $\{0,1\}$. Cantor bewees vervolgens dat er een bijectie bestaat tussen die verzameling en het interval $[0,1]$, met als gevolg dat $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$. Dit verklaart het linkerlid van $(*)$; het rechterlid kwam voort uit de theorie der *ordinaalgetallen*.

Afgeleide verzamelingen
De ordinaalgetallen vloeiden in eerste instantie voort uit een onderzoek naar de structuur van bepaalde gesloten en begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

Het centrale begrip hierin is dat van verdichtingspunt: x is een *verdichtingspunt* van een verzameling A als elk open interval om x punten van A bevat ongelijk aan x zelf. Zo is 0 een verdichtingspunt (het enige) van de verzameling $K = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ en is elk reëel getal een verdichtingspunt van $\mathbb{Q}$.

We noteren de verzameling van alle verdichtingspunten van A als A'. Een paar fundamentele eigenschappen van deze operatie zijn: A' is gesloten en A is gesloten dan en slechts dan als $A' \subseteq A$. Men noemt A' wel de afgeleide verzameling van A en Cantor gebruikte de notatie die wij voor hogere afgeleiden bezigen ook voor verzamelingen: $A^{(0)} = A$ en $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$. Uitgaande van de convergente rij K is het niet moeilijk verzamelingen K_n te maken die voldoen aan $K_n^{(n)} = \{0\}$ en met iets meer fantasie maakt men een verzameling L met $L^{(n)} \neq \emptyset$ voor alle n en $\bigcap_n L^{(n)} = \{0\}$. Wie het kunstje door heeft ziet ook wel in hoe je M en N kunt maken met $(\bigcap_n M^{(n)})' = \{0\}$ en $(\bigcap_n N^{(n)})'' = \{0\}$ enzovoort. In het begin noteerde Cantor nog $\bigcap_n A^{(n)} = A^{(\infty)}$ maar vanaf [6] gebruikte hij ω en noteerde hij de transfiniete afgeleiden als

$$A^{(\omega)}, A^{(\omega+1)}, \ldots, A^{(\omega+\omega)} = \bigcap_n A^{(\omega+n)}, \ldots$$

Het verband van dit alles met trigonometrische reeksen ligt in een stelling die Cantor in [3] bewees: als $P \subseteq [0, 2\pi]$ zó is dat $P^{(n)} = \emptyset$ voor een $n \in \mathbb{N}$ dan is P een *eenduidigheidsverzameling*, dat wil zeggen als $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0$ voor alle x buiten P dan zijn alle coëfficiënten a_k en b_k gelijk aan 0.

Nieuwe getallen
In het artikel [6] onderwierp Cantor de indices van de afgeleide verzamelingen aan een nader onderzoek. Hij beschouwde de indices als 'nieuwe' natuurlijke getallen die door twee 'Erzeugungsprinzipen' voortgebracht worden. Het eerste principe bestaat uit het telkens toe kunnen voegen van een eenheid; als men met niets begint ontstaat zo de rij $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ van natuurlijke getallen. Aangezien er geen grootste natuurlijk getal is komt men met dit principe ook niet verder dan de natuurlijke getallen. Het tweede principe laat toe op dergelijke momenten een *nieuw* getal te introduceren dat als kleinste bovengrens voor de tot dan toe gemaakte getallen dient. Dus, ω is hiermee de kleinste bovengrens voor de rij der natuurlijke getallen. Nadat $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\ldots$, $\omega + n$, $\ldots$ met behulp van eerste principe gemaakt zijn laat het tweede principe toe $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ in te voeren als hun kleinste bovengrens. Men kan, in gedachten, deze principes onbeperkt blijven toepassen en zo een klasse van getallen opbouwen die Cantor als een natuurlijke generalisaties van de natuurlijke getallen beschouwde.

Belangrijk voor de structuur van de deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ is de vaststelling dat voor elke deelverzameling A van $\mathbb{R}$ zo'n getal α bestaat, en wel een eerste, met de eigenschap dat $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$ en dat die eerste α aftelbaar veel voorgangers heeft. Dit leidde tot de Cantor-Bendixson-stelling: elke gesloten deelverzameling G van $\mathbb{R}$ is te schrijven als de vereniging $P \cup A$, waarbij P perfect is (oftewel $P = P'$) en A aftelbaar en open in G.

