

In de verdediging

| In defence



Skew rings, convolutional codes and discrete systems

Fai Lung Tsang

If you'd ever visit Hong Kong and run into a *Febo-automatiek*, it will probably be thanks to Fai Lung Tsang. Asked what would be the next step in his career, he answered that a postdoc position in Europe would be ideal, but that he could also imagine becoming a businessman; he'd love to import the Febo-automatiek to his home town! But the possibility to 'eat from the wall' was not the only reason why Fai Lung (or Tomas) enjoyed being a Ph. D. student in Groningen. He simply liked a lot to be part of the Dutch mathematical society.

Coding theory and discrete behaviors

On June 23, 2008, Fai Lung Tsang successfully defended his Ph. D. thesis *Skew rings, convolutional codes and discrete systems*, written under guidance of dr. Heide Gluesing-Luerssen (Univ. of Kentucky) and prof. dr. Marius van der Put (RuG).

The first part of his thesis deals with a problem in coding theory, involving a noncommutative polynomial ring. This problem is shown to be equivalent to a 'rook' (Ned: toren) problem on the chessboard. It also has a geometric interpretation that leads to a partial solution and that is applied to solve yet another problem on polynomial matrices. In the second part of the thesis, some theory on discrete systems, i.e., properties of discrete behaviors, is developed. Together with some homological algebra this theory is then applied in the context of abelian sandpiles.

Rooks and convolutional codes

The rook problem is similar to a classical one about how to place n rooks on a chessboard so that they are all mutually non-attacking. This time, they however have to satisfy an additional requirement. An example for $n = 6$ is as follows:

Pick any $n - 1 = 5$ numbers from the set $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Can you put 5 rooks in the following numbered chessboard, with the condition that they are sitting on the numbers that you have chosen and that they are mutually non-attacking?

0	1	2	3	4	5
5	0	1	2	3	4
4	5	0	1	2	3
3	4	5	0	1	2
2	3	4	5	0	1
1	2	3	4	5	0

Although this chessboard problem helps to explain his original problem, Fai Lung himself prefers to understand the reasoning that leads to a solution, and not to just give a solution without foreseeable reasons. One of his favorite results is a theorem dealing with the original

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
G.M.Hek@uva.nl

problem, which indeed helps to really understand how to obtain solutions. Fai Lung likes this theorem in particular, because the formulation is simple, whereas the ideas leading to the result are not at all trivial. The theorem concerns cyclic convolutional codes of rank $n - 1$. Given a field F with characteristic not dividing n , such code has the form $h^\perp$ where $h = h_0 + h_1z + \dots + h_{n-1}z^{n-1}$ with all $h_i \in F[z^n]$ and $\gcd(h_i z^i) = 1$. The so-called *Forney sequence* associated to $h^\perp$ can be computed with the help of a certain vector bundle on $\mathbb{P}_F^1$:

Theorem *Let $n > 1$, F be a field with characteristic coprime with n , V an n -dimensional F -vector space. Select a basis $e_0, \dots, e_{n-1}$ of V . Let be given a polynomial $h = h_0 + h_1z + \dots + h_{n-1}z^{n-1}$ with $h_i \in F[z^n]$ and $\gcd(h_i z^i) = 1$. Define*

$$M = \left\{ \sum w_i e_i \in F[z] \otimes V \mid \sum w_i h_i z^i = 0 \right\}$$

which has a minimal basis of degrees $d_1, \dots, d_{n-1}$. Then the cokernel of the map

$$\alpha_k : \bigoplus_{i=0}^{n-1} F[z]_{\leq k} e_i \rightarrow F[z]_{\leq d+k}$$

given by $e_i \mapsto h_i z^i$ has dimension $\sum_{i=1}^{n-1} \max(-1 + d_i - k, 0)$ for all $k \geq 0$, here $d = \deg h$ and $F[z]_{\leq s}$ denotes the vector space of polynomials of degree $\leq s$.

