

Dirk Tempelaar

Faculteit der Economische Wetenschappen en
Bedrijfskunde
Departement Kwantitatieve Economie
Universiteit Maastricht
Postbus 616
6200 MD Maastricht
D.Tempelaar@ke.unimaas.nl

Wim Caspers

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics
Technische Universiteit Delft
Mekelweg 4
2628 CD Delft
W.T.M.Caspers@tudelft.nl

Onderwijs: Internationale vergelijking van wiskundige vaardigheden

De rol van de instaptoets

Zorg om een niveaudaling van het Nederlandse wiskunde- en rekenonderwijs is een onderwerp dat volop in de belangstelling staat, en dat instellingen van hoger onderwijs heeft genoopt tot het inrichten van reparatieprogramma's. Bijspijkeronderwijs wiskunde en het afnemen van instaptoetsen zijn de bekendste onderdelen van zulke programma's. Uitkomsten van die instaptoetsen verschaffen niet alleen belangrijke informatie aan student en instelling, maar kunnen ook behulpzaam zijn bij het opsporen van de zwakke plek in het Nederlandse onderwijs. In deze bijdrage worden met dat doel de resultaten op instaptoetsen vergeleken van leerlingen met een vwo-opleiding, leerlingen met een internationaal baccalaureaatopleiding, en leerlingen met een buitenlandse opleiding. Dirk Tempelaar is verbonden aan de Universiteit Maastricht als universitair docent, verantwoordelijk voor eerstejaars onderwijs in de wiskunde en statistiek, en bijspijkeronderwijs. Hij heeft deelgenomen aan het NKBW-project als implementatieprojectleider, en aan projecten WebSpijkeren I en II. Wim Caspers is verbonden aan de TU Delft als vwo-docent 'in residence' en aan het Adelbert College in Wassenaar als corrector onderwijs. Hij is lid van de kerngroep van SIGMA en heeft deelgenomen aan het NKBW-project als implementatieprojectleider. Bovendien is hij lid van de Resonansgroep wiskunde.

Binnen een week tijd vonden eind 2007 twee gebeurtenissen plaats die van groot praktisch belang kunnen zijn voor het wiskundeonderwijs op voortgezet en hoger niveau in Nederland. Het uitgebreide verslag van het Programme for International Student Assessment (PISA) 2006 onderzoek van de OESO kwam net op tijd om de, voor Nederland tegenvallende uitkomsten mee te nemen in de laatste week van het parlementaire onderzoek naar de onderwijsvernieuwingen [1]. En vlak daarvoor werd de eerste cyclus van het project Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde (NKBW; zie www.fi.uu.nl/nl/nap/) afgerond met de publicatie van het eindverslag [2]. Het project NKBW is een van de Nationaal Actieplan E-learning initiatieven, uitgevoerd door een groot aantal instellingen uit hoger (HO) en voortgezet onderwijs (VO), die zich richten op aansluitingsproblematiek wiskunde bij de overgang van VO naar HO, of van beroeps- onderwijs naar HO. In het kader van NKBW zijn een heel scala van activiteiten uitge-

voerd: verzamelen en schrijven van wiskundige leerobjecten, het bouwen van de internetportaal Wizmo.nl om die leerobjecten te kunnen ontsluiten, het geven van bijspijker- cursussen wiskunde, het samenstellen en afnemen van diagnostische toetsen en het in de steigers zetten van een wiskundemonitor. In deze bijdrage zal nader worden ingegaan op het aspect van toetsing en de relatie tussen de uitkomsten daarvan en die van het PISA-onderzoek.

PISA 2003 en PISA 2006

In de in 2003 afgenomen internationaal vergelijkende toets van het PISA onderzoek deden Nederlandse vijftienjarigen het behoorlijk goed: hun vaardigheden op het gebied van 'mathematical literacy' behoorden tot de top van de wereld. Die interpretatie is inzet geweest van een aantal discussies (zie bijvoorbeeld [3] en [4]), waarbij vooral aandacht is besteed aan de omstandigheid dat het PISA onderzoek zich richt op wiskundige geletterdheid, en niet op de vaardigheid om wiskunde