Twee klassen
De natuurlijke getallen zijn de getallen in dit systeem die zelf *eindig* veel voorgangers hebben, Cantor noemde deze verzameling de *eerste getallenklasse*; zijn *tweede getallenklasse* (II) bestaat uit de getallen met aftelbaar oneindig veel voorgangers (d.w.z. net zoveel als er getallen in de eerste klasse zijn). De klasse (II) voldoet aan de dichotomie die Cantor voor $\mathbb{R}$ vermoedde: als A een oneindige deelverzameling van (II) is dan is A gelijkmachtig met $\mathbb{N}$ of met (II) zelf. In [6] sprak Cantor daarom de hoop uit dat hij binnenkort zou kunnen bewijzen dat $\mathbb{R}$ en de klasse (II) gelijkmachtig zijn. Met behulp van de daarvoor te construeren bijectie zou de dichotomie van (II) naar $\mathbb{R}$ overgebracht kunnen worden.

In het tweedelige werk [8–9] zette Cantor zijn verzamelingenleer nog eens netjes op een rij. Zoals hierboven reeds aangestipt introduceerde hij onder meer de $\aleph$-notatie voor kardinaalgetallen en noteerde hij het kardinaalgetal van $\mathbb{N}$ als $\aleph_0$. Hij gaf verder een betere onderbouwing van de bovenbeschreven uitbreiding van de natuurlijke getallen door middel van welgeordende verzamelingen en noemde de nieuwe getallen ook *ordinaalgetallen*. Het kardinaalgetal van de tweede getallenklasse (II) is het kleinste kardinaalgetal groter dan $\aleph_0$ en werd dus $\aleph_1$. Tegenwoordig duidt men de klasse (I) met ω_0 aan; de vereniging van (I) en (II) met ω_1, enzovoort.

Hierboven is al vastgesteld dat $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$, zodat de vermoede gelijkmachtigheid van $\mathbb{R}$ en de tweede getallenklase afgekort kan worden tot het bovengenoemde $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Deze gelijkheid is equivalent met de conjunctie van Cantor's dichotomie *en* het welordenbaar zijn van $\mathbb{R}$.

Welordeningen
Een *welordening* van een verzameling is een lineaire ordening met de eigenschap dat elke niet-lege deelverzameling een kleinste element heeft (ten opzichte van die ordening). De gewone ordening van $\mathbb{N}$ is een welordening; de gewone ordening van $\mathbb{R}$ is dat duidelijk niet (wat is het kleinste element in $\mathbb{R}$?).

Cantor's bewijs dat $\aleph_0$ het kleinste oneindige kardinaalgetal is gaat op de manier die

Epoch Of Unlight
Het Amerikaanse gezelschap Epoch of Unlight bracht in 2005 hun recentste album uit, getiteld *The Continuum Hypothesis*. De luisteraar wordt getrakteerd op een onwaarschijnlijke combinatie van abstracte wiskundige concepten en death metal muziek. Hieronder een gedeelte van de tekst van de titelsong.

Countless years between the
fated crossings
From the mighty threshold into time
Under the ice-blue glare
of a star-filled night
Once again I had arrived...

Another point of transition,
another's grand design
The endless quest of a darker mind
A skewed symbiotic voyage
through the all
The legatee of a night much maligned

Egested innocence,
an empyrean expulsion
The ethereal levee breaks
in multicosmic explosion

Unbound I rise
Aleph-null was the lie
Far beyond the rubicon
In league with the Unlight!

Fetid crests of purulent seas
flowing over all
The cleansing streams transecting time
Guided through the propylaeum
of the lemniscate
Supposition's proof in drowning cries!

voor de hand ligt: neem een oneindige verzameling M en construeer een injectieve afbeelding $n \mapsto x_n$ van $\mathbb{N}$ naar M door telkens x_n in $M \setminus \{x_i : i < n\}$ te kiezen.

Eenzelfde argument zou gebruikt kunnen worden om een welordening van M te maken: kies telkens voor elk ordinaalgetal α een punt x_α in $M \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}$, tot dit niet meer kan. Dat er een moment zal zijn waarop 'dit niet meer kan' volgt uit het ongerijmde: anders verkrijgt men een injectieve afbeelding van het geheel der ordinaalgetallen naar X. Cantor en Burali-Forti hadden al ingezien dat de ordinaalgetallen een problematische verzameling vormen: als welgeordende verzameling heeft deze een ordinaalgetal dat groter is dan alle ordinaalgetallen en dus ook groter dan zichzelf. Voor een 'onproblematische' verzameling M kan zo'n injectieve afbeelding dus niet bestaan, dus bestaat een α zó dat $M = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$, waarmee M gelijk welgeordend is.

