

Remco Duits

Faculteit Biomedische Technologie
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
r.duits@tue.nl

Herplaatsing

Door een technische fout bij de drukker is dit artikel niet correct in het maartnummer afgedrukt.

Onderzoek: partituren in de beeldanalyse I

Schaalpartituren

In beeldanalyse spelen schaal en lokale oriëntatie een prominente rol. Waar bevat het beeld belangrijke informatie en op welke schaling gebeurt dit? Een gestructureerde samenvatting van deze data noemen we een partituur van de afbeelding. Deze partituur bevat de multischaal- en multiorientatieinformatie op een zo uitgesproken mogelijke manier. Remco Duits, onderzoeker op het gebied van de beeldanalyse en -interpretatie, beschrijft in dit overzichtsartikel de vele wiskundige mogelijkheden om zo'n structuur op een afbeelding aan te brengen. In dit eerste deel beperkt hij zich tot schaalpartituren van een beeld en bijbehorende evolutievergelijkingen. Deze schaalpartituren zijn natuurlijk niet erg homogeen; ze bevatten in het bijzonder singuliere punten waarvan topologische eigenschappen veranderen naarmate de schaal van observatie toeneemt. Vrijwel het gehele originele beeld kan weer worden verkregen uit deze singulariteiten. Kennis van deze singulariteiten is belangrijk voor beeld-manipulatie, compressie en objectherkenning.

Vergeleken met de mens leven computers nog in het land der blinden. Ondanks geavanceerde digitale videocamera's, dikke grafische kaarten en krachtige processoren loopt de computer bij de analyse van beelden nog mijlenver achter op de mens. Het vakgebied van de beeldanalyse probeert daar moedig verandering in te brengen. Dat hier nog een lange weg af te leggen is, komt mede door het feit dat de beeldanalyse, een vakgebied dat sterk gedreven is door creatieve ingenieurs, gebukt gaat onder het algemene gedachtegoed 'why bother if it works?', waar dikwijls 'we bother since it does not work!' meer op zijn plaats zou zijn geweest. Hier ligt een uitdaging voor de toegepaste wiskunde om generieke theorie en methoden te bedenken. Anderzijds zijn de problemen uit de beeldanalyse vaak van een stevig differentiaalmeetkundig kaliber, waar hier niet al te diep op ingegaan kan worden, zodat de beeldanalyse op zijn beurt een voedingsbron voor de wiskunde is. Binnen beide vakgebieden wordt dit nog onvoldoende beseft.

Gegeven is een digitaal grijswaardebeeld $x \mapsto f(x)$, waarbij $f(x) \in \mathbf{R}$ de gemiddelde grijswaarde voorstelt op positie $x \in \mathbf{R}^d$

waarbij we het gemiddelde hebben genomen over het pixel/voxel dat $x \in \mathbf{R}^d$ bevat. De ruimte van beelden zullen we modelleren met $L_2(\mathbf{R}^d)$, de ruimte van kwadratisch integreerbare complexwaardige functies (of liever functieklassen) gedefinieerd op \mathbf{R}^d , waarbij meestal $d = 2$ of $d = 3$. Geïnspireerd door ons eigen visueel systeem beschouwen we schaal- en oriëntatiepartituren van het beeld f om het beeld beter te kunnen analyseren. Dit is geheel analoog aan de analyse en representatie van een muziekstuk aan de hand van een muziekpartituur.

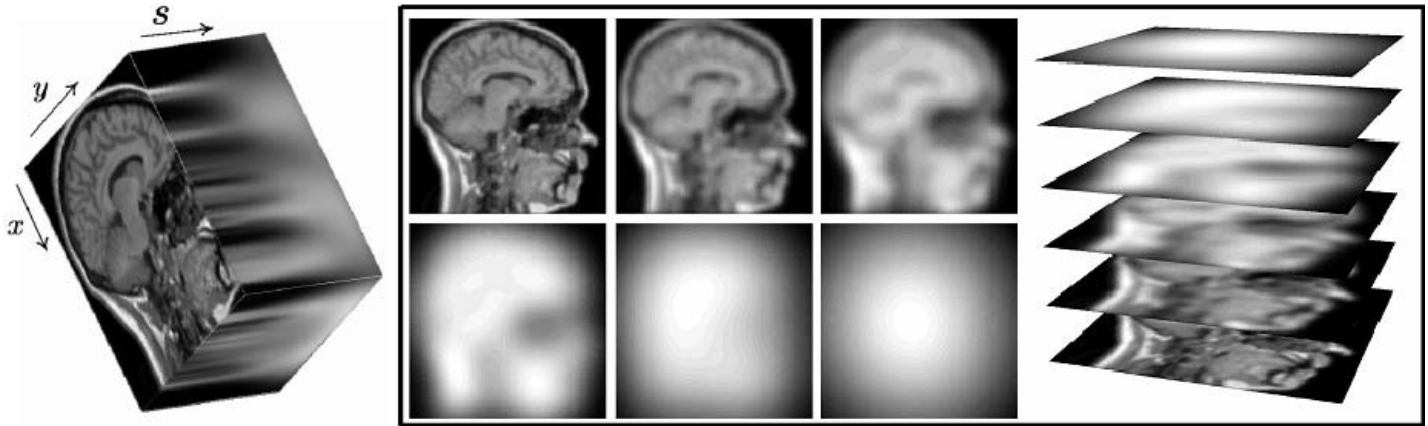
Iedereen die wel eens een muziekinstrument in zijn handen heeft gehad weet dat een partituur meer structurele informatie over tijd en lokale frequentie verstrekt dan een simpele bemonsteraar. In zo'n muziekpartituur staat aangegeven op welk moment een toon moet worden gespeeld met aangegeven lokale frequentie (hoogte van de toon), zie figuur 1.

Merk op dat hier een onzekerheid bestaat in frequentie en tijd. Om een perfecte toon te spelen met vaste globale frequentie moet hij oneindig lang duren, zodat je niet meer weet op welk tijdstip gespeeld moet worden. Terwijl een noot van oneindig korte tijdsduur alle globale frequenties verlangt, zodat de toonhoogte van deze noot niet vastgelegd kan worden. Het is dus relevant om over lokale frequenties te praten.

Dit kan als volgt worden gemodelleerd: Zij $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ het muzieksignaal en zij $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ het window waarover je lokale frequenties meet, bijvoorbeeld een Gaussische verdeling $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} e^{-\frac{x^2}{4s}}$, $s = \frac{1}{2}\sigma^2$ en veronderstel dat het signaal kwadratisch integreerbaar is, i.e. $f \in L_2(\mathbf{R})$. De partituur $W_\psi f$ van signaal f wordt nu gegeven door de zogenoemde Gaborgetransformeerde



Figuur 1 Een muziekpartituur



Figuur 2 Links: illustratie van een schaalpartituur $(x, y, s) \mapsto u_f(x, y, s)$ van een beeld $(x, y) \mapsto f(x, y)$; rechts: een aantal plakjes $u_f(\cdot, \cdot, s)$ (voor vaste schalen van $s = 0$ tot een grote schaal waarop het laatste extremum overblijft) in een schaalpartituur

$W_\psi f$ van f :

$$(W_\psi f)(t, \omega, p) = e^{-i(\frac{p}{4} - \frac{t\omega}{2})} \int_{\mathbf{R}} \overline{\psi(\xi - t)} f(\xi) e^{-i\xi\omega} d\xi, \quad (1)$$

hetgeen een gelokaliseerde Fouriertransformatie voorstelt op tijd $t \in \mathbf{R}$, lokale frequentie $\omega \in \mathbf{R}$ en fase $p \in \mathbf{R}$. In deze formule gaan we structuur aanbrengen. Beschouw daartoe de groep van modulaties en translaties, beter bekend als de Heisenberggroep H_3 met product

$$(t + i\omega, p)(t' + i\omega', p') = ((t + t') + i(\omega + \omega'), p + p' + 2(\omega t' - \omega' t))'$$

waarbij $t + i\omega, t' + i\omega' \in \mathbf{C}, p, p' \in \mathbf{R}$, die dus een semi-direct product van de groepen \mathbf{C} en \mathbf{R} vormt. Dit noteren we als volgt: $H_3 = \mathbf{C} \times \mathbf{R}$. Hierbij staat het extra streepje aan de linkerkant om aan te geven dat \mathbf{C} dienst doet in het product op de ondergroep $(0, 0, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$. De groep H_3 heeft de volgende representatie $g = (t, \omega, p) \mapsto U_g$ gegeven door

