

Frank den Hollander

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

denholla@math.leidenuniv.nl

Abelprijs 2007

# Srinivasa Varadhan

Op 22 maart 2007 maakte de Noorse Akademie van Wetenschappen en Letteren in Oslo bekend dat zij de Abelprijs voor 2007 had toegekend aan S.R. Srinivasa Varadhan van het Courant Institute of Mathematical Sciences in New York. Varadhan ontving deze onderscheiding “voor zijn fundamentele bijdragen aan de waarschijnlijkheidsrekening en in het bijzonder voor het creëren van een geunificeerde theorie van grote afwijkingen”. De jury noemde Varadhan’s werk van “grote conceptuele kracht en tijdloze schoonheid”.

De Abelprijs is in 2001 ingesteld door de Noorse regering, ter gelegenheid van de tweehonderdste geboortedag van Niels Henrik Abel (25 augustus 1802 – 6 april 1829), en wordt toegekend voor ‘baanbrekend wetenschappelijk werk in de wiskunde’. De Abelprijs heeft de statuus van de Nobelprijs. Eerdere laureaten zijn:

|                            |         |
|----------------------------|---------|
| J.-P. Serre                | (2003), |
| M.F. Atiyah en I.M. Singer | (2004), |
| P.D. Lax                   | (2005), |
| L. Carleson                | (2006). |

De officiële uitreikingsceremonie van de Abelprijs 2007 vond plaats op 22 mei 2007, in de aula van de Universiteit van Oslo, waar Varadhan de prijs ontving uit handen van koning

Harald van Noorwegen. Op 23 mei gaf Varadhan zijn Abel Lecture, gevolgd door lezingen van G.C. Papanicolaou, T. Lyons en O. Zeitouni, die verschillende aspecten van zijn werk belichtten.

Details over de Abelprijs zijn te vinden op <http://www.abelprisen.no/en>, details over het leven van Abel op <http://nl.wikipedia.org/wiki>. Bijzonder lezenswaardig is de Abel biografie: A. Stubhaug, *Niels Henrik Abel and His Times: Called Too Soon by Flames*, Springer, 2000. Hierin wordt niet alleen een beeld geschetst van het korte, intense en wiskundig zeer produktieve leven van Abel, maar ook een indruk gegeven van de tijdgeest waarin Abel leefde, zowel in Noorwegen als in Duitsland, Engeland en Frankrijk.

Op 27 maart 2008 werd bekend dat

de Abelprijs 2008 is toegekend aan J.G. Thompson and J. Tits “voor hun diepe bijdragen aan de algebra en in het bijzonder het vormgeven van de moderne groepentheorie”.

## De theorie van grote afwijkingen

De theorie van grote afwijkingen beschrijft de kans dat het *empirische gemiddelde* van een groot aantal stochastische variabelen (dat wil zeggen hun som gedeeld door hun aantal) significant afwijkt van hun *theoretische gemiddelde* (dat wil zeggen het gemiddelde van hun kansverdeling). Het is daarmee een theorie die inzicht geeft in afwijkingen van *de wet van de grote aantallen*, het werkpaard van de waarschijnlijkheidsrekening. In haar diepste kern is de theorie een vergaande veralgemenisering van het *principe van Laplace*, dat gebruikt wordt voor de asymptotische analyse van integralen van functies die van een of meer parameters afhangen en zeer scherp gepiekt zijn. Haar basis ligt echter in de statistische fysica en dateert van eind 19e en begin 20e eeuw (L. Boltzmann, J.W. Gibbs, A. Einstein). Latere ontwikkelingen, in de periode 1930–1960, kwamen uit de verzekerings-



Illustratie: Ryu Tajiri

wiskunde en uit de statistiek (F. Esscher, H. Cramér, I.N. Sanov) en, in de periode 1960–1970, andermaal uit de statistische fysica (O. Lanford, D. Ruelle). Varadhan dient echter te worden beschouwd als de architect-bouwmeester van de theorie.