Op deze argumenten is veel af te dingen. Ten eerste is niet duidelijk *hoe* de x_n en de x_α gekozen worden. Ten tweede is niet duidelijk hoe die oneindig veel keuzen tot één afbeelding samengevoegd kunnen worden. Ten derde is het onderscheid tussen problematische en niet-problematische verzamelingen nogal mistig. Het wekt dan ook weinig verwondering dat niet iedereen er van overtuigd was dat elke verzameling inderdaad te welordenen was.

In [28–29] onderving Zermelo de eerste twee bezwaren door van te voren een afbeelding te nemen die uit elke niet-lege deelverzameling van M een vast element kiest.

> Jeder Teilmenge M' denke man sich ein beliebiges Element m'_1 zugeordnet, das in M' selbst vorkommt und das 'ausgezeichnete' Element von M' genannt werden möge. So entsteht eine 'Belegung' γ der Menge M mit Elementen der Menge M von besonderer Art. Die Anzahl dieser Belegungen γ ist gleich dem Produkte $\prod \mathfrak{m}'$ erstreckt über alle Teilmengen M' und ist daher jedenfalls von 0 verschieden. Im folgenden wird nun eine beliebige Belegung γ zu grunde gelegt und aus ihr eine bestimmte Wohlordnung der Elemente von M abgeleitet.

Hier kwam het Keuzeaxioma de Wiskunde binnen met een interessante rechtvaardiging: het product van (kardinaal)getallen die ongelijk aan nul zijn is zelf ook ongelijk aan 0. In zijn latere axiomatisering van de vezamelingenleer, [30], draaide Zermelo de zaak om: het Keuzeaxioma werd ingevoerd om de uitspraak over het product af te kunnen leiden.

Dankzij die afbeelding liggen de keuzen van de x_n en x_α ondubbelzinnig vast en kunnen deze met behulp van een recursieprincipe tot één afbeelding samengevoegd worden. Zermelo's bewijs bevatte nog wat verfijningen waardoor het in zijn geheel binnen de verzameling $P(M)$ van alle deelverzamelingen van M, en dus zonder gebruik van ordinaalgetallen, uitgevoerd kon worden.

Het Keuzeaxioma werd vrij snel geaccepteerd en werd na verloop van tijd niet als 'extra' aanname vermeld, zoals bijvoorbeeld in Banach's bewijs van de Hahn-Banachstelling, [2]:

> On prouve ce théorème par induction transfinie en appliquant succesivement le théorème 1 aux éléments de l'ensemble $E - G$ (supposé bien ordonné).

Hierin verwijst 'théorème 1' naar de mogelijkheid een functionaal uit te breiden door één extra vector aan een deelruimte toe te voegen.

Voor wie denkt dat het Keuzeaxioma pas belangrijk wordt voor 'grote' verzamelingen: analyseer het standaardbewijs dat rijtjescontinuïteit equivalent is aan ε-δ-continuïteit maar eens; ook daar moeten individuele ongespecificeerde keuzen tot één rij samengevoegd worden en zonder het Keuzeaxioma lukt dat niet.

Equivalenten/gevolgen

De methoden en taal van Cantor's verzamelingenleer werden al snel in diverse gebieden toegepast. Men denke bijvoorbeeld aan de integratietheorie van Lebesgue en de Functioaalanalyse; zonder het begrip verzameling is het moeilijk voor te stellen hoe deze van de grond gekomen zouden zijn.

Zoals hierboven aangestipt werd het Keuzeaxioma snel geaccepteerd maar de Continuüm Hypothese werd het onderwerp van veel onderzoek en in 1934 verscheen het boek **Hypothèse du Continu** van Sierpiński [25] waarin een hele reeks equivalenten en gevolgen van CH verzameld werden.