zelf te bedrijven. Een andere relativering van de goede Nederlandse uitkomsten is pas recent naar voren gebracht in een studie van het Centraal Planbureau: [5]. Dat onderzoek richt zich op de verdeling van PISA vaardigheidsscores en laat zien dat hoge gemiddelde scores van Nederland een bijzondere oorzaak hebben. Citerend uit de Nederlandse samenvatting van [5]: "Een empirische analyse van de vaardigheidsverdeling laat zien dat Nederland niet tot de beste landen behoort aan de rechterkant van de verdeling. Het gemiddelde Nederlandse vaardigheidsniveau is hoog, maar dit is vooral te danken aan het relatief hoge niveau aan de linkerkant van de vaardigheidsverdeling. De Nederlandse positie daalt als we naar de rechterkant van de vaardigheidsverdeling gaan. Op het allerhoogste vaardigheidsniveau behoort Nederland niet tot de top van de wereld. Dit geldt zowel voor het voortgezet onderwijs als voor het hoger onderwijs." Hierbij staat de linkerkant voor de prestaties van de minst vaardige leerlingen, en de rechterkant voor de prestaties van de meest vaardige leerlingen (de vwo'ers). Geldt deze conclusie al voor de uitkomsten van de PISA 2003, een vergelijkbare analyse op de 2006 uitkomsten zou tot nog sterkere conclusies leiden. Immers, het belangrijkste verschil tussen de 2003 en de 2006 PISA uitkomsten is dat in Nederland, samen met een aantal andere landen als Frankrijk en België, de gemiddelde vaardigheidsniveaus licht dalen (zie ook de discussie daarover gevoerd in het parlementaire onderzoek: [6]). Het bijzondere van die lichte daling in Nederland (en ook België) is dat die volledig is toe te schrijven aan een daling van het niveau van de rechterkant van de verdeling: "...the better performing students did worse in

PISA 2006, while performance among the lower end of the distribution remained broadly unchanged" ([1], p. 320). Aangezien het HO nu juist volledig afhankelijk is van het niveau van leerlingen aan die rechterkant van de verdeling, komt deze constatering van een verslechtering van een toch al weinig gunstige situatie onrustmakend sterk overeen met de uitkomsten van de afnames van instaptoetsen in het HO. In deze bijdrage zullen een tweetal daarvan worden geanalyseerd om een beter beeld te krijgen waar heel specifiek het probleem van het Nederlandse wiskundeonderwijs kan liggen.

Instaptoetsing in het HO

Het gebruik om leerlingen bij de overgang van VO naar HO te toetsen op het niveau van hun wiskundige vaardigheden is niet nieuw; vele instellingen van HO nemen al enige jaren instaptoetsen wiskunde af. In het kader van het NKBW-project (en de sterk daaraan gerelateerde werkzaamheden van de Special Interest Group Mathematics Activities (SIGMA), de brede belangengroep van VO en HO die zich richt op het versterken van wiskundige kennis; zie <http://e-learning.surf.nl/sigma>) zijn initiatieven genomen om die toetsing te standaardiseren. Op die wijze is het mogelijk toetsuitkomsten, naast een signalerende functie naar zowel leerling als instelling, een derde functie te geven: die van maatstaf voor landelijke ontwikkelingen. Bij de vorm te geven wiskundemonitor wordt vooral beoogd een beeld te krijgen van de ontwikkeling van wiskundebeheersing in de tijd. In deze bijdrage staat een andere vergelijking centraal: die van de wiskundebeheersing van leerlingen met een Nederlandse vwo-opleiding met die van leerlingen met andersoortige vooropleidingen. Daartoe is gebruik gemaakt van een instaptoets die eerder is ontwikkeld door de drie technische universiteiten, de 3TU2005 instaptoets [7]. Deze instaptoets is in het kader van het NKBW-project voorgelegd aan instromers van één van de meest internationaal georiënteerde opleidingen van het Nederlandse HO: de bacheloropleidingen bedrijfskunde en economie van de Universiteit Maastricht (UM).