$$(U_{(t, \omega, p)} \psi)(\xi) = e^{i(\xi\omega + \frac{p}{4} - \frac{1}{2}t\omega)} \psi(\xi - t), \quad (2)$$

met $\psi \in L_2(\mathbf{R}), t, \omega \in \mathbf{R}$. De partituur (1) kan nu worden geschreven als

$$(W_\psi f)(g) = (U_g \psi, f)_{L_2(\mathbf{R})}, \quad g = (t, \omega, p),$$

waarbij $(\cdot, \cdot)_{L_2(\mathbf{R})}$ het standaard inproduct op $L_2(\mathbf{R})$ is gegeven door $(f, g)_{L_2(\mathbf{R})} = \int_{\mathbf{R}} \overline{f(t)} g(t) dt$. We zien dus dat een muziekpartituur neerkomt op een functie op de Heisenberggroep, gemaakt middels een unitaire, irreducibele representatie U van de Heisenberggroep. Men kan nagaan dat W_ψ de ruimte van signalen $L_2(\mathbf{R})$ normbehoudend afbeeldt in de ruimte van Gaborgetransformeerden, hetgeen een gesloten (reproducerende kern-) deelruimte van $L_2(H_3/P)$ is, waarbij de Heisenberg groep H_3 uitgedeeld is naar zijn fase-subgroep $P = \{(0, 0, p) \mid p \in \mathbf{R}\}$ en waarbij we op het quotiënt H_3/P de invariante maat $d\omega dt$ hanteren. De praktisch relevante consequentie van dit resultaat is dat een kleine verstoring van het signaal f correspondeert met een kleine verstoring in de partituur $W_\psi f$, zodat het signaal

op stabiele wijze worden gereconstrueerd uit de partituur middels $f \equiv W_\psi^*(W_\psi f)$, waarbij W_ψ^* de geadjungeerde van W_ψ is. In meer expliciete vorm ziet de reconstructie van het signaal f uit de partituur $W_\psi f$ er uit als:

$$f = \frac{1}{C_\psi} W_\psi^* W_\psi f = \frac{1}{C_\psi} \int_{H_3/P} W_\psi[f](g) U_g \psi d\mu_{H_3/P}(g).$$

Dit is

$$f(\xi) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} (W_\psi f)(t, \omega, p) \exp(i[\xi\omega + (p/4) - (1/2)t\omega]) \psi(\xi - t) dt d\omega, \quad (3)$$

met constante

$$C_\psi = (2\pi) \|\psi\|_{L_2(\mathbf{R})}^4 = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |(U_{(t, \omega, p)} \psi, \psi)_{L_2(\mathbf{R})}|^2 dt d\omega < \infty.$$

Merk hierbij op dat zowel C_ψ als de reconstructie niet afhangen van de fase p .

De eerder genoemde onzekerheid tussen tijd en frequentie volgt uit de volgende afchatting

$$\begin{aligned} \text{Var}(x)\text{Var}(-i\partial_x) &:= \int_{\mathbf{R}} t^2 |\psi(t)|^2 dt \int_{\mathbf{R}} \omega^2 |F\psi(\omega)|^2 d\omega \\ &\geq \frac{1}{4} \left(\int_{\mathbf{R}} |\psi(t)|^2 dt \right)^2 =: \left(\frac{1}{2i} E([x, -i\partial_x]) \right)^2 \end{aligned}$$

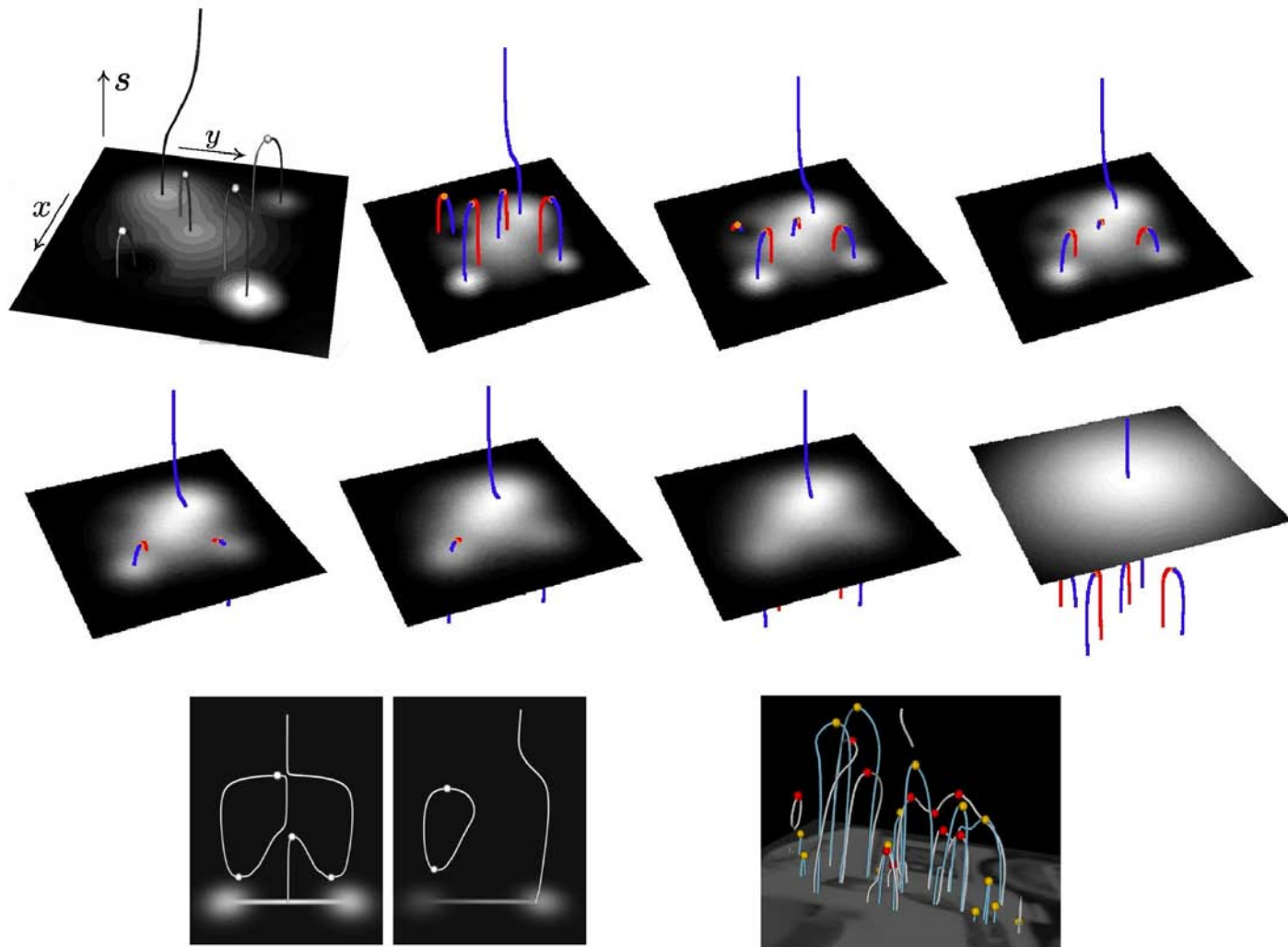
waarin $F\psi$ de Fouriergetransformeerde van ψ voorstelt gegeven door

$$F\psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \psi(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Merk hierbij op dat de commutator van de translatie- en modulatiegenerator

$$[x, -i\partial_x] = x \circ (-i\partial_x) - (-i\partial_x) \circ x$$

gelijk is aan i , zodat we zien dat de onzekerheid tussen tijd en



Figuur 3 Bovenste twee rijen: illustratie van kritieke-padenannihilatie in een Gaussische schaalpartituur van een eenvoudig plaatje bestaande uit enkele extrema. Telkens wordt een laag $u_f(\cdot, s)$ afgebeeld voor toenemende $s = \frac{1}{2}\sigma^2 > 0$, waarin de op dat moment aanwezige extrema en zadels te zien zijn. Extremumpaden zijn in blauw afgebeeld, zadelpaden in rood en toppunten- en annihilatiepunten in oranje. Onderste rij links: Twee voorbeelden van annihilaties. Hierbij is het originele plaatje f (waarin een halter staat afgebeeld) wederom in perspectief afgebeeld. Rechts-onder: de kritieke paden van een Gaussische schaalpartituur (in grijs met rode toppunten) van een foto van een auto in één figuur afgebeeld met de kritieke paden in een Poissonschaalpartituur (in blauw met gele toppunten). Hierbij zijn de schalen fysisch correct vergeleken, dat wil zeggen σ in een Gaussische schaalpartituur correspondeert met s in een Poissonschaalpartituur. De figuur rechtsonder laat zien dat de kritieke paden in een Poissonschaalpartituur $\alpha = \frac{1}{2}$ soms ernstig kunnen verschillen van de kritieke paden in een Gaussische schaalpartituur $\alpha = 1$.

frequentie een direct gevolg is van het niet-commutatieve gedrag van de groep H_3 .