Aanvankelijk concentreerde Varadhan zich op het gedrag voor korte tijd van oplossingen van elliptische differentiaalvergelijkingen (DV'en) voor warmtegeleiding [14], [15]. Hij liet zien dat dit gedrag beschreven kon worden met behulp van Brownse beweging en wel door een *atypisch deel van de padenruimte* van Brownse beweging. Met andere woorden, het zijn juist zeldzame in plaats van typische paden die in de beschrijving domineren. Deze eerste stap bleek een centrale bouwsteen te zijn voor de latere ontwikkeling van de theorie van grote afwijkingen. In de jaren 1970–1985 heeft hij, samen met M.D. Donsker, die eerste stap uitgewerkt tot een coherente en zeer algemene methode om het *atypische gedrag van stochastische processen* te beschrijven, in het bijzonder Markovprocessen [3].

Aan elke afwijking van het typische gedrag van het proces wordt een zekere kostwaarde toegekend (kostwaarde = minus de logaritme van de kans), beschreven met behulp van een zogenaamde *entropiefunctie* (= een functie die als het ware de afstand tot het typische gedrag aangeeft). Het centrale concept van de theorie, genaamd het *grote afwijkingen principe*, heeft een analogie met zwakke convergentie van maten die centraal staat in de integratietheorie en is derhalve bij uitstek geschikt voor het bestuderen van *gemiddelden van functionalen van het proces*. Immers, het proces zal onder gegeven randvoorwaarden steeds voor die afwijking kiezen die *optimaal* is in een 'kosten-versus-baten' optimalisatie. Deze optimalisatie wordt beschreven door wat heet *Varadhan's Lemma*. Dit lemma drukt het asymptotische gedrag van gemiddelden van functionalen van het proces, als functie van onderliggende parameters, uit in een *variationele formule*, wat de theorie van grote afwijkingen direct verbindt met de variationele analyse. Afhankelijk van de gekozen functionaal zien vertrouwde entropiefuncties het licht, zoals de *Shannon-entropie* uit de informatietheorie en de *Kolmogorov-Sinai-entropie* uit de ergodentheorie.

Het bleek essentieel om een *oneindig-dimensionaal* perspectief te kiezen, dat wil zeggen een zo ruim mogelijke jasje te nemen voor de berekeningen. Dit leidde tot het beschouwen van het *empirische proces* geassocieerd met het pad (dat wil zeggen het pad gemiddeld over zijn verschuivingen in de tijd),

dat alle relevante informatie over het pad in zich bergt. Hieruit kunnen op hun beurt lagerdimensionale observabelen, zoals het empirische gemiddelde van het pad (dat wil zeggen de gemiddelde waarde gemeten langs het pad), worden afgeleid via wat heet het *contractieprincipe*. Dit samenspel leidde uiteindelijk tot de oplossing van zeer diepe problemen, waaronder een vermoeden van M. Kac en M. Luttinger omtrent het asymptotische gedrag van de omgeving van een Brownse beweging [4] (de 'Wiener Sausage') en het discrete analogon daarvan voor een stochastische wandeling op een rooster [5]. Dit werk leidde op zijn beurt tot een beter inzicht in de



Srinivasa Varadhan (copyright: Cheryl Sylvant, the Abel Prize, the Norwegian Academy of Science and Letters)

spectrale eigenschappen van stochastische Schrödingeroperatoren. Donsker en Varadhan gaven voorts een asymptotische oplossing van het polaronmodel [6], een probleem uit de vastestoffysica waarbij aan het pad van een Brownse beweging een zelf-attractie wordt toegekend. Varadhan gaf ook nog een constructie van een twee-dimensionale maat voor polymeren [16], genoemd naar S. Edwards, dat als een vroeg voorbeeld uit de zogenaamde constructieve veldentheorie dient te worden aangemerkt.