Maastrichtse context: Internationalisering

Internationalisering van het HO heeft in Nederland een grote vlucht genomen bij instellingen die zich in de grensstreek met Duitsland bevinden: omdat het Duitse hoger onderwijs zich wat onttrokken heeft aan vernieuwingsontwikkelingen die zich wel in andere Europese landen hebben voorgedaan,

en daarenboven te kampen heeft met capaciteitsproblemen, is het volgen van een studie in Nederland een aantrekkelijk alternatief voor veel Duitse studenten. Vooral wanneer die studie in de Engelse taal wordt aangeboden en de Duitse student zich dus niet ten opzichte van de Nederlandse medestudent benadeeld weet door een taalbarrière. De UM Faculteit Economie & Bedrijfskunde is een kenmerkend voorbeeld van die situatie: vanaf midden jaren '90 worden alle opleidingen ook Engelstalig aangeboden, terwijl sinds 2001 zelfs de opleidingen enkel in die taal worden aangeboden. Vanaf dat moment bestaat een vrij stabiel aandeel van tweederde van de ongeveer 800 jaarlijkse eerstejaars uit Duitse studenten, voornamelijk afkomstig uit het nabij gelegen Roergebied. Een kwart van de studenten is Nederlands, terwijl de kleine minderheid van overige studenten uit een groot aantal andere landen afkomstig is. Nederlandse en Duitse schoolsystemen verschillen aanzienlijk, zowel in de vakken die onderwezen worden, de manier waarop dit onderwijs plaats vindt, en de wijze van examinering. In de Duitstalige landen wordt wiskunde op twee niveaus onderwezen: basisniveau of 'Grundkurs' en uitgebreid niveau of 'Leistungskurs'. Het bijzondere is dat studenten slechts in een viertal vakken eindexamen ('Abitur') doen: de twee vakken op Leistungskursniveau, en twee van de vakken op Grundkursniveau. Studenten kunnen dus het vak wiskunde op Grundkursniveau doen, maar niet opnemen in hun Abitur, waardoor ze in de laatste jaren van hun middelbare school opleiding maar een beperkt aantal uren wiskunde krijgen. Dankzij de Engelstalige opleiding krijgt de UM relatief veel studenten, waaronder ook Nederlandse en Duitse, met een internationale vooropleiding. Ook voor die Internationale Baccalaureaatopleiding (IB) geldt dat er een tweetal niveaus van wiskundeonderwijs zijn: het uitgebreide niveau gericht op technische vervolgoopleidingen (IBMath HL), en het basisniveau gericht op gamma studies (IBMath SL). Tenslotte zijn alle overige studenten, buitenlandse studenten uit een niet-Duitstalig land die geen internationale opleiding hebben genoten, op één hoop gegooid, en is hun gevraagd hun eigen wiskundige vooropleiding in te delen in de categorieën basis (MathMinor) of uitgebreid (MathMajor). Figuur 1 geeft de onderverdeling weer van de 796 eerstejaars studenten die de vragenlijst naar vooropleidinggegevens hebben beantwoord.

3TU-Instaptoets

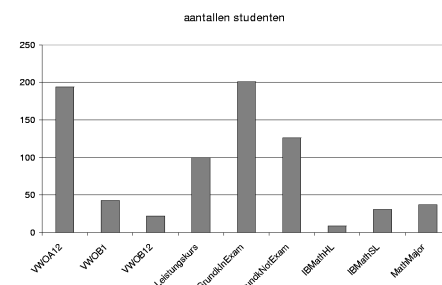
In het kader van het NKBW project is in de

Begrippenlijst

3TU 2005	instaptoets wiskunde van de drie technische universiteiten
HO	hoger onderwijs
IB	Internationale Baccalaureaatopleiding
IBMath HL	uitgebreid niveau wiskundeonderwijs op de IB
IBMath SL	basisniveau wiskundeonderwijs op de IB
NKBW	Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde
OESO	Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling
PISA	Programme for International Student Assessment
SIGMA	Special Interest Group Mathematics Activities
UM	Universiteit Maastricht
VO	Voortgezet Onderwijs

allereerste week van het studiejaar 2007-2008 bij eerstejaars studenten economie en internationale bedrijfskunde UM de 3TU 2005 instaptoets wiskunde afgenomen. Dat staat een vergelijking van de uitkomsten met de 3TU's toe, naast een vergelijking van de kenistoestand wiskunde van studenten met uiteenlopende vooropleidingen, waar we hier op zullen toespitsen. Tabel 1 geeft een uitsplitsing van de UM deelnemers naar vooropleiding, met de aantallen studenten en de gemiddelde score in de instaptoets, waarbij de volgorde in de tabel wordt bepaald door de hoogte van de gemiddelde score in de vooropleidinggroep.