Het allereerste equivalent, P_1 genoemd, is het volgende: het vlak, $\mathbb{R}^2$, is te schrijven als de vereniging van twee (disjuncte) deelverzamelingen A en B zó dat A elke *verticale* lijn in slechts aftelbaar veel punten snijdt terwijl B met elke *horizontale* lijn slechts aftelbaar veel punten gemeen heeft. Het punt is dat het kwadraat van de getallenklasse (II) zo'n decompositie toelaat: $A = \{\langle \alpha, \beta \rangle : \beta \leqslant \alpha\}$ en $B = \{\langle \alpha, \beta \rangle : \alpha < \beta\}$; via een bijectie naar $\mathbb{R}$ is hier een decompositie van $\mathbb{R}^2$ van te maken. Andersom bewijst men relatief eenvoudig dat het kwadraat van een welgeordende verzameling van kardinaliteit groter dan $\aleph_1$ niet als zo'n vereniging te schrijven is.

Overigens zijn A en B automatisch niet-meetbare verzamelingen van het vlak. De integralen van hun karakteristieke functies bestaat niet: zo geldt $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 0$ terwijl $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \infty$.

Een interessant gevolg van CH is het volgende, genummerd C_{25}: er bestaat een bijectie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die verzamelingen van de eerste categorie overvoert in verzamelingen van Lebesgue-maat nul. Preciezer, voor elke deelverzameling A van $\mathbb{R}$ geldt: A is van de eerste categorie dan en slechts dan als $f[A]$ maat nul heeft. Er was al eerder opgemerkt dat beide noties van 'kleine deelverzameling' structurele overeenkomsten vertoonden; onder de aanname van CH worden die overeenkomsten dus versterkt tot isomorfie.

Een recenter equivalent van CH werd in [15] door Erdös gegeven: er bestaat een overaftelbare familie F van gehele functies met de eigenschap dat voor elk complex getal z de verzameling $\{f(z) : f \in F\}$ van functiewaarden aftelbaar is. Het bewijs is in **Het Boek** [1] opgenomen.

Nog recenter, uit 1984, is de volgende stelling van Morayne, [24]: de Continuüm Hypothese is equivalent met het bestaan van een surjectieve afbeelding $(f_1, f_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ met de eigenschap dat voor elke t (ten minste) één van de afgeleiden $f_1'(t)$ of $f_2'(t)$ bestaat. In feite liet Morayne zien dat het bestaan van de functie gelijkwaardig is aan het bestaan van een decompositie $\mathbb{R}^2 = A \cup B$ als hierboven. Terzijde: een afbeelding als die van Morayne kan niet continu zijn.

Status

Hilbert zette **Cantors Problem von der Mächtigkeit des Continuums** bovenaan zijn beroemde lijst van problemen — met daarbij ook de vraag een welordening van $\mathbb{R}$ aan te geven.

Op het Internationaal Mathematisch Congres van 1904 in Heidelberg kondigde König aan, zie [22], dat $\mathbb{R}$ niet welordenbaar is en dus dat de gelijkheid $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ook niet waar zou zijn. Het bewijs berustte op een resultaat van Bernstein waarvan enige dagen later werd vastgesteld dat het niet klopte. Het bewijs van König gaf, zoals later zou blijken, de enige beperking die aan een α met $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ gesteld kan worden. Zo'n α kan geen aftelbare cofinaliteit hebben, dat wil zeggen: als er een strikt stijgende rij $\langle \alpha_n : n < \omega_0 \rangle$ ordinaalgetallen is met $\alpha = \sup_n \alpha_n$ dan is $2^{\aleph_0}$ zeker niet gelijk aan $\aleph_\alpha$. Dit bewijst men als volgt. Ten eerste: als $2^{\aleph_0} = \aleph_\beta$ dan volgt uit Cantor's rekenregels dat

$$\aleph_\beta = 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_\beta^{\aleph_0}$$

Ten tweede: voor een α als boven geldt $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_0}$. Neem een verzameling A met $\overline{\overline{A}} = \aleph_\alpha$ en schrijf $A = \bigcup_n A_n$, waarbij $\overline{\overline{A_n}} = \aleph_{\alpha_n}$ en $A_n \subset A_{n+1}$ voor alle n. Laat $f : A \to A^{\mathbb{N}}$ een afbeelding zijn en kies voor elke n een punt a_n in A met de eigenschap dat $a_n \neq f(a)_n$ voor alle $a \in A_n$; dit kan omdat $\overline{\overline{A_n}} < \overline{\overline{A}}$. Het punt $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ zit niet in $f[A]$. Deze keuze kan expliciet gemaakt worden: omdat $\overline{\overline{A}} = \aleph_\alpha$ is A welordenbaar; a_n kan dus telkens als het *eerste* element met de gewenste eigenschap genomen worden.