Nu keren we weer terug naar de beeldanalyse. Hierbij is een grijswaardebeeld $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ gegeven. Hiervan kan ook een frequentiepartituur worden bepaald middels

$$(W_\psi f)(\mathbf{x}, \omega, p) = \exp(-i(\frac{p}{4} - \frac{(\mathbf{x}, \omega)}{2})) \int_{\mathbf{R}} \overline{\psi(\xi - \mathbf{x})} f(\xi) \exp(-i(\xi, \omega)) d\xi,$$

waarbij $\mathbf{x}, \omega \in \mathbf{R}^2, p \in \mathbf{R}$. Zulke partituren zijn handig voor textuuranalyse in een plaatje. Wij zullen ons hier echter richten op twee andere essentiële groepen; hier zullen we de groep van translaties en schalingen $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+$ beschouwen en in deel II behandelen we de groep van translaties en rotaties $SE(2) = \mathbf{R}^2 \times SO(2)$. Hierbij gebruiken we wederom transformaties van het type

$$((x, y) \mapsto f(x, y)) \mapsto (g \mapsto (U_g \psi, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)}), \tag{4}$$

waarbij we de Heisenberggroeprepresentatie (2) vervangen door de volgende representaties van respectievelijk $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+$ en $SE(2)$:

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{x}, a} \psi(\mathbf{y}) &= \frac{1}{a} \psi\left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{a}\right), \\ U_{\mathbf{x}, e^{i\theta}} \psi(\mathbf{y}) &= \psi(R_\theta^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \end{aligned} \tag{5}$$

waarbij

$$\begin{aligned} a &> 0, \theta \in [0, 2\pi], \\ R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2), \mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2. \end{aligned}$$

hetgeen leidt tot respectievelijk schaal- en oriëntatiepartituren. Het eerste probleem dat hier opduikt is het reconstructieprobleem: hoe reconstrueren we f op stabiele wijze uit $W_\psi f$, analoog aan (3). Dit probleem komt voort uit het feit dat de represen-

taties (5) reducibel zijn (dat wil zeggen ze laten gesloten strikte deelruimten van $L_2(\mathbf{R})$ invariant. Bijvoorbeeld de representatie $(\mathbf{x}, e^{i\theta}) \mapsto U_{\mathbf{x}, e^{i\theta}}$ in (5) van de groep van translaties en rotaties is reducibel omdat de deelruimte, bestaande uit alle L_2 -elementen wiens Fouriertransformatie compact gedragen is op een bal met vaste straal, in zichzelf wordt afgebeeld. Zodat Mackey's theorie [11] van stal gehaald moet worden om ψ zodanig te kiezen om unitaire transformaties W_ψ te verkrijgen. Daarmee zijn de algemene waveletreconstructie-stellingen die stabiele reconstructies van het type $f = W_\psi^* W_\psi f$, zoals (3) garanderen niet van kracht. Dit is belangrijk voor het uiteindelijke doel operaties van een beeld f via operaties op de bijbehorende partituur $W_\psi f$, waar de informatie een stuk handzamer geordend is, uit te voeren, [4]. Operatoren op partituren kunnen alleen op stabiele wijze 1-op-1 gerelateerd worden aan operatoren op beelden als er een stabiele inverteerbare transformatie tussen beeld en partituur bestaat.

Schaalpartituren

A priori is het niet bekend op welke schaal je naar het beeld moet kijken en juist daarom is het nuttig om een plaatje simultaan op alle schalen te bekijken middels een schaalpartituur $u_f: \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$. In het geval van lineaire schaalpartituren, die volgen uit de schaal-ruimteaxioma's [5], wordt u_f verkregen uit f middels

$$\begin{cases} \partial_s u_f = -(-\Delta)^\alpha u_f, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \lim_{s \downarrow 0} u_f(\cdot, s) = f(\cdot), \end{cases} \quad (6)$$

waar $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ de Laplaciaan op \mathbf{R}^d voorstelt. De oplossingen van (6) zijn

$$u_f^\alpha(\mathbf{x}, s) = (K_s^\alpha * f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} K_s^\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (7)$$

waarbij $s > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, met convolutiekern

$$K_s^\alpha = F^{-1}[\omega \mapsto e^{-s\|\omega\|^{2\alpha}}].$$

De belangrijkste gevallen in deze door $\alpha \in (0, 1]$ geparameteriseerde familie van schaalpartituren, zijn de gevallen $\alpha = 1$ en $\alpha = \frac{1}{2}$ respectievelijk resulterend in een diffusiesysteem en potentiaalprobleem op de halfruimte $s > 0$. In deze gevallen is de convolutiekern de Gaussische kern respectievelijk de Cauchy kern:

$$\begin{aligned} K_s^1(\mathbf{x}) &= G_s(\mathbf{x}) := \frac{e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4s}}}{(4\pi s)^{d/2}}, \\ K_s^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) &= \frac{2}{\sigma_{d+1}} \frac{s}{(s^2 + \|\mathbf{x}\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Het geval $\alpha = \frac{1}{2}$ correspondeert met harmonische voortzetting van f naar de halfruimte $s > 0$. Ondanks dat het geval $\alpha = \frac{1}{2}$ dankzij de mooie eigenschappen van harmonische functies (en harmonische vectorpotentialen) vele voordelen heeft ten opzichte van het geval $\alpha = 1$, zullen we hier ons voor het gemak beperken tot het conceptueel eenvoudigere geval $\alpha = 1$, waarin het systeem (6) een eenvoudig diffusie probleem is :

$$\begin{cases} \partial_s u_f = \Delta u_f, \\ \lim_{s \downarrow 0} u_f(\cdot, s) = f(\cdot). \end{cases} \quad (9)$$

Als we de oplossing van dit probleem u_f , die wordt gegeven door convolutie van origineel beeld f met een Gaussische verdeling, beperken tot vaste schaal, verkrijgen we een beeld $u_f(\cdot, s) = G_s * f$ dat moet worden opgevat als het beeld geobserveerd op schaal $s = \frac{1}{2}\sigma^2 > 0$, zie figuur 2.

Ten gevolge van de diffusie (stelling van Gauss), zal er een grijswaardestroming op gang komen die lokale maxima en minima zal doen verdwijnen, totdat er uiteindelijk één extremum overblijft in het zwaarte punt van het plaatje. Zie figuur 3 en figuur 2.

Generieke topologische transitie in een schaalpartituur

Aan de hand van Morsetheorie kunnen alle generieke topologische veranderingen gekarakteriseerd worden met behulp van lokale oplossingen (germs) die voldoen aan de evolutievergelijkingen (zie figuur 3 voor illustraties van topologische transitie in schaalpartituren). De meest relevante topologische veranderingen zijn de eenzijdig stabiele gevallen (zie [3] wpp. 81–83, [2] voor wiskundige details.

Deze gevallen volgen uit de zogenoemde cuspcatastrofe

$$C_1(\mathbf{x}) = x_1^3 + \sum_{i=2}^d a_i x_i^2, \quad a_i \neq 0, \quad (10)$$

met deformatie $x_1^3 + s x_1 + \sum_{i=2}^d a_i x_i^2$. Het is eenvoudig na te gaan dat er voor $s > 0$ geen kritieke punten zijn, terwijl voor $s < 0$ een zadel en extremum ontstaan. Gebruiken we C_1 als begin conditie voor een diffusieprobleem dan krijgen we

$$u(\mathbf{x}, s) = (G_s * C_1)(\mathbf{x}) = x_1^3 + 6s x_1 - 2\left(\sum_{k=2}^d a_k\right)s + \sum_{k=2}^d a_k x_k^2.$$

Dit zijn de germs die een annihilatie van een extremum en een zadel representeren in een Gaussische schaalpartituur (zie figuur 3).