De 3TU instaptoets is wat samenstelling van onderwerpen betreft afgestemd op de Wiskunde B vooropleiding. De toets bevat een vijftal onderwerpcategorieën: algebraïsche rekenvaardigheden, e-macht en logaritme, vergelijkingen, goniometrie, differentiëren en integreren. De categorie goniometrie en het onderdeel integreren uit de



Figuur 1 Aantallen studenten in de verschillende vooropleidingen

Code	Vooropleiding	aantal	score
vwoA12	vwo diploma, met wiskunde op niveau A12	145	37.0%
GrundkursNotExam	Duitse vooropleiding, basiswiskunde, niet in eindexamen	115	40.9%
GrundkursExam	Duitse vooropleiding, basiswiskunde, in eindexamen	184	45.3%
MathMinor	Buitenlandse vooropleiding anders dan Duitstalig, basiswiskunde	25	45.3%
vwoB1	vwo diploma, met wiskunde op niveau B1	33	48.0%
IBMathSL	Internationaal Baccalaureaat, basiswiskunde	24	48.0%
vwoB12	vwo diploma, met wiskunde op niveau B12	17	51.6%
MathMajor	Buitenlandse vooropleiding niet Duitstalig, uitgebreide wiskunde	30	52.4%
IBMathHL	Internationaal Baccalaureaat, uitgebreide wiskunde	9	55.1%
Leistungskurs	Duitse vooropleiding, uitgebreide wiskunde	96	57.9%
Totaal		679	45.4%

Tabel 1 UM-deelnemers aan instaptoets 07/08, uitgesplitst naar vooropleiding, en hun gemiddelde scores

	aantal	Probleem oplossen	Algebra	Algebraïsche expressies	Functies	Afgeleiden	Totaal
MathMinor	25	57%	56%	36%	51%	31%	45%
vwo A1,2	189	76%	56%	24%	66%	44%	51%
GrundkursNotexam	74	74%	62%	34%	56%	40%	52%
GrundkursExam	184	72%	66%	40%	63%	47%	56%
IB (niet gesplitst)	47	74%	69%	43%	68%	47%	59%
vwo B1	61	79%	67%	39%	70%	59%	61%
MathMajor	24	74%	69%	52%	67%	53%	62%
vwo B1,2	29	82%	68%	45%	73%	61%	65%
Leistungskurs	88	80%	76%	55%	74%	61%	68%
Totaal	729	75%	64%	38%	65%	48%	57%

Tabel 2 Scores op de vijf deelgebieden van de instaptoets 06/07, uitgesplitst naar vooropleiding

laatste categorie, vallen buiten het Wiskunde A programma, en dus ook buiten de instroomeis voor de UM-opleidingen. Daarom is de instaptoets afgenomen in een iets gewijzigde vorm: ook als meerkeuzetoets, maar met een extra vijfde optie: onbekend. Dat staat studenten toe om een vraag waarvoor ze onvoldoende voorkennis hebben, onbeantwoord te laten, daar waar in de oorspronkelijke opzet een student wordt gedwongen een beste gok te maken voor het goede antwoord. Bij onze afname zijn de studenten zelfs gestimuleerd om royaal gebruik te maken van de antwoordmogelijkheid 'onbekend', en niet te gokken, om zo het voor het onderwijs belangrijke signaal af te geven dat een onderwerp voldoende aandacht zou moeten krijgen. Om een vergelijking met de toetsuitkomsten van de 3TU's mogelijk te maken, zijn de antwoorden in de categorie onbekend toegerekend aan de an-

dere antwoorden volgens het gokmodel (dus gelijkelijk verdeeld over alle andere antwoordmogelijkheden). Wanneer daarna een vergelijking wordt gemaakt met scores behaald aan de TU-instellingen, dan is onmiddellijk duidelijk dat UM studenten met een B-profiel, dat wil zeggen alle studenten met een uitgebreid wiskundepakket, in dezelfde range scoren als de TU-studenten (1330 studenten uit tien TUD opleidingen scoorden bijvoorbeeld tussen 40% en 68% met een gemiddelde van 49%, acht TUE opleidingen scoorden tussen 49,5% en 64,5%, met een mediaan van 52,7%). Voor studenten met een B-profiel is de beheersing van wiskunde dus kennelijk niet een cruciale factor in de keuze tussen een gamma of bèta vervolgopleiding. Wanneer in Tabel 1 vooropleidingen worden vergeleken, valt op dat zowel op het basisniveau, als op het uitgebreide niveau, vwo'ers

zich in de achterhoede bevinden. Studenten met een buitenlandse/internationale vooropleiding, zowel MathMajor, IBMathHL en heel sterk Leistungskurs, onderscheiden zich positief van studenten van het vwo met een B1-opleiding, en zelfs ook die met een B12-opleiding. En aan de linkerkant van de verdeling: studenten met een Grundkurs, ook als dat geen onderdeel van het Abitur uitmaakt, MathMinor studenten en IBMathSL studenten overtreffen de vwo A1,2 studenten, meestal zelfs in aanzienlijke mate.