Axioma's

De vraag bleef natuurlijk CH te bewijzen of te weerleggen. En de vraag die daarbij hoort: op basis van wat? Net als de meetkunde eerder had ook de verzamelingenleer axioma's nodig. Zermelo had in [30] al een lijst opgesteld en in [16] had Fraenkel de noodzaak van nog een extra axioma aangetoond, het Vervangingsaxioma. De axioma's van Zermelo en Fraenkel bevatten niets schokkends. Ze weerspiegelen de manier waarop we met verzamelingen omgaan.

Om te beginnen: er is een verzameling zonder elementen, genoteerd $\varnothing$. De axioma's van paarvorming, vereniging en machtsverzameling spreken voor zich. Het oneindigheidsaxioma postuleert het bestaan van een verzameling x met de volgende twee eigenschappen: $\varnothing \in x$ en voor elke $y \in x$ is ook $\{y\}$ een element van x — wat men verder van zo'n verzameling moge denken, hij beantwoordt wel aan het beeld van een oneindige verzameling. Het afscheidingsaxioma laat ons verzamelingen van de vorm $\{y \in x : E(y)\}$ opschrijven, E is hierbij een eigenschap die in de taal van de verzamelingenleer te beschrijven is. Fraenkel's vervangingsaxioma doet iets dergelijks en zegt, informeel, dat het beeld van een verzameling onder een functie weer een verzameling is. Ten slotte zijn er nog het extensionaliteitsaxioma (verzamelingen zijn gelijk dan en slechts dan als ze dezelfde elementen hebben) en het regulariteitsaxioma (elk element heeft $\in$-minimale elementen). Het laatste legt een technische maar niet essentiële beperking op aan het soort verzamelingen dat we beschouwen.

Zermelo nam het Keuzeaxioma ook in zijn lijst op maar tegenwoordig geven we met ZF het stelsel van de hierboven beschreven axioma's aan en met ZFC het stelsel plus het Keuzeaxioma. De vraag naar de bewijsbaarheid van CH is hiermee gepreciseerd tot: is CH af te leiden uit de axioma's van ZFC?

Vloeistoffen

Wie 'Continuümhypothese' of 'Continuum Hypothesis' aan Google voert krijgt veel hits die aan Cantor's probleem refereren. Het Wikipedia-artikel over CH begint echter met: "This article is about a hypothesis in set theory. For the assumption in fluid mechanics, see fluid mechanics." Veel mathematische fysici denken bij de woorden 'Continuüm Hypothese' aan de aanname dat een waterstroom een 'continuüm' is, een aaneengesloten geheel, en niet wat het in werkelijkheid is: een schier oneindige hoeveelheid over elkaar buitelende watermoleculen. Die aanname vereenvoudigt de wiskundige behandeling van zo'n stroming aanzienlijk.

Niet te weerleggen

Het eerste resultaat over de bewijsbaarheid van CH kwam van Gödel in [17]. Hij toonde aan dat de samenvoeging van ZFC en CH niet tot een tegenspraak kan leiden. Hij deed dat door een universum van verzamelingen te bouwen waarin alle axioma's van ZF plus het Keuzeaxioma plus CH geldig zijn. Dat universum is een deel van het gehele universum, V, van alle verzamelingen. Het bestaat uit alle *construeerbare* verzamelingen, waarbij een verzameling 'construeerbaar' wordt genoemd als, het woord zegt het al, een specifieke constructie van die verzameling bestaat met behulp van een beperkt aantal operaties en uitgaande van alleen de lege verzameling. Het is een niet-geringe taak te laten zien dat het universum, L, van alle construeerbare verzamelingen rijk genoeg is om aan alle axioma's van ZF te voldoen. Daarnaast komt L met een definieerbare globale welordening, hetgeen zelfs een Keuzefunctie voor heel L zelf oplevert. Ten slotte: met behulp van middelen uit de logica, waaronder de Löwenheim-Skolemstelling, wist Gödel aan te tonen dat L exact $\aleph_1$ reële getallen bevat, waarmee ook CH in L was aangetoond.