This theorem is obtained in several steps: first a duality is constructed, (i.e., the $\perp$) on the noncommutative polynomial ring; then the vector bundles on $\mathbb{P}^1$ are studied. And finally, these two things are put together and combined with a little sheaf cohomology to get the result.

A day I'll never forget

In August 2004, Fai Lung started his Ph. D. project, which was initiated by Heide Gluesing-Luerssen. Under her guidance, he proved, amongst others, the equivalence of the problem in the skew ring and the chessboard problem. Luckily enough, Fai Lung is always quite happy getting along with himself, so that he didn't suffer too much when Gluesing-Luerssen left for the University of Kentucky at the end of 2006. Half a year with virtually no supervision followed. But then it was July 3rd of 2007, a day about which Fai Lung literally says that he'll never forget it. It was the day that he started to work with Marius van der Put. Discussions with Marius always turned into brainstorming sessions, often resulting in new ideas and new directions for his research. At times it felt a little like getting a Lotto-hint on the next day's lottery – in normal life impossible of course! These frequent meetings have added a great deal of depth to Fai Lung's research and ultimately to his dissertation.

Not only because he had to spend a period without close supervision, but also because he had no nearby colleagues working in his field, Fai Lung knows that life of a research mathematician can be a lonely one. As far as he knows, there are no other people in the Netherlands who work close to his field, apart from one other RuG-student of Gluesing-Luerssen who lives in Oldenburg (Germany). The contact with him and Gluesing-Luerssen is always friendly, without any competitive feelings. Would the others be competition-minded though, then there still would be no reason for competition according to Fai Lung, since they all have different interests.

At times, it was difficult to focus on his research. Fai Lung discovered how broad the world of mathematics actually is, and he found a wide variety of topics so interesting that they kept him from his own research. When one realises that he is one of the few students who have finished their Ph. D. project within four years, this seems not bad at all though: both finish your own project in time, and 'waste' some time doing other nice things!



Toroidal Automorphic Forms for Function Fields Oliver Lorscheid

Ook Oliver Lorscheid heeft zijn proefschrift recent met succes verdedigd, en wel op 28 mei. Hij heeft de afgelopen vier jaar als promovendus bij prof. dr. Gunther Cornelissen in Utrecht doorgebracht en zet momenteel zijn eerste stappen in de wereld van de zelfstandige onderzoeker aan het Max Planck Instituut in Bonn. Op het moment van schrijven lag zijn proefschrift 'Toroidal Automorphic Forms for Function Fields' in handen van de drukker en zat Oliver te wachten op de dag van zijn promotie op 28 mei. Een goed moment om eens terug te kijken.

Diepe verbanden in de getaltheorie

Om een indruk van de inhoud van zijn proefschrift te geven, vertelt Oliver eerst over de historische achtergrond. Don Zagier legde eind jaren zeventig een verband tussen enerzijds de complexe getallen die niet-triviale nulpunten van de Riemann zetafunctie zijn, en anderzijds de complexe getallen die gewichten zijn van Eisensteinreeksen met een eigenschap die hij 'toroïdaal' noemde. Als het lukt om de unitariseerbaarheid van de ruimte van toroïdale automorfe vormen te bewijzen, dan volgt uit het werk van Zagier de geldigheid van de Riemannhypothese voor $\mathbf{Q}$. Dit weerspiegelt dat deze ruimte van automorfe vormen diepe verbanden binnen de getaltheorie codeert. Oliver's opdracht was om de arithmetiek van toroïdale automorfe vormen over globale functielichamen, de parallelwereld van $\mathbf{Q}$, te onderzoeken. Hij vertaalde de nodige begrippen naar functies op grafen en slaagde er aldus in om afschattingen van de dimensie van de ruimte van toroïdale automorfe vormen te bepalen en in het bijzonder eindigdimensionaliteit van deze ruimte aan te tonen. Tevens bepaalde Oliver de ruimtes voor functielichamen van geslacht 0 en 1 (met enige kleine uitzonderingen) door middel van expliciete berekeningen. De uitkomsten laten zien wat er zoal gezegd kan worden over unitariseerbaarheid met de beschikbare methodes.