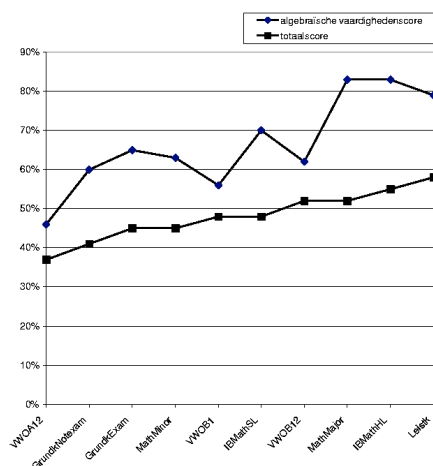
Analyse van de prestaties op deelgebieden

Tabel 3 geeft een overzicht van de toetsprestaties van UM-studenten op ieder van de vijf eerder genoemde deelgebieden. Studenten zijn onderverdeeld naar type vooropleiding. Vooropleidingen zijn geordend op gemiddelde totaalscore op de instaptoets.

Omdat de ordening van vooropleidingen gebaseerd is op gemiddelde totaalscore, is het belangwekkend na te gaan waar de kolommen uit Tabel 3 geen monotone toename laten zien: dat is een signaal dat voor dat onderwerp de rangorde afwijkt. De meer geavanceerde onderwerpen uit de toets, vergelijkingen, goniometrie, en differentiëren en integreren, geven weer dat vwo studenten het daar relatief goed doen. Vooral de vwo B studenten kunnen zich in die onderwerpen goed meten met studenten met buitenlandse of internationale opleidingen, en doorbreken zo het eerder geschetste algemene patroon. Maar als vwo'ers het op die terreinen verhoudingsgewijs goed doen, moet er ook een terrein zijn waar ze het verhoudingsgewijs slecht doen. Dat onderwerp is niet moeilijk te vinden: het onderwerp algebraïsche rekenvaardigheden geeft dramatische prestaties weer voor alle drie vwo categorieën. Zo sterk zelfs dat vwo B1,2 studenten lager scoren dan Grundkurs, MathMinor en IBMathSL studenten! In Figuur 2 is de informatie uit de kolom "Totaal" weergegeven, samen met de

	Algebraïsche Rekenvaardigheden	Vraagstuk 2	Vraagstuk 3	E-macht en logaritme	Vergelijkingen	Goniometrie	Differentiëren en Integreren	Totaal
vwoA12	46%	17%	33%	41%	52%	25%	25%	37%
GrundkNotexam	60%	60%	50%	41%	58%	26%	24%	41%
GrundkExam	65%	71%	54%	48%	62%	27%	28%	45%
MathMinor	63%	65%	57%	42%	59%	33%	32%	45%
vwoB1	56%	31%	46%	50%	61%	36%	39%	48%
IBMathSL	70%	56%	65%	47%	66%	28%	33%	48%
vwoB12	62%	72%	43%	51%	71%	43%	37%	52%
MathMajor	83%	82%	85%	50%	63%	39%	28%	52%
IBMathHL	83%	100%	61%	58%	55%	31%	44%	55%
Leistk	79%	87%	79%	63%	75%	31%	43%	58%
Total	63%	58%	54%	47%	61%	29%	30%	45%

Tabel 3 Scores op de vijf deelgebieden van de instaptoets 07/08, uitgesplitst naar vooropleiding



Figuur 2 Vergelijking totaalscore en score algebraïsche vaardigheden, uitgesplitst naar vooropleiding. Onderste lijn is de totaalscore, bovenste lijn de score op de algebraïsche vaardigheden

informatie uit de kolom algebraïsche vaardigheden.

Het beeld wordt nog duidelijker, wanneer we de prestaties per vraagstuk nader bekijken (zie figuur 3 en 4).