Een generiek annihilatiepunt $(\mathbf{x}^*, s^*) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+$ wordt bepaald door de volgende vergelijkingen

$$\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}^*, s^*) = \mathbf{0} \text{ en } \det(H_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}^*, s^*)) = 0, \quad (11)$$

waar $H_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}^*, s^*) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_f \right) (\mathbf{x}^*, s^*) \right]$ de ruimtelijke Hessiaan voorstelt. Dit is eenvoudig meetkundig in te zien: langs een zadelpad $s \mapsto (\mathbf{x}(s), s)$ in schaal-ruimte geldt $\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}(s), s) = \mathbf{0}$ en zullen de eigenwaarden van de Hessiaan $H_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}(s), s)$ van teken verschillen. Langs een extremumpad $s \mapsto (\mathbf{x}(s), s)$ in schaal-ruimte geldt $\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}(s), s) = \mathbf{0}$ en zullen de eigenwaarden van de Hessiaan $H_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}(s), s)$ hetzelfde teken hebben. Zodoende moet in zo'n punt $(\mathbf{x}^*, s^*) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+$ waar zadelpad en extremumpad annihilieren de gradiënt en tenminste een van de eigenwaarden van de Hessiaan nul moet zijn.

Nu we de generieke topologische transitie hebben besproken, kunnen we ons afvragen wat deze topologische transitie vertellen over het originele beeld f . Het is duidelijk dat ze het originele beeld niet uniek vastleggen, maar de onvermijdelijke vraag is: 'kunnen we uit de locaties van de annihilatiepunten (ook wel top-

punten genoemd) en de tot en met tweede orde differentiaalstructuur ter plaatse een goede benadering van het originele beeld verkrijgen?

Toppuntreconstructie

Gegeven is de verzameling toppunten $\{(x_i, s_i)\}_{i=1}^N \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+$ in het schaal-ruimtedomein van een Gaussische schaalpartituur $u_f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ van een plaatje $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Er bestaan diverse methoden om deze punten te verkrijgen, die we hier niet verder zullen toelichten.

Toppunten zijn spatiële kritieke punten en dus geldt

$$\frac{\partial}{\partial x^j} u_f(x_i, s_i) = \frac{\partial}{\partial x^j} (G_{s_i} * f)(x_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} G_{s_i} * f \right)(x_i) = (\psi_{i,e_j}, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)} = 0,$$

waarbij $\psi_{i,e_j}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} G_{s_i} \right)(x - x)$, $j = 1, 2, i = 1, \dots, N, x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Verder hebben we in de vorige paragraaf beargumenteerd dat bovendien $\det H_x u_f(x_i, s_i) = 0$ moet gelden in een toppunt.

We zijn op zoek naar een approximatieve reconstructie $\tilde{f} \in L_2(\mathbf{R}^2)$ van het originele plaatje zodanig dat de bijbehorende schaalpartituur u_f in ieder geval weer toppunten heeft ter plaatse $\{(x_i, s_i)\}_{i=1}^N$. Dit doen we door af te dwingen dat

$$D^{(n_1, n_2)} u_f(x_i, s_i) = D^{(n_1, n_2)} u_{\tilde{f}}(x_i, s_i) \tag{12}$$

geldt voor alle $0 \leq n_1 + n_2 \leq 2, i = 1, \dots, N$, waar we de korte notatie $D^{(n_1, n_2)} u_f(x_i, s_i) := \frac{\partial^{n_1}}{\partial x_1^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{\partial x_2^{n_2}} u_f(x_i, s_i)$ gebruiken. Het is eenvoudig na te gaan dat deze eis kan worden herschreven als

$$\forall_{i \in \{1, \dots, N\}} \forall_{\mathbf{n}, 0 \leq |\mathbf{n}| \leq 2} : (\psi_{i, \mathbf{n}}, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)} = (\psi_{i, \mathbf{n}}, \tilde{f})_{L_2(\mathbf{R}^2)}, \tag{13}$$

waarbij $\psi_{i, \mathbf{n}}(x) = (D^{(n_1, n_2)} G_{s_i})(x - x)$ en de multi-index $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ met $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2$.

De verzameling getallen

$$\{(\psi_{i, \mathbf{n}}, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)} \mid i = 1, \dots, N, \mathbf{n} = (n_1, n_2), |\mathbf{n}| \leq 2\}$$

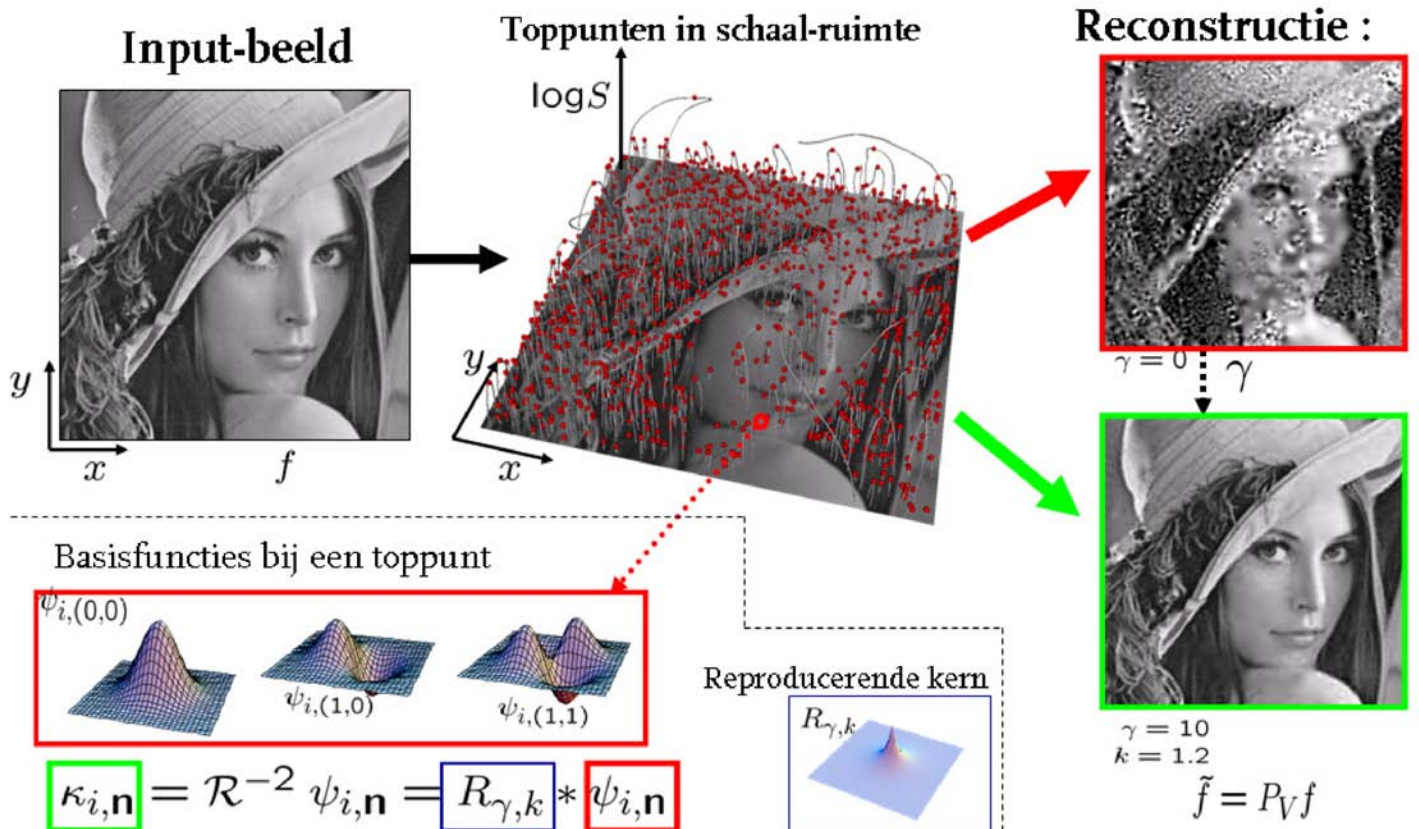
in (13), vormen als het ware een vingerafdruk van het plaatje f . De getallen worden ook wel de ‘features’ van f genoemd. We zullen ze voortaan noteren met

$$\{C_{f; i, \mathbf{n}}\} := \{(\psi_{i, \mathbf{n}}, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)}\}_{i=1, \dots, N, |\mathbf{n}| \leq 2} \tag{14}$$