De theorie van grote afwijkingen vindt niet alleen toepassing in deelgebieden van de wiskunde en de fysica, maar ook in tal van andere disciplines, waaronder informatica, computationele scheikunde, moleculaire biologie, medische statistiek, econometrie en logistiek. De grote bijdrage van Varadhan is dat hij losse ideeën wist samen te brengen en wist om

te vormen en uit te breiden tot een coherente, krachtige en zeer algemene theorie. Aan de toepassingen heeft hij vervolgens ruimschoots bijgedragen, zoals hierboven al werd omschreven en zoals hieronder nog zal blijken uit de beschrijving van zijn overige bijdragen aan de waarschijnlijkheidsrekening. Voor een overzicht van de theorie van grote afwijkingen zij de lezer verwezen naar de boeken van Varadhan [17], Deuschel en Stroock [2], Dembo en Zeitouni [1] en den Hollander [8].

Hieronder volgt een korte beschrijving van drie andere gebieden waaraan Varadhan fundamentele bijdragen heeft geleverd. Elk van deze bijdragen is op zijn beurt sterk beïnvloed door zijn werk aan grote afwijkingen.

### Stochastische analyse

De theorie van *diffusieprocessen* vindt zijn oorsprong in het werk van P. Lévy in de jaren 1930 en K. Itô in de jaren 1940. In de jaren 1970 heeft Varadhan, samen met D.W. Stroock, deze theorie een nieuwe toegang gegeven door diffusies te karakteriseren via wat zij noemen *het martingaalprobleem* [12]. Hierbij worden diffusies beschreven als zwakke oplossingen van stochastische differentiaalvergelijkingen, die zo gekozen worden dat een grote klasse van functionalen van de diffusie de martingaleigenschap hebben, dat wil zeggen hun verwachtingswaarde in de toekomst gegeven hun verleden is precies hun waarde in het heden. Deze aanpak maakte een zeer sterke veralgemenisering mogelijk, waardoor kon worden bewezen dat een grote klasse van Markovketens in de zwakke zin convergeren naar diffusieprocessen, na geschikte schaling in ruimte en tijd (een vorm van de centrale limietstelling). Tevens konden *homogeniseringseigenschappen* voor diffusieprocessen met sterk in de ruimte en tijd variërende coëfficiënten worden afgeleid. Thans behoort de martingaalmethode tot het standaardarsenaal van de stochastische analyse. In het bijzonder is ze van belang voor de constructie van *maatwaardige diffusies*, oneindig-dimensionale Markovprocessen die een centrale rol spelen in de populatiedynamica, in de jaren 1980 en 1990 ontwikkeld door D. Dawson, E.B. Dynkin en S. Watanabe.

Het werk van Stroock en Varadhan leidde verder tot een precieze beschrijving van de *drager* van diffusieprocessen, dat wil zeggen de drager van de maat op de padenruimte. Deze drager wordt gekarakteriseerd als de afsluiting van een familie van oplossingen van deterministische DV'en, waardoor continuïteitseigenschappen van oplossingen van stochas-



Copyright: Scampix, the Abel Prize, the Norwegian Academy of Science and Letters

Varadhan ontvangt de Abelprijs uit handen van koning Harald van Noorwegen. Bij de prijs hoort een geldbedrag van 6 miljoen Noorse kronen (755.000 euro).

tische DV'en onder toevoeging van ruis kunnen worden bewezen. Dit was een eerste stap in de richting van de later ontwikkelde *Malliavin calculus*, door P. Malliavin in de jaren 1980.

### Wanordelijke diffusie

De Brownse beweging en de stochastische wandeling zijn ruimtelijk homogene processen, dat wil zeggen hun overgangskansen hangen niet af van hun plaats. Een *stochastische wandeling in een stochastische omgeving* is een variant waarbij de overgangskansen eerst zelf *stochastisch* worden gekozen, waarna de wandeling evolueert door gebruik te maken van deze overgangskansen, die als het ware zijn ingevroren. Dit model is in de jaren 1970 door F. Spitzer ingevoerd en het wordt onder andere gebruikt bij de beschrijving van transport in wanordelijke materialen, zoals elektrische stroom in legeringen en het vloeien van olie in poreus gesteente. Doel is het bewijzen van *homogeniseringseigenschappen*, dat wil zeggen laten zien dat het ruimte-tijd schalingsgedrag van de wandeling niet afhangt van de realisatie van de stochastische omgeving, maar slechts van de kansverdeling ervan, en te identificeren wat dit schalingsgedrag precies is (in het bijzonder diffusief, subdiffusief of superdiffusief). In dimensie 1 is het probleem in de jaren 1970 en