Analyse vraagstuk 3 (2007)

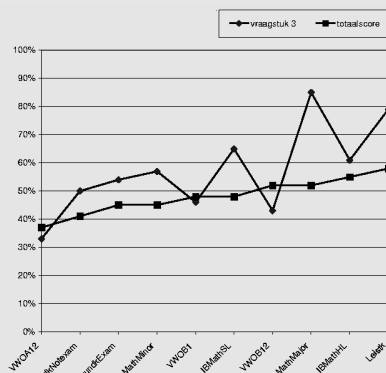
De uitdrukking:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}$$

is gelijk aan

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| a. $\frac{2x}{2x-2}$ | b. $\frac{2x^2}{x^2-1}$ |
| c. $\frac{2x^2}{1-x^2}$ | d. $\frac{2x}{x^2-1}$ |

Figuur 3 specificeert de prestaties naar vooropleiding op deze derde opgave. De verschillen zijn minder extreem dan bij de tweede opgave, maar desondanks fors.



Figuur 3 Scores op vraagstuk 3 ten opzichte van totaalscore. De totaalscore is de stijgende lijn.

Instaptoets jaar 06/07

Ook in het academische jaar 06/07 is een instaptoets afgenomen bij de instromende studenten van dezelfde twee studies, zodat na het vinden van de opmerkelijke resultaten in de 07/08 instaptoets, ook deze toets op deelgebieden geanalyseerd is. De instaptoets had een licht andere samenstelling, en was eerder bedoeld als een type 'leermogelijkheidentoets' voor de te geven bijspijkercurus, dan als een brede diagnostische toets; desondanks zijn er veel overeenkomsten tussen de twee instaptoetsen. De instaptoets 06/07 had betrekking op vijf onderwerpen: probleem oplossen, algebra, algebraïsche expressies, functies en afgeleiden. Tabel 2 bevat de scores op de instaptoets, uitgesplitst naar vooropleiding.

Wanneer we de resultaten van de instaptoets 06/07 met die van 07/08 vergelijken, blijkt dat de meeste patronen zich herhalen. Er zijn twee kleine verschillen. De restgroep, opgedeeld in MathMinor en MathMajor, doet het in 07/08 beter dan in 06/07. Oorzaak daarvan lijkt te zijn dat er in 07/08 een relatief grote groep van Belgische studenten in zit, veel groter dan in 06/07, die goed op de instaptoets presteren. Verder was tot 06/07 de groep van studenten met een IB vooropleiding zo klein, dat die niet werd uitgesplitst. In 06/07 was dat voor het eerst een grote, en ook sterk heterogene, groep, hetgeen de reden was om de groep in 07/08 te splitsten in een HL en SL deelgroep (voor 06/07 was de informatie nodig om dat te doen niet beschikbaar). Groepen die inderdaad heel verschillend presteren, wat de heterogeniteit van de IB-groep in 06/07 verklaart. Inspectie van Tabel 2 maakt snel duidelijk dat de categorie 'algebraïsche expressies' dezelfde rol speelt als algebraïsche rekenvaardigheden in de 07/08 toets. Wanneer meer specifiek naar de vragen in het onderdeel algebraïsche expressies wordt gekeken, is ook op itemniveau een herhaling te zien van wat hierboven besproken is voor de 07/08 instaptoets. Twee vragen vallen in het bijzonder op: de tweede en vijfde vraag van dit deelonderwerp: zie Figuur 5 en 6.

Conclusie

Internationale vergelijkingen van kennis- en vaardigheidsniveaus van leerlingen in het middelbaar onderwijs, zoals uitgevoerd door PISA, geven aan dat daar waar Nederlandse leerlingen gemiddeld heel behoorlijk scoren, er door de bijzondere verdeling van die scores toch een groot probleem aanwezig is: de betere leerlingen doen het relatief slecht.

Analyse vraagstuk 2 (2007)

De uitdrukking:

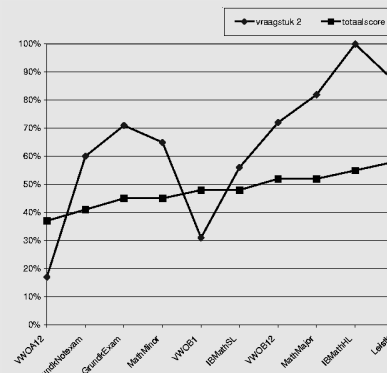
$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$$

is gelijk aan

- | | |
|-----------------------|---------------------|
| a. $\frac{x}{1-x}$ | b. $\frac{1}{2x-1}$ |
| c. $\frac{-x}{-2x+1}$ | d. $\frac{x}{x-1}$ |