Dan merken we op dat (12) een equivalentierelatie definieert op $L_2(\mathbf{R}^2)$ en dat de equivalentieklasse van plaatjes met dezelfde features als f wordt weergegeven door

$$\{g \in L_2(\mathbf{R}^2) \mid g \sim f\} = f + V^\perp \tag{15}$$

waar V^\perp het orthogonaal complement is van de lineaire ruimte V



Figuur 4 Gegeven het origineel beeld bepalen we de singulariteiten en toppunten in de bijbehorende schaalpartituur aangegeven met rode bolletjes. De tot en met tweede orde differentiaalstructuur in ieder toppunt geeft ons de verzameling basisfuncties $\{\psi_{i, \mathbf{n}}\}_{|\mathbf{n}| \leq 2}$, waarvan we de grafiek van enkele gevallen in het rode kader hebben weergegeven. Deze basisfuncties zijn goed zichtbaar in het reconstructiebeeld rechts bovenaan, omdat hier $\gamma = 0$, dat wil zeggen binnen onze equivalentie klasse van beelden, (15), beschouwen we degene met minimale L_2 -norm. Echter bij vast gekozen $k > 1$ (in dit geval $k = 1.2$), kunnen we de gladheid van ons het gereconstrueerde beeld (16), opgebouwd uit basisfuncties $\kappa_{i, \mathbf{n}}$, reguleren met de parameter $\gamma > 0$ die de norm en reproducerende kern $R_{\gamma, k}$ in de bijbehorende Sobolevruimte vastlegt. Merk op dat het reconstructiebeeld het origineel op accepteerbare wijze benadert, hetgeen beeldmanipulatie en -herkenning aan de hand van toppunten in de bijbehorende schaalpartituur mogelijk maakt.

lineair opgespannen door de vectoren

$$V = \text{span} \{ \psi_{i,\mathbf{n}} \mid i = 1, \dots, N, 0 \leq |\mathbf{n}| \leq 2 \} \subset \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^2).$$

Binnen deze equivalentieklasse zoeken we naar het element \tilde{f} met minimale Sobolevnorm gegeven door

$$\tilde{f} = \arg \min_{g \in \mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2), g \sim f} \|g\|_{\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)}^2 := \arg \min_{g \in \mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2), g \sim f} (g, g)_{(\mathbf{L}_2, \mathbf{R}^2)} + (g, \gamma^{2k} |\Delta|^k g)_{(\mathbf{L}_2, \mathbf{R}^2)},$$

voor vast gekozen $\gamma > 0$ en $k > 1$. (We merken op dat $\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)$ een reproducerende kernen ruimte als $k > 1$ is. In dit geval volgt κ_k uit ψ_k door convolutie met de reproducerende kern $R_{\gamma,k}$, i.e. $\kappa_{i,\mathbf{n}} = R_{\gamma,k} * \psi_{i,\mathbf{n}}$.) Dit element wordt verkregen door middel van orthogonale projectie van de Sobolevruimte

$$\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2) = \{ f \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^2) \mid Rf := \sqrt{I + \gamma^{2k} |\Delta|^k} f \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^2) \}$$

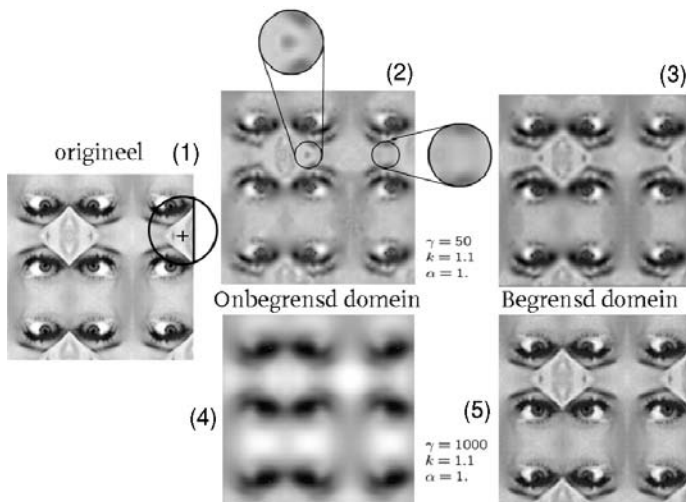
op V . Om technische details te vermijden, nemen we hier voor het gemak even aan $f \in \mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)$. In dat geval wordt de reconstructie gegeven door

$$\tilde{f} = P_V f = \sum_{0 \leq n_1 + n_2 \leq 2} \sum_{i=1}^N C_f^{i,\mathbf{n}} \kappa_{i,\mathbf{n}}, \quad (16)$$

waarbij de basis-functies zijn gegeven door

$$\kappa_{i,\mathbf{n}} = (I + \gamma^{2k} |\Delta|)^{-1} \psi_{i,\mathbf{n}}$$

met bijbehorende reciproke basis $\kappa^{i,\mathbf{n}}$, i.e.



Figuur 5 Probleem van de rand: als de singulariteiten te dicht bij de rand komen te liggen zullen de bijbehorende basisfuncties $\kappa_{i,\mathbf{n}}$ teveel bestraft worden omdat ze, in tegenstelling tot het originele plaatje f , over de rand lopen. Van links naar rechts en van boven naar beneden: (1) origineel plaatje f ; (2) onbegrensd domein toppunt reconstructie (16), $\gamma = 50$, $\alpha = 1$, $k = 1.1$; (3) begrensd domein reconstructie (17) met zelfde parameters; (4) onbegrensd-domeinreconstructie $\gamma = 1000$, $\alpha = 1$, $k = 1.1$, vanuit singuliere punten positities in de schaalpartituur van Δf ; (5) zelfde settings voor begrensd-domeinreconstructie (17). Het is duidelijk te zien dat het probleem aan de randen is opgelost in het begrensd-domein geval.

$$(\kappa^{i,\mathbf{n}}, \kappa_{j,\mathbf{m}})_{\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)} = \delta_j^i \delta_{m_1}^{n_1} \delta_{m_2}^{n_2}$$

en waarbij we de getallen $\{C_f^{i,\mathbf{n}} := (\kappa^{i,\mathbf{n}}, f)_{\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)}\}$ berekenen uit de features (14) middels de inverse Grammatrix. Voor het berekenen van de inverse Grammatrix gebruiken we een standaard singuliere-waardendecompositie, met drempel op de singuliere waarden, om de goedgesteldheid van de inverse te bewaken.

De parameter $\gamma > 0$ regelt de gladheid van de reconstructie [3, 6, 9] (zie figuur 4). Het is duidelijk te zien dat de basisfuncties $\kappa^{i,\mathbf{n}}$ extra glad zijn en vanwege de Sobolevnormminimalisatie veel beter in elkaar overlopen in het reconstructie beeld naarmate $\gamma > 0$ groter wordt. Op die manier kunnen we 'de gereconstrueerde Lena ontdoen van haar \mathbf{L}_2 -puistjes', zoals de rechter kolom van figuur 4 duidelijk laat zien.

Een nadeel bij de hierboven besproken aanpak is dat $\gamma > 0$ niet te groot gekozen mag worden. De reden hiervoor is dat naarmate $\gamma > 0$ groter wordt de basis vectoren κ_i meer en meer buiten de rand van het compact gedragen originele plaatje vallen en dus onnodig bestraft worden. Dit heeft tot gevolg dat het gereconstrueerd beeld vanuit de rand structuren gaat missen. De oplossing voor dit probleem is zowel de schaalpartituur en de Sobolevnormen op een eindig gebied met Dirichletrandvoorwaarden te beschouwen. Het originele plaatje f compact gedragen op $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ voldoet echter niet aan zo'n randvoorwaarde. Daarom zetten we de rand middels een snel efficient algoritme naar binnen harmonisch voort $(f|_{\partial\Omega})_H$, i.e. $\Delta((f|_{\partial\Omega})_H) = 0$ en $(f|_{\partial\Omega})_H|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$. We schrijven

$$f = f - (f|_{\partial\Omega})_H + (f|_{\partial\Omega})_H$$

We slaan nu $f|_{\partial\Omega}$ apart op en berekenen de Gaussische schaalpartituur van $F := f - (f|_{\partial\Omega})_H$ op het eindige domein Ω , wederom via een diffusievergelijking (9) en met Dirichletrandvoorwaarde $u_F(\mathbf{x}, s) = 0$ voor alle $\mathbf{x} \in \partial\Omega, s > 0$. De oplossing wordt nu gegeven door