1980 opgelost door F. Spitzer, H. Kesten en Ya. G. Sinai. Maar in dimensies  $\geq 2$  is het een zeer taai probleem gebleken, met belangrijke bijdragen in de jaren 1990 door J. Bricmont, A. Kupiainen en G. Lawler en in de jaren 2000 door E. Bolthausen, A.-S. Sznitman en O. Zeitouni. Varadhan [18] bevat een analyse van de grote afwijkingen, die ook hier weer een centrale rol spelen. Voor een samenvatting zij de lezer verwezen naar de overzichtsartikelen van Zeitouni [20] en Sznitman [13].

De bestudering van een stochastische wandeling in een stochastische omgeving vraagt om een geheel nieuwe aanpak in vergelijking met de analyse van ruimtelijk homogene processen. Begin jaren 1980 introduceerde Varadhan, samen met G.C. Papanicolaou, het concept *omgeving gezien vanuit de wandeling*. Dit concept, dat door S. Kozlov onafhankelijk werd ingevoerd en dat een grote rol speelde bij Varadhan's werk aan hydrodynamische schaling (zoals hieronder beschreven), bracht het gebied een grote sprong verder. De reden is dat het omgevingsproces van de wandeling een oneindig-dimensionaal Markovproces is waaruit de ruimte-tijd schaling van de wandeling direct kan worden afgelezen. Essentieel daarbij is om voor dit omgevingsproces een (voor de evolutie) invariante kansmaat met geschikte eigenschappen te vinden. Dit werd bereikt in werk van Varadhan

met C. Kipnis [10], waarin een zeer algemene centrale limietstelling voor additieve functionalen van reversibele Markovprocessen wordt afgeleid, gebruikmakend van het omgevingsproces en van spectraaltheorie. Dit werk legde de basis voor een groot aantal toepassingen.

Het continue analogon van het probleem is een diffusieproces met een ruimtelijke ruis, dat wil zeggen de diffusieoperator hangt op een stochastische wijze af van de plaats. Dit blijkt iets toegankelijker dan het discrete probleem.

### Hydrodynamische schaling

De heilige graal van de statistische fysica is het *macroscopisch* gedrag van veeldeeltjes-systemen te verklaren uit de *microscopische* interactiewetten, zowel in als uit evenwicht. Vele wetten van de statistische fysica zijn een direct of indirect gevolg van de wet van de grote aantallen. Met behulp van de theorie van grote afwijkingen kan worden beschreven wat de kans is dat een systeem fluctuaties vertoont op een *mesoscopische* schaal, die interpoleert tussen de microscopische en de macroscopische schaal. Dit blijkt een belangrijke sleutel bij de bestudering van het gedrag van grote systemen.

*Hydrodynamische vergelijkingen* zijn deterministische differentiaalvergelijkingen die de evolutie van *behouden* grootheden beschrijven, zoals massa, impuls en energie. Op een mesoscopische schaal zijn de evolutievergelijkingen van het systeem in het algemeen niet gesloten. Varadhan's belangrijkste bijdrage, gestart in werk eind jaren 1980 met M.Z. Guo en G.C. Papanicolaou [7], bestond er in om aan te tonen dat mesoscopische gemiddelden van een grote klasse van observabelen zeer goed kunnen worden benaderd door functies van behouden grootheden. Voor grote systemen treedt er daarmee een *scheiding* op tussen de snel variërende microscopische observabelen en de langzaam variërende mesoscopische variabelen. Over de eerste kan dan worden uitgemiddeld, waarna een effectieve differentiaalvergelijking resulteert voor de laatste. Belangrijke bijdragen werden geleverd door J. Fritz, J. Lebowitz en H. Spohn in de jaren 1980 en door C. Kipnis, C. Landim, S. Olla, F. Rezakhanlou en H.-T. Yau in de jaren 1990. Voor een overzicht van dit gebied zij de lezer verwezen naar de boeken van Spohn [11] en van Kipnis en Landim [9].