Hoe bewijst dit dat CH niet te weerleggen is? Op dezelfde manier waarop men bewijst dat het Parallellenpostulaat van Euclides niet te bewijzen is. De andere axioma's van Euclides gelden in het hyperbolische vlak. al hun gevolgen dus ook. Maar het Paralellenpostulaat geldt niet in het hyperbolische vlak en is derhalve niet af te leiden uit de andere axioma's. Alle axioma's van ZFC gelden in L, en CH ook, dus de gevolgen van ZFC + CH ook en daar is $\varnothing = \{\varnothing\}$ niet bij want die geldt niet in L; uit ZFC+CH is dus geen tegenspraak af te leiden.

Niet te bewijzen
Na Gödel's bewijs bleven er nog twee mogelijkheden over: CH is een gevolg van ZFC of uit ZFC + $\neg$CH is ook geen tegenspraak af te leiden.

In 1963 bewees Cohen dat het laatste het geval is: CH is niet uit de axioma's van ZFC af te leiden. Net als Gödel deed hij dat door een universum te bouwen waarin deze axioma's wel gelden maar CH niet. Dat moest op een andere manier dan die waarop Gödel het universum L had gemaakt. Eén van de eigenschappen van L is namelijk dat het het kleinst mogelijke universum van verzamelingen is. Dit volgt uit het, niet-triviale, feit dat 'construeerbaar' een absoluut concept is: ongeacht in welk universum men de constructie van L uitvoert het resultaat is altijd hetzelfde. In het bijzonder binnen L zelf, zodat L-binnen-L niets anders is dan L zelf. Aangezien L het enige 'concrete' universum was dat voorhanden was moest de oplossing liggen in het *uitbreiden* van L. Wat Cohen deed was laten zien hoe elk universum, niet alleen L, uitgebreid kan worden tot een nieuw universum waarin CH niet geldt. De methode lijkt erg op die van Gödel: in plaats van met niets begint men met het uit te breiden universum, V, plus een verzameling $G = \{r_\alpha : \alpha < \omega_2\}$ van nieuwe reële getallen. De 'construeerbare afsluiting', $V[G]$, die we hieruit maken is de uitbreiding van V die we zoeken.

Dit is makkelijker gezegd dan gedaan. De problemen die opgelost moeten worden zijn
1. Waar komen die nieuwe getallen vandaan?
2. Hoe weten we dat de axioma's van ZFC in $V[G]$ gelden?
3. Geldt $\neg$CH wel in $V[G]$?

De eerste twee vragen liggen voor de hand; de derde wellicht iets minder, maar bij het maken van $V[G]$ zou er een bijectie tussen ω_1 en ω_2 kunnen ontstaan, waar dan weer een bijectie tussen ω_1 en $\mathbb{R}$ uit gemaakt kan worden. Het antwoord van Cohen op de eerste vraag gaf meteen een antwoord op de andere twee: de techniek die nu *forcing* wordt genoemd is een manier om verzamelingen aan een universum toe te voegen en wel zó dat men veel eigenschappen van de uitbreiding binnen het kleinere universum kan verifiëren. Hoe dit werkt komt in een vervolg op dit artikel aan bod, maar wat Cohen deed was $\aleph_2$ reële getallen aan L toevoegen op zo'n manier dat hij kon laten zien dat in het nieuwe universum inderdaad alle axioma's van ZFC gelden en zó dat niet per ongeluk een bijectie van $\aleph_1$ naar $\aleph_2$ wordt gemaakt.

Toen Cohen's werk bekend werd was het hek van de dam: de theorie van forcing werd gestroomlijnd en op onnoemelijk veel problemen uit de verzamelingenleer toegepast. Ook werd duidelijk dat König's stelling scherp was: in een artikel met de veelzeggende titel *$2^{\aleph_0}$ can be anything it ought to be* liet Solovay zien dat voor elke α die niet een aftelbaar oneindige cofinaliteit heeft een universum bestaat waarin $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ geldt.

Cantor's oorspronkelijke formulering
In de oorspronkelijke formulering van CH speelden welordeningen geen rol. Er is een universum waarin deze versie waar is, zonder dat $\mathbb{R}$ een welordening toelaat. Dit hangt samen met het oneindige spel waarin twee spelers, I en II, om beurten een 0 of een 1 kiezen. De resulterende rij $\langle x_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ van nullen en enen bepaalt een reëel getal: $x = \sum_{i=1}^\infty x_i \cdot 2^{-i}$. Om dit spel spannend te maken wordt vooraf een deelverzameling A van $[0,1]$ gekozen en afgesproken dat I wint als $x \in A$ en dat II wint als $x \notin A$.