$$u_F(\mathbf{x}, s) = \sum_{p,q \in \mathbf{N}} e^{-(\lambda_{pq})s} (f_{pq}, F)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} f_{pq}(\mathbf{x}),$$

waar de eigenwaarden en eigenfuncties zijn gegeven door

$$\lambda_{pq} = \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2$$

en

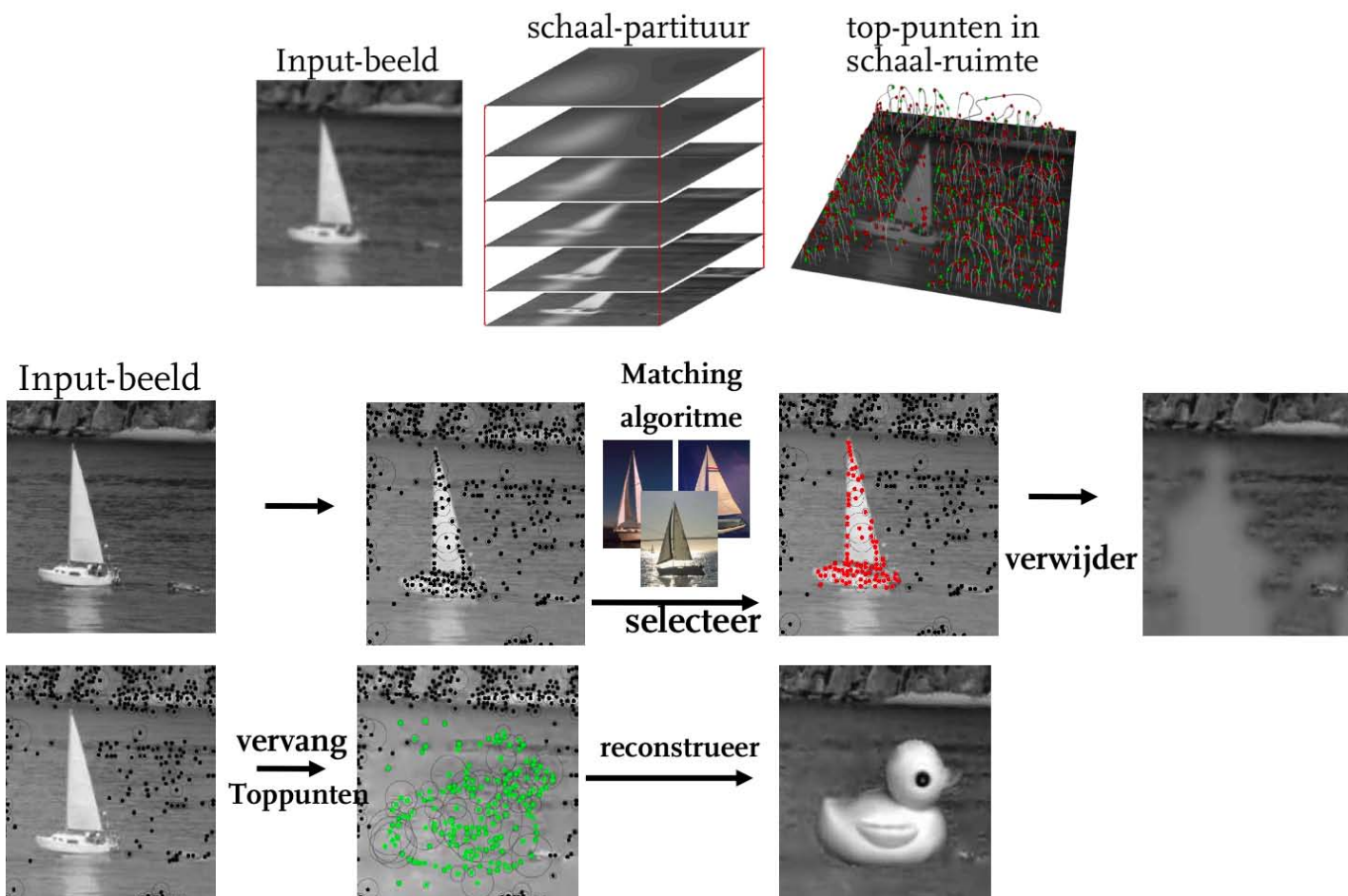
$$f_{pq}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right).$$

De optimale reconstructie wordt nu gegeven door

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = (f|_{\partial\Omega})_H(\mathbf{x}) + \sum_{0 \leq |\mathbf{n}| \leq 2} \sum_{0 \leq |\mathbf{m}| \leq 2} \sum_{i,j=1}^N G^{i,\mathbf{n};j,\mathbf{m}} (\psi_{i,\mathbf{n}}, F)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \kappa_{j,\mathbf{m}}(\mathbf{x}) \quad (17)$$

waar de multi-indices $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$, met $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2$ en waar $G^{i,\mathbf{n};j,\mathbf{m}}$ de inverse matrix is van de Grammatrix

$$G_{i,\mathbf{n};j,\mathbf{m}} = (\kappa_{i,\mathbf{n}}, \kappa_{j,\mathbf{m}})_{\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)} = \sum_{p,q \in \mathbf{N}} \frac{e^{-(\lambda_{pq})(s_j + s_i)}}{1 + \gamma^{2k} (\lambda_{pq})^k} (D^{(\mathbf{m})} f_{pq})(\mathbf{x}_j) (D^{(\mathbf{n})} f_{pq})(\mathbf{x}_i).$$



Figuur 6 Bovenste rij, van links naar rechts: origineel beeld, bijbehorende schaalpartituur, toppunten in schaalpartituur. Onderste twee rijen: objectgeoriënteerde beeldmanipulatie aan de hand van toppunten

In onze algoritmen gebruiken we *discrete* sinustransformaties in plaats van sinusreeksen, om exact te blijven op het grid. Voor details met betrekking tot deze laatste stap, zie [7]. Tot slot merken we op dat het qua reconstructie vaak beter is om de locaties van toppunten in de schaalpartituur $u_{\Delta f}$ van de Laplaciaan van f , Δf (merk op $u_{\Delta f} = \Delta u_f = \partial_s u_f$) te beschouwen omdat deze toppunten, in tegenstelling tot de toppunten in de schaalpartituur u_f van f , meer boven de randen van structuren in een plaatje liggen (zie figuur 5).

Het grote voordeel van deze eindig-domeinreconstructies (die eenvoudig te generaliseren zijn naar α -schaal partituren door overal λ_{pq} te vervangen door λ_{pq}^α) is dat $\gamma > 0$ groot gekozen kan worden. In het oneindige domein was dit niet mogelijk.

Toepassingen

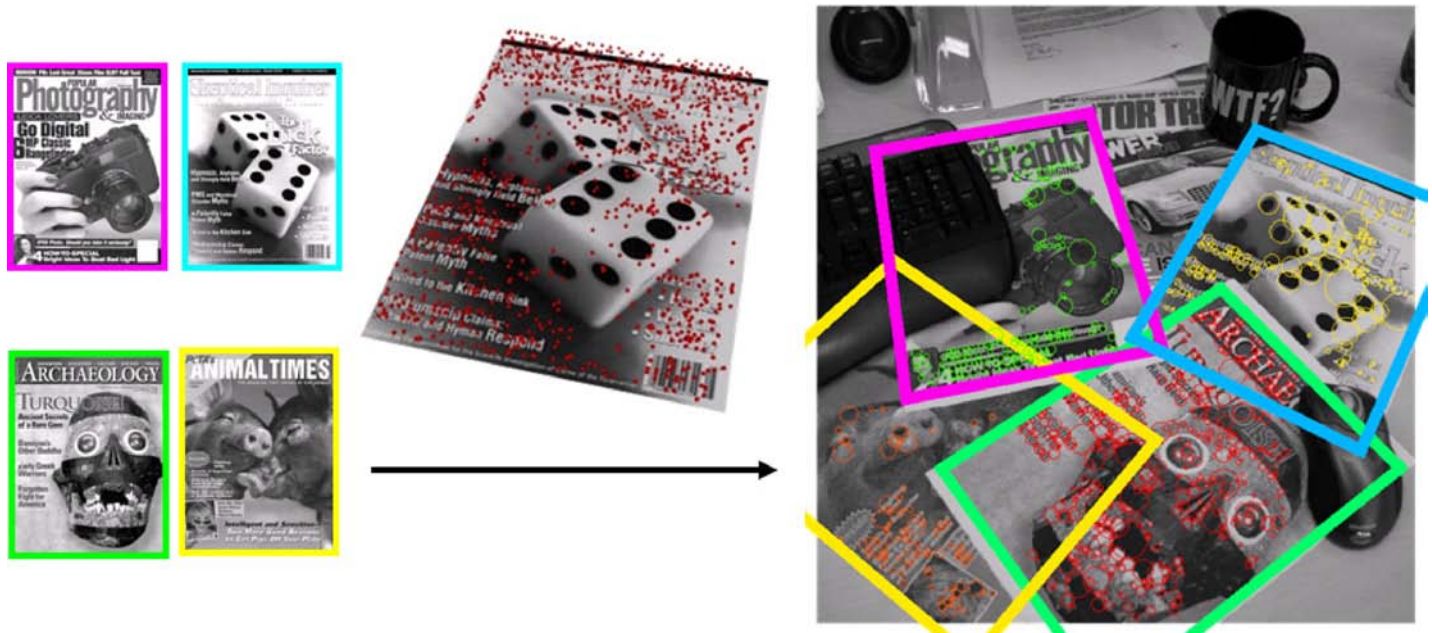
Nu we hebben aangetoond dat we uit de toppunten in een schaalpartituur het beeld kunnen reconstrueren, kunnen we eens kijken wat we hier mee kunnen.