Cultuurschok

Op zoek naar een promotieplek in Europa maar buiten Duitsland solliciteerde Oliver naar een vacature bij Cornelissen. Het onderzoeksgebied klonk interessant, Cornelissen leek sympathiek en de aanstellingsvoorwaarden waren in verhouding uitstekend. Voor zover hij verwachtingen had, dacht hij zeker niet aan verschillen tussen Duitsland en Nederland. Toch bracht zijn komst naar Nederland een cultuurschok met zich mee. De eerste verrassing was dat iedereen, van de bankmedewerker tot de ambtenaar in het stadhuis, vroeg of hij alles goed had aangetroffen en al goed aan het integreren was. Ook hielpen collega's hem snel de Nederlandse taal en de regels van het sociale leven te leren. Hij looft de verdraagzaamheid in Nederland, waar tientallen verschillende culturen op zo'n kleine plek vreedzaam bij elkaar wonen. De drukte van mensen en de geslotenheid van de privatesfeer van de gemiddelde Nederlander zijn echter aspecten waar hij tot op de dag van vandaag

niet aan heeft kunnen wennen.

Ook op de universiteit is er een groot verschil tussen beide landen. Het huidige Nederlandse systeem, dat streeft naar een zachte overgang van school naar universiteit en veel aandacht aan het houden van studenten besteedt, staat in schril contrast met het Duitse systeem, dat nog 'net als vroeger' is: studenten dragen hun eigen verantwoordelijkheid en vanaf het eerste college doceert men 'echte' abstracte wiskunde. In Olivers ogen weerspiegelt dit verschil zich ook in het universitaire gedrag: terwijl het grote gewicht van de titel van *der Herr Professor* in Duitsland een grote afstand tussen hoogleraar en student schept, voelt men zich als promovendus in Nederland behaaglijk door de ongedwongen omgang met elkaar. In het bijzonder had Oliver steeds het gevoel intens persoonlijk begeleid te worden door zijn promotor.

Linker- en rechterweghelft

Tussen het begin van zijn promotietraject en de verdediging ligt een lange weg, die uit twee helften bestond: op de rechterhelft leerde hij de wiskunde te begrijpen en op de linkerhelft leerde hij omgaan met de wiskunde. Wat de rechterhelft betreft had Cornelissen een vooruitziende blik. Hij omschreef aan het begin de methodes die later nodig

bleken te zijn en voorspelde dat Oliver na twee jaar wel eigen ideeën zou ontwikkelen. Aldus geschiedde.

Al wandelend op de linkerweghelft heeft zich een verandering van Olivers houding ten opzichte van wiskunde voorgedaan. Na bijna twee jaar van leren van theorieën en methodes, merkte hij dat het proberen te begrijpen van esthetische samenhangen niet tot resultaten voerde, maar slechts tot vragen over de waarde van wiskunde voor hemzelf. Frustraties over zijn onderwerp, dat moeilijk en zinloos scheen, waren het gevolg. Hij merkte dat hij zich sterker met zijn onderzoek moest identificeren om de nodige energie voor het vinden van resultaten op te brengen. Waar menig ander op zou hebben gegeven, besloot Oliver 'gewoon' dat hij hiernaar zou gaan handelen. Met resultaat. Het lukte om een eerste stelling te bewijzen, hij merkte vervolgens dat het bewijs toch fout was maar was wel weer enthousiast genoeg om door te gaan. Een succesvolle periode van ongeveer een jaar volgde, waarin het grootste deel van het proefschrift opgebouwd werd. Echter, er kwam nog een tweede moeilijke fase: het opschrijven. Het laatste halve jaar noemt Oliver "de (over)werkrijkste periode van mijn leven". Wederom met resultaat, want er ligt nu een prachtig proefschrift. Een mooie afronding van zijn leertijd in Utrecht die hij als zeer waardevol heeft ervaren.