De derde antwoordoptie van meerkeuzevraag 2 vertegenwoordigt een heel intuïtieve oplossingsstrategie: laat de kwadratische term in teller en noemer van de breuk tegen elkaar wegvallen, zodat enkel de lineaire termen en constante overblijven. Hoe naïef die oplosstrategie ook is, studenten met zowel vwo A1,2 als vwo B1 vooropleiding kiezen er massaal voor. Zo massaal, dat de grafiek die de prestaties van de verschillende opleidingsgroepen weergeeft, Figuur 4, met een verticale schaal moet worden getekend die afwijkt van de eerder gepresenteerde totaalgrafiek.

Opmerkelijk genoeg gaat de heel lage goedscore van vwo A1,2 en B1 studenten gepaard met een 'onbekend' score van nagenoeg nul: iedereen denkt deze leerstof te beheersen (of vindt dat dit het geval zou moeten zijn). Meer dan enig ander vraagstuk, lijkt Vraagstuk 2 een aanwijzing te geven waar het probleem van het wiskundeonderwijs op vwo A en B1 zich het duidelijkst manifesteert: in de vaardigheid concepten toe te passen die in de onderbouw onderwezen worden, met als gevolg dat studenten meer geavanceerde concepten wel oppikken, maar in problemen komen bij toepassingsvraagstukken waar ook basale rekenstappen in voorkomen.



Figuur 4 Scores op vraagstuk 2 ten opzichte van totaalscore. De totaalscore is de stijgende lijn.

Analyse vraagstuk 2 (2006)

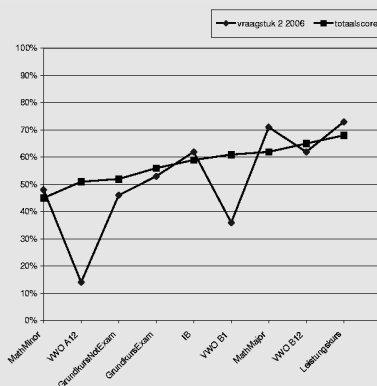
Vereenvoudig de volgende breuk zo ver mogelijk:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

wordt:

- a. $\frac{-1}{2x+1}$ b. $1-x$
 c. $\frac{x-1}{x+1}$ d. $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$

De vraag is nagenoeg een kopie van de vraag nader bekeken in de 07/08 instaptoets, waarbij hier de vraag eigenlijk nog eenvoudiger is gemaakt, omdat antwoordalternatief (d) de aanwijzing geeft hoe de breuk te herschrijven is. Desondanks kiest een heel groot deel van vooral de vwo A1,2 populatie, maar ook vwo B1, voor het antwoordalternatief (a), waarbij men in teller en noemer de gelijke kwadratische termen tegen elkaar laat wegvallen. Een fout die in veel minder sterke mate wordt gemaakt door studenten met een buitenlandse/internationale opleiding.



Figuur 5 Scores op vraagstuk 2 ten opzichte van totaalscore. De totaalscore is de stijgende lijn.

Het zijn juist die betere leerlingen die de instroom voor het hoger onderwijs vormen, hetgeen de ratio verklaart van bijspijkeronderwijs wiskunde dat instellingen van HO al een aantal jaren verzorgen. In het kader van dat bijspijkeronderwijs worden bij veel instellingen brede, diagnostische instaptoetsen afgenomen. Geconstateerde uitval op die toetsen wordt gebruikt voor de inrichting van bijspijkeronderwijs. In deze bijdrage is daar een aspect aan toegevoegd, mogelijk gemaakt door diezelfde instaptoetsen af te nemen aan een groep van studenten met een grote diversiteit aan vooropleidingen. Uit een analyse van de uitkomsten blijkt dat vwo leerlingen in het bijzonder tekort schieten in algebraïsche basisvaardigheden, terwijl ze daarentegen meer geavanceerde wiskundige onderwerpen relatief beter beheersen. Kennis van deze relatieve sterktes en zwaktes lijkt van belang bij de vernieuwing van het wiskundeonderwijs die aanstaande is.