Allereerst merken we op dat bij ieder toppunt een aantal basisfuncties horen. Het reconstructiebeeld is dus uitgedrukt in een set basisfuncties die zuiver en alleen door de topologie van het beeld (en bijbehorende schaalpartituur) zijn bepaald. Dit heeft als voordeel dat als er zich lokaal weinig structuur in het plaatje bevindt (en er dus lokaal weinig toppunten aanwezig zijn), er ook weinig basisfuncties worden gebruikt. We hebben dus een topologisch correcte ma-

nier gevonden om een beeld in beeld-afhankelijke basisfuncties te beschrijven. Hierbij dient echter wel te worden opgemerkt dat standaardontwikkelingen van een plaatje, zoals bijvoorbeeld de welbekende jpeg-compressie, veel sneller zijn omdat ze op regelmatige vaste roosters zijn geordend en geen initiële berekening van toppunten behoeven.

Uit het voorafgaande is gebleken dat de tot en met tweede orde differentiaalstructuur in de toppunten van schaalpartituur van een beeld f (met eventueel daar aan toegevoegd de tweede orde differentiaalstructuur in de toppunten van Δf) goede benaderingen opleveren voor het originele beeld. Dit is belangrijk voor objectherkenning van beelden met als input de features ten gevolge van de differentiaalstructuur in toppunten [1]. Hierbij worden de toppuntfeatures (14) van het te herkennen object vergeleken met de toppuntfeatures in het gegeven beeld (zie figuur 7).

Verder kan een beeld nu worden gemanipuleerd via zijn toppunten. Gegeven is een input-beeld met daarin een bepaald object, bijvoorbeeld een boot zoals in figuur 6. We kunnen dan het object herkenning algoritme gebruiken om in de verzameling toppunten die verzameling toppunten te markeren die het beste lijkt (aan de hand van de ligging en vooral ook aan de hand van bijbehorende features) op toppunt verzamelingen van diverse beelden van soortgelijke objecten. Deze toppunten kunnen we vervolgens verwijderen, zodat het reconstructie algoritme een beeld levert zonder het object. Voorts kunnen we op soortgelijke wijze objecten ook toevoegen, bijvoor-



Figuur 7 Objectherkenning gebruikmakend van tot en met derde orde differentiaalstructuur in toppunten. Links: objecten zijn voorpagina's van diverse tijdschriften; midden: toppunten in schaalpartituur van één object; rechts: plaatje waar de objecten in moeten worden gevonden, door middel van een matching algoritme dat clusters van toppunten (met bijbehorende features) in de schaalpartituur van rechterbeeld vergelijkt met toppunten (met bijbehorende features) in de schaalpartituur van objectafbeeldingen. Ter illustratie hebben we de toppunten (in schaalruimte) geprojecteerd op het beeldvlak.

beeld het rubberen badeendje in figuur 6. Voor een eerste praktische studie over deze manier van beeldmanipulatie, zie [10]. Het hoofdprobleem bij deze aanpak is het feit dat bij verwijdering van één toppunt ook de interactie (grijswaardenstroming) tussen extreme paden behorend bij een toppunt wordt weggehaald. Hiervoor zullen flux-features [6] moeten worden voorgeschreven en iteratieve (van grof naar fijn, i.e. van grote schaal naar kleine schaal, equidistant in $\log s$) eindig-domeinreconstructies met Neumannrandvoorwaarden (op alle iteratieschalen) worden gebruikt.

Tot slot is er de toepassing van toppunt reconstructies in de analyse van 'optic-flow' in videosequenties. Bij deze toepassing is het de bedoeling om objecten te volgen in een videosequentie, i.e. tijdsafhankelijke beelden [8].

Adaptieve schaalpartituren

Tot nog toe hebben ons beperkt tot lineaire transformaties tussen beeld en schaalpartituur. Deze waren gegeven door (6). In het bijzonder hebben we ons beperkt tot $\alpha = 1$, die corresponderen met een diffusieproces op de half-ruimte $s > 0$ en die gegeven waren door convoluties met een Gaussische kern G_s . Deze kern is isotroop, zodat rotatie van het beeld f correspondeert met rotatie van alle lagen $\{u_f(\cdot, s)\}_{s>0}$ in de schaalpartituur u_f . Het is duidelijk dat een convolutie van een grijswaardebeeld met een niet isotrope kern vaak niet wenselijk is, aangezien je dan niet alle richtingen hetzelfde behandelt. Aan de andere kant is het vanuit praktisch oogpunt vaak erg vervelend dat zo'n isotrope convolutie gedeelten in het beeld waar veel structuur zit net zo sterk vervaagt als gedeelten waar weinig structuur zit (zie figuur 2).

Daarom wordt de lineariteit van de afbeelding $f \mapsto u_f$ vaak overboord gegooid en gebruikt men een beeldadaptieve conductieterm tussen de div en de grad van de Laplace operator $\Delta = \text{div} \circ \text{grad}$ in het diffusie proces. Na het artikel van Perona en Malik [12] zijn er talloze artikelen verschenen waarbij men de con-

ductiviteit afhankelijk van de gradiëntnorm koos. Dit levert dan evolutievergelijkingen van het type

$$\begin{cases} \partial_s u_f(\mathbf{x}, s) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (c(\|\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\cdot, s)\|) \nabla_{\mathbf{x}} u_f(\cdot, s))(\mathbf{x}), \\ u_f(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) \end{cases}$$

waarbij de conductiviteit $(\mathbf{x}, s) \mapsto c(\|\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}, s)\|)$ meestal als een van de volgende typen

$$\begin{aligned} c(t) &= \exp\left(-\frac{c}{(\lambda/t)^{2p}}\right), & c(t) &= \frac{1}{(t/\lambda)^{2p} + 1}, \\ c(t) &= \frac{1}{\sqrt{(t/\lambda)^2 + 1}} \end{aligned} \tag{18}$$

gekozen werd. Bij al deze methoden wordt echter geen gebruik gemaakt van de richting van de gradiënt. Daarom stelde Weickert [13] efficiënte numerieke schema's voor om de niet-lineaire diffusiesystemen die ontstaan door de scalarwaardige conductiviteit te vervangen door een matrixwaardige conductiviteit gebaseerd op de richting van de gradiënt. Deze schema's zijn bekend geworden onder de naam 'coherence enhancing diffusion schemes'. Deze matrixwaardige conductiviteit $(\mathbf{x}, s) \mapsto C(u_f, \mathbf{x}, s)$, is gegeven door

$$\begin{aligned} C(u_f, \mathbf{x}, s) &= \zeta I + (1 - \zeta) \cdot \\ &\exp\left(-\frac{c}{(\lambda_1(S(u_f)(\mathbf{x}, s)) - \lambda_2(S(u_f)(\mathbf{x}, s)))^2}\right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T \end{aligned} \tag{19}$$

waarbij $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(S(u_f)(\mathbf{x}, s))$ de eigenvector is met kleinste eigenwaarde van

$$S(u_f)(\mathbf{x}, s) = (G_{\sigma} * (\nabla u_f(\cdot, s))^T \nabla u_f(\cdot, s))(\mathbf{x})$$

met $\zeta \in (0, 1)$, $c > 0$, $\sigma > 0$ en waarin de hulpmatrix $S(u_f)(\mathbf{x}, s)$

met eigenwaarden $\{\lambda_i(S(u_f)(\mathbf{x}, s))\}_{i=1,2}$ zowel dienst doet in een maat voor lokale anisotropie