De hydrodynamische vergelijkingen zijn universeel van aard, dat wil zeggen ze zien er hetzelfde uit voor een grote klasse van systemen die microscopisch verschillend maar macroscopisch gelijksoortig zijn. De details

van de microscopische interactie manifeste- ren zich via de *transportcoëfficiënten* in de hydrodynamische vergelijkingen. Deze dienen dan ook door de schalingstheorie te worden verklaard en te worden uitgerekend. Uiteindelijk dient de afleiding te geschieden op basis van Newtons's bewegingsvergelijkingen, maar tot nu toe bleek dat helaas te hoog gegrepen. Zodra echter een ruis wordt toegevoegd komt de waarschijnlijkheidsrekening in beeld en kan, voor een geschikte klasse van systemen, de hydrodynamische schaling worden afgeleid. De ruis zorgt er voor dat het ergodische gedrag van het systeem toeganke- lijker is.

Bij de scheiding van variabelen wordt ge- bruik gemaakt van het begrip *lokaal even- wicht*. Dit is een *Gibbsverdeling*, bekend uit de statistische fysica voor evenwicht, waar- van de parameters langzaam variëren over ruimte en tijd. De techniek vraagt om een zeer scherpe controle van fluctuaties, waar- bij de theorie van grote afwijkingen een cen- trale rol speelt. Voor zogenaamde gradient- systemen bleek de theorie goed te ontwikke- len. Voor niet-gradient-systemen bleek de uit- daging enorm veel groter, en een belangrijke sleutel werd gevonden door H.T. Yau [19] door gebruik te maken van het begrip *relatieve en- tropie*.

De hydrodynamische schalingstheorie staat in nauwe wisselwerking met de theorie van deterministische differentiaalvergelijkingen.

Eenzijds gebruikt zij existentie- en uniciteits- resulaten uit deze theorie, anderzijds voedt zij haar door deze resultaten af te leiden uit de schalingseigenschappen van veeldeeltjes- systemen. Hier raakt Varadhan's werk aan dat van de Abellaureaat Peter Lax.

### Korte biografie

Varadhan werd in 1940 geboren in Madras (Chennai) in India en voltooide zijn studie aan Madras University in 1960. Hij promo- veerde in 1963 aan het Indian Statistical In- stitute in Calcutta, bij de beroemde statisti- cus C.R. Rao. De vermaarde russische wiskun- dige A.N. Kolomogorov, grondlegger van de waarschijnlijkheidsrekening, was lid van de promotiecommissie en betitelde Varadhan's proefschrift als 'het werk van een meester'. Na zijn promotie ging Varadhan als postdoc- torant werken aan het Courant Institute in New York. Daar is hij de rest van zijn loopbaan ge- bleven. In 1994 ontving hij de Birkhoff Prize, in 1996 de Leroy Steele Prize, in 2003 een eredoctoraat van de universiteit Pierre et Ma- rie Curie in Parijs en in 2004 een eredoctoraat van het Indian Statistical Institute. Hij is lid van diverse internationale academies, waar- onder de National Academy of Sciences van de Verenigde Staten.

Varadhan is getrouwd en heeft twee zoons. Zijn oudste zoon kwam in 2001 om bij de aan- slag op het World Trade Centre in New York, een gebeurtenis die een diepe schaduw over

zijn gezin heeft geworpen.

Varadhan heeft talrijke promovendi en postdocs begeleid. Door de jaren heen heeft hij zich ook ingespannen voor de wiskunde in organisatorische zin. Zo was hij directeur van het Courant Institute gedurende de perioden 1980–1984 en 1992–1994, editor van de *Annals of Probability* – een van de meest toon- aangevende tijdschriften in de waarschijnlijk- heidsrekening – gedurende de periode 1997– 1999, alsmede lid van diverse internationale adviescommissies. In 2005 was hij lid van het internationale review panel dat EURANDOM beoordeelde.