Een verzameling heet gedetermineerd als I of II een winnende strategie heeft. Met behulp van een welordening van $\mathbb{R}$ kan men niet-gedetermineerde verzamelingen maken. Er zijn echter universa waarin *elke* verzameling gedetermineerd is en met behulp hiervan bewijst men dat elke overaftelbare deelverzameling van $[0,1]$ een kopie van de Cantorverzameling bevat en dus gelijkmachtig is met $\mathbb{R}$.

Is CH waar?

De vraag of CH waar is is mijns inziens vooralsnog meer een filosofische dan een wiskundige vraag. De reële rechte is het unieke geordende lichaam met de eigenschap dat elke niet-lege, naar boven begrensde verzameling een kleinste bovengrens heeft. Deze karakterisering is uit de axioma's van ZF af te leiden en ZF stelt ons ook in staat zo'n lichaam te construeren. Dit impliceert dat de Analyse die we uit de leerboeken kennen geheel binnen ZFC geformaliseerd en ontwikkeld kan worden en dus dat de Analyse zeker niet meer over CH te zeggen heeft dan ZFC; niets dus.

Er zijn dus twee manieren om te besluiten of CH waar is. De eerste is per decreet: we kiezen voor CH of $\neg$CH en voegen die aan ZFC toe; dat maakt de andere mogelijkheid per definitie onwaar. Dit verdient niet de schoonheidsprijs en leidt ons naar de tweede mogelijkheid. Dat is eigenlijk de eerste maar met redenen omkleed: we ontdekken/formuleren een uitspraak over $\mathbb{R}$ die wel waar moet zijn — op filosofische/esthetische/praktische gronden — en die CH (of $\neg$CH) impliceert en ook nog consistent is met ZFC.

De tijd zal het leren.

Wat kunnen we ermee?

Tot slot iets over de rol van CH in de wiskunde van vandaag.

Die rol is er echt een van een *hypothese*: een bewering die onder aanname van CH bewezen is kan binnen ZFC niet meer ontkracht worden en is dus een potentiële stelling; het kan dan natuurlijk zo zijn dat, net als CH zelf, de bewering niet uitgaande van ZFC te bewijzen is.

Als voorbeeld bekijken we een probleem uit de theorie van de Banachalgebra's, in het bijzonder die van de vorm $C(K)$, de algebra van continue complexwaardige functies op een compacte ruimte K. Kaplansky wierp het volgende probleem op: zij $\|\cdot\|$ een algebranorm op $C(K)$, dat wil zeggen een norm die aan $\|f \cdot g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$ voldoet, is deze dan equivalent met de maximumnorm $\|\cdot\|_m$?

Kaplansky zelf bewees dat $\|\cdot\| \geqslant \|\cdot\|_m$ en met behulp van de open-afbeeldingstelling volgt hieruit dat het antwoord positief is voor volledige normen. In 1976 bewezen Dales en Esterlé onafhankelijk van elkaar met behulp van CH dat voor elke oneindige compacte K een niet-equivalente algebranorm op $C(K)$ bestaat. Enige jaren later contrueerde Woodin een universum waarin elke algebranorm op elke $C(K)$ equivalent is met de maximumnorm. Het boek [13] van Dales en Woodin biedt een goed overzicht van het probleem en de oplossingen.

Bewijzen onder aanname van CH geven meer zekerheid dan bewijzen onder aanname van, bijvoorbeeld, de Riemannhypothese, omdat deze laatste nog niet is bewezen noch weerlegd. Als de Riemannhypothese onjuist blijkt, is er veel werk aan de winkel om van alle gevolgen uit te zoeken of ze waar zijn of niet. Verder is het zo dat de Riemannhypothese echt eenvoudiger is dan CH: als iemand bewijst dat de Riemannhypothese uitgaande van ZFC niet te bewijzen/weerleggen is dan is deze meteen weerlegd/bewezen. De reden is dat de Riemannhypothese neerkomt op de bewering dat een open verzameling, $O = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \neq \frac{1}{2}\}$, en een gesloten verzameling, $F = \{z : \zeta(z) = 0\}$ een lege doorsnede hebben. Het Absoluutheidslemma van Schoenfield impliceert dat uit $O \cap F \neq \emptyset$ volgt dat $O \cap F \cap L \neq \emptyset$; dat wil zeggen: als er een niet-triviaal nulpunt is dan is er ook een niet-triviaal nulpunt in Gödel's universum L. We hebben gezien dat L in elk universum hetzelfde is. Hieruit volgt dat zodra er ook maar één universum is waar de Riemannhypothese geldt, de Riemannhypothese in elk universum geldt en daarmee, op grond van Gödel's volledigheidsstelling, uit ZFC te bewijzen moet zijn.