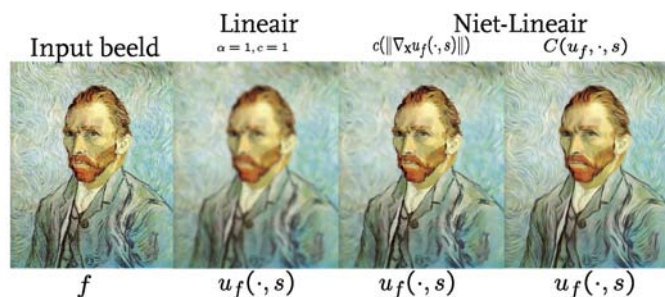
$$\exp\left(-\frac{c}{(\lambda_1(S(u_f)(\mathbf{x}, s)) - \lambda_2(S(u_f)(\mathbf{x}, s)))^2}\right)$$

en tegelijkertijd dienst doet als hulpmatrix in een oriëntatieschatting via de eigenvector $\mathbf{e}_2(S(u_f)(\mathbf{x}, s))$ met kleinste eigenwaarde. Om robuuste oriëntatieschattingen te krijgen is er een componentgewijze gladmakende convolutie (geparameteriseerd door $\sigma > 0$) toegepast op 2×2 matrixveld $\mathbf{x} \mapsto \nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}, s)^T \nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}, s)$, waar $\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}, s) = (\partial_x u_f(\mathbf{x}, s), \partial_y u_f(\mathbf{x}, s))$.

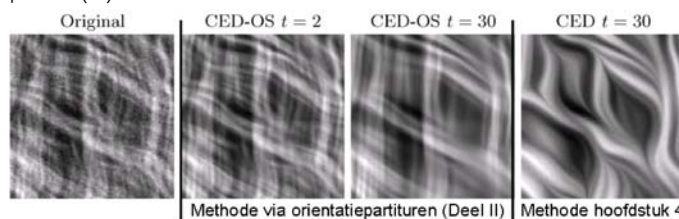
Voor een vergelijking van lineaire diffusie, niet lineaire diffusie afhankelijk van $\|\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\cdot, s)\|$ en 'coherence-enhancing' diffusie, zie figuur 8. Hier is opzettelijk een Van Goghschilderij gekozen omdat dat het van ieder beeld een soort Van Goghschilderij maakt. Dit is overigens zelfs een optie op speciale mobiele telefoons van Nokia, waarbij je met een druk op de knop je foto's direct kan laten 'Van Gogh' middels een snel coherence enhancing diffusie schema.

Echter alleen in enkele beeldanalyse-applicaties, zoals het verbeteren van afbeeldingen met vage vingerafdrukken, waarbij er geen (bijna) kruisende structuren zijn is dit artistieke effect onschuldig. Kritisch bekeken is dit artistieke effect een verloedering van het beeld omdat er overall kunstmatige krommingen in het plaatje worden gecreëerd. Het probleem is, dat de richting van de gradiënt bij kruisende hoogtelijnen niet goed gedefinieerd is. Hetzelfde geldt voor soortgelijke methoden gebaseerd op eigen vectoren van de Hessiaan bij kruisende lijnen. Daarom is het noodzaak om gebruik te maken van oriëntatiepartituren (zie figuur 9). In het tweede deel van dat artikel, dat in het septembernummer verschijnt zullen we hier verder op ingaan.

Om alvast een tipje van de sluier op te lichten: dan zullen we eerst beelden op stabiele wijze bijtief relateren aan oriëntatiepartituren (weer door middel van transformaties van het standaard type (4)) om vervolgens adaptieve schaalpartituren



Figuur 8 Van links naar rechts: input beeld f : dit is het bekende zelfportret van Van Gogh; vergelijkbare schaal plakjes $u_f(\cdot, s)$ in een lineaire schaalpartituur; in een Perona en Malik schaalpartituur (linker geval in (18)) en in een 'coherence enhancing' diffusie schaalpartituur (19)



Figuur 9 Resultaat van adaptieve niet-lineaire diffusie op oriëntatiepartituren (CED-OS) stopgezet op $t = 2$ en $t = 30$ en standaard adaptieve niet-lineaire diffusie op 2-photon microscopy beelden van collageenvezels stopgezet op $t = 30$, relevant voor de modellering van hartkleppen in soft-tissue engineering. Het is duidelijk te zien dat standaard coherence enhancing diffusie (19) kunstmatige kromming genereert terwijl methoden via diffusie op inverteerbare oriëntatiepartituren de kruisende lijnen keurig behandelen.

te verkrijgen via (niet-)lineaire linksinvariante diffusievergelijkingen op inverteerbare oriëntatiepartituren, die wel met kruisende structuren overweg kunnen. Hierbij speelt het niet-commutatieve gedrag van $SE(2)$, net zoals het niet commutatieve gedrag van de groep H_3 in het voorbeeld van de muziekpartituren, een cruciale rol.

Dankwoord

Dank aan Bart Janssen, Erik Franken, Frans Kanters, Bram Platel, Evgeniya Balmashnova, Jan de Graaf, Luc Florack, Mark Peletier, en Bart ter Haar Romeny, faculteiten wiskunde & informatica (W&I) en biomedische technologie (BMT) aan de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e) voor hun ondersteuning bij het onderzoek. Dank aan NWO, de Nederlands Stichting voor Wetenschappelijk Onderzoek, voor financiële ondersteuning.

Referenties

- 1 E. Balmachnova, *Scale-Euclidean Invariant Object Retrieval*, Eindhoven University of Technology, Department of Biomedical Engineering, Eindhoven, The Netherlands, 2007
- 2 J. Damon, 'Generic Properties of Solutions to Partial Differential Equations', *ARMA*, 353-403, 1997
- 3 R. Duits, *Perceptual Organization in Image Analysis*, Eindhoven University of Technology, Department of Biomedical Engineering, Eindhoven, The Netherlands, 2005. A digital version is available on the web URL: www.bmi2.bmt.tue.nl/Image-Analysis/People/RDuits/THESISRDUITS.pdf
- 4 R. Duits and B. Burgeth, 'Scale Spaces on Lie Groups', *Proc. of the first international conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, 300-312, 2007
- 5 R. Duits and L.M.J. Florack and J. de Graaf and B. ter Haar Romeny, 'On the Axioms of Scale Space Theory', *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **20**, 267-298, 2004
- 6 R. Duits and B. Janssen and F. Kanters and L. M. J. Florack, 'Linear Image Reconstruction From a Sparse Set of Alpha Scale Space Features by Means of Inner Products of Sobolev Type', *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, **3753**, 96-111, 2005
- 7 B. J. Janssen and R. Duits, 'Linear Image Reconstruction by Sobolev Norms on the Bounded Domain', *Proc. of the first international conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, Springer, 55-67, 2007
- 8 B. J. Janssen and L.M.J. Florack and R. Duits and B.M. ter Haar Romeny, 'Optic Flow from Multi-scale Dynamic Anchor Point Attributes', *Lecture notes in computer science*, Springer, **4141**, 767-779, 2006
- 9 B.J. Janssen and F.M.W. Kanters and R. Duits and L.M.J. Florack and B.M. ter Haar Romeny, 'A Linear Image Reconstruction Framework Based on Sobolev Type Inner Products', *International Journal of Computer Vision*, **70**(3), 231-240, 2006
- 10 F.M.W. Kanters, *Towards Object-based Image Editing*, Eindhoven University of Technology, Department of Biomedical Engineering, Eindhoven, The Netherlands, 2007
- 11 G.W. Mackey, 'Imprimitivity for representations of locally compact groups', *Proc. N.A.S.*, **35**, 537-545, 1949
- 12 P. Perona, and J. Malik, 'Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion', *IEEE-transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **12**(7), 629, 1990
- 13 J. A. Weickert, 'Coherence-Enhancing Diffusion Filtering', *International Journal of Computer Vision*, **31**(2/3), 111-127, 1999