Varadhan is een zachtmoedige en inne- mende persoonlijkheid, met een milde blik op zijn medemens. Het is een genoegen om met hem te praten en te lachen. Hij is steeds behulpzaam en schijnt een licht uit over zijn collega's. Hij is dol op reizen, muziek en thea- ter. Vrijwel elk jaar keert hij terug naar India en geeft hij lezingen voor jonge wiskundigen.

Varadhan heeft de waarschijnlijkheidsre- kering in haar huidige vorm blijvend bein- vloed. Hij heeft vele nieuwe concepten in- gevoerd, die de oplossing van diepe proble- men mogelijk hebben gemaakt en die een beschrijving van een rijke variëteit aan ver- schijnselen in complexe stochastische syste- men hebben ontsloten. ←

Met dank aan Arnoud van Enter en Frank Redig voor commentaar op de tekst.

### Referenties

- 1 A. Dembo and O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications* (2nd. ed.), Springer, New York, 1998.
- 2 J.-D. Deuschel and D.W. Stroock, *Large Deviations*, Academic Press, London, 1998.
- 3 M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, 'Asymptotic evaluation of certain Markov process expecta- tions for large time', *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975) 1–47 (Part I); 28 (1975) 279–301 (Part II); 29 (1976) 389–461 (Part III); 36 (1983) 183–212 (Part IV).
- 4 M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, 'Asymp- totics for the Wiener Sausage', *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975) 525–565.
- 5 M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, 'On the number of distinct sites visited by a random walk', *Comm. Pure Appl. Math.* 32 (1979) 721– 747.
- 6 M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, 'Asymp- totics for the polaron', *Comm. Pure Appl. Math.* 36 (1983) 505–528.
- 7 M.Z. Guo, G.C. Papanicolaou and S.R.S. Varad- han, 'Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions', *Commun. Math. Phys.* 118 (1988) 31–59.
- 8 F. den Hollander, *Large Deviations*, Fields In- stitute Monographs, Vol. 14, American Mathemat- ical Society, Providence RI, 2000.
- 9 C. Kipnis and C. Landim, *Scaling Limits of Inter- acting Particle Systems*, Grundlehren der math- ematischen Wissenschaften, Vol. 320, Springer- Verlag, Berlin, 1999.
- 10 C. Kipnis and S.R.S. Varadhan, 'Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusion', *Commun. Math. Phys.* 106 (1986) 1– 19.
- 11 H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interact- ing Particles*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.
- 12 D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan, *Multidi- mensional Diffusion Processes*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 233, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- 13 A.-S. Sznitman, 'Random Motions in Random Media', in: *Mathematical Statistical Physics*, Proceedings of the ESF/RDSES Summer School at the Ecole Physique in Les Houches, France, July 2005 (eds. A. Bovier, J. Dalibard, F. Dunlop, A. van Enter and F. den Hollander), Elsevier, Am- sterdam, 2006, Course 4, pp. 219–242.
- 14 S.R.S. Varadhan, 'Asymptotic probabilities and differential equations', *Comm. Pure Appl. Math.* 19 (1966) 261–286.
- 15 S.R.S. Varadhan, 'On the behavior of the funda- mental solution of the heat equation with vari- able coefficients', *Comm. Pure Appl. Math.* 20 (1967) 431–455.
- 16 S.R.S. Varadhan, Appendix to K. Symanzik, 'Eu- clidean quantum field theory', in: *Local Quan- tum Theory* (ed. R. Jost), Academic Press, 1969.
- 17 S.R.S. Varadhan, *Large Deviations and Applica- tions*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 46, SIAM, Philadel- phia, 1984.
- 18 S.R.S. Varadhan, 'Large deviations for random walks in a random environment', *Comm. Pure Appl. Math.* 56 (2003) 1222–1245.
- 19 H.-T. Yau, 'Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models', *Lett. Math. Phys.* 22 (1991) 63–80.
- 20 O. Zeitouni, 'Random walks in random environ- ment', in: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1837, Proceedings of the Probability Summer School in Saint-Flour, France, July 2001 (ed. J. Picard), Springer-Verlag, 2004, pp. 189–312.