Voelt u zich dus vrij bij uw aanvallen op de Riemannhypothese de Continuümhypothese aan te nemen.

Verder lezen

Dauben's biografie van Cantor, [14], is de moeite van het lezen waard; men krijgt een goede indruk van de ontstaansgeschiedenis van Cantor's verzamelingenleer.

In 1947 schreef Gödel een artikel, [18], met de titel *What is Cantor's Continuum problem?*, waarin hij uitlegt waarom hij denkt dat CH eigenlijk niet waar kan zijn.

Vrij recent, in [26–27], beschreef Woodin de moderne stand van zaken omtrent CH.

Het boek van Kunen, [23], is een goede plek om meer te leren over onafhankelijkheidsbewijzen in de verzamelingenleer.

Referenties

1 Martin Aigner en Günter M. Ziegler, *Proofs from The Book (Third Edition)*, Berlin: Springer-Verlag (2004)

2 S. Banach, *Sur les fonctionelles linéaires*, Studia Mathematica, **1** (1929), 211–216.

3 Georg Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Mathematische Annalen, **5** (1872), 123–132.

4 Georg Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Crelles Journal für Mathematik, **77** (1874), 258–262.

5 Georg Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Crelles Journal für Mathematik, **84** (1878), 242–258.

6 Georg Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr. 5*, Mathematische Annalen, **21** (1883), 545–586.

7 Georg Cantor, *De la puissance des ensembles parfaits de points*, Acta Mathematica, **4** (1884), 381–392.

8 Georg Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Artikel)*, Mathematische Annalen, **46** (1895), 491–512.

9 Georg Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Zweiter Artikel)*, Mathematische Annalen, **49** (1897), 207–246.

10 Paul Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **50** (1963), 1143–1148.

11 Paul Cohen, *The independence of the continuum hypothesis. II*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **51** (1964), 105–110.

12 Paul J. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, New York-Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc. (1966).

13 H. G. Dales en W. H. Woodin, *An introduction to independence for analysts*, London Mathematical Society Lecture Note Series 115, Cambridge: Cambridge University Press (1987).

14 Joseph Warren Dauben, *Georg Cantor. His mathematics and philosophy of the infinite*, Princeton, NJ: Princeton University Press (1990)

15 P. Erdős, *An interpolation problem associated with the continuum hypothesis*, The Michigan Mathematical Journal, **11** (1964), 9–10

16 Abraham Fraenkel, *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, Mathematische Annalen, **86** (1922), 230–237.

17 Kurt Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, Annals of Mathematics Studies, no. 3, Princeton, NJ: Princeton University Press (1940).

18 Kurt Gödel, *What is Cantor's continuum problem?*, The American Mathematical Monthly, **54** (1947), 515–525.

19 Felix Hausdorff, *Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen*, Mathematische Annalen, **77** (1916), 430–437.

20 Wilfrid Hodges, *A Shorter Model Theory*, Cambridge: Cambridge University Press (1997).

21 Teun Koetsier, *Die Vermessung des Uneindlichen*, Nieuw Archief voor Wiskunde, **8** (2007), 31–33.

22 Julius Kőnig, *Zum Kontinuumproblem*, Mathematische Annalen, **60** (1905), 177–180.

23 Kenneth Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 102, Amsterdam: North-Holland Publishing Co. (1980).

24 Micha l Morayne, *On differentiability of Peano type functions*, Colloquium Mathematicum, **48** (1984), 261–264.

25 Wac law Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne 4, Warszawa-Lwow: Subwencji Funduszu Kultur. Narodowej (1934).

26 W. Hugh Woodin, *The continuum hypothesis. I*, Notices of the American Mathematical Society, **48** (2001), 567–576.

27 W. Hugh Woodin, *The continuum hypothesis. II*, Notices of the American Mathematical Society, **48** (2001), 681–690.

28 Ernst Zermelo, *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)*, Mathematische Annalen, **59** (1904), 514–516.

29 Ernst Zermelo, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, Mathematische Annalen, **65** (1908), 107–128.

30 Ernst Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, Mathematische Annalen, **65** (1908), 261–281.