Analyse vraagstuk 5 (2006)

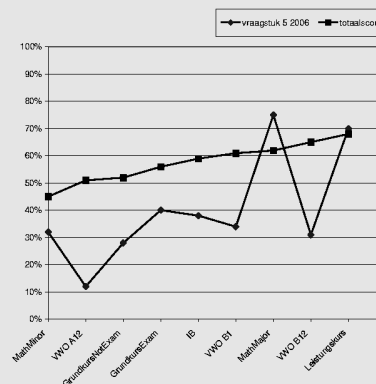
De uitdrukking:

$$\frac{x+2}{x+3} - \frac{x}{x-2}$$

is gelijk aan

- a. $\frac{3x-4}{(x+3)(x-2)}$ b. $\frac{2}{(x+3)(x-2)}$
 c. $\frac{-3x-4}{(x+3)(x-2)}$ d. geen van deze opties

Het bijzondere van het tweede vraagstuk is dat ook vwo B1,2 studenten hierdoor in de problemen worden gebracht; enkel studenten uit de groepen MathMajor en Leistungskurs hebben er geen moeilijkheden mee.



Figuur 6 Score vraagstuk 5 ten opzichte van totaalscore. De totaalscore is de stijgende lijn.

Referenties

- 1 'PISA 2006, Science Competencies for Tomorrow's World', OECD, Parijs, 2007. www.oecd.org
- 2 L. van Gastel, H. Cuypers, V. Jonker, E. van de Vrie, P. van der Zanden (red.) *Eindrapport Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde*, Amsterdam: Consortium NKBW, 2007. www.fi.uu.nl/nl/nap
- 3 T. Dekker, K. Lagerwaard, J. de Lange, G. Limpens & M.M. Wijers, *WISKUNDIGE geletterdheid volgens PISA — Hoe staat de vlag erbij? 1*. Analyse, Freudenthal Instituut-PISA/Citogroep, Utrecht/Arnhem, 2006
- 4 D. Tempelaar, 'Onderwijzen of bijspijkeren?', *Nieuw archief voor wiskunde*, **8**(1), 55–59, 2007. www.math.leidenuniv.nl/~naw/series/deelo8/mrt2007/tempelaar.pdf
- 5 B. Minne, M. Rensman, B. Vroomen, D. Webink, 'Excellence for productivity?', CPB, Den Haag, 2007. www.cpb.nl/nl/pub/cpbreeksen/bijzonder/69
- 6 *Parlementaire onderzoekscommissie Onderwijsvernieuwingen* (2008), eindrapport, Den Haag, Tweede Kamer der Staten-Generaal, www.tweedekamer.nl/images/kst113842.8s.tcm118-149847.PDF
- 7 Werkgroep 3TU (2006), 'Aansluiting vwo en Technische Universiteiten', *Euclides*, **81**(5), maart

3TU instaptoets 2005

1. $\frac{10}{(3)^{-2}}$ is gelijk aan
a. 900 b. 0,9 c. $\frac{10}{\sqrt{3}}$ d. 90
2. $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$ is gelijk aan
a. $\frac{x}{1-x}$ b. $\frac{1}{2x-1}$ c. $\frac{-x}{-2x+1}$ d. $\frac{x}{x-1}$
3. $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}$ is gelijk aan
a. $\frac{2x}{2x-2}$ b. $\frac{2x^2}{x^2-1}$ c. $\frac{2x^2}{1-x^2}$ d. $\frac{2x}{x^2-1}$
4. $p^{\frac{3}{8}}$ is gelijk aan
a. $(\sqrt[3]{p})^8$ b. $(\sqrt{p^3})^8$ c. $\frac{1}{p^{\frac{8}{3}}}$ d. $\sqrt[8]{p^3}$
5. $\sqrt[3]{-8a^6b^{-3}}$ is gelijk aan
a. $\frac{-2a^3}{b}$ b. $\frac{-2a^2}{b}$ c. $\frac{-8a^2}{b}$ d. $\frac{8b}{a^2}$
6. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$ is gelijk aan
a. $\frac{^{10}\log 5}{^{10}\log 3}$ b. $\ln \frac{5}{3}$ c. $\ln 2$ d. $\ln 5 - \ln 3$
7. $e^{-2\ln a}$ is gelijk aan
a. $a^{-\frac{1}{2e}}$ b. $a^{\frac{1}{2e}}$ c. $-a^2$ d. $\frac{1}{a^2}$
8. $\ln(e^3 - e^2)$ is gelijk aan
a. $\frac{3}{2}$ b. $2 + \ln(e-1)$ c. $\ln e$ d. $2 - \ln(e-1)$
9. De oplossing van de vergelijking $\ln x = -2$ is
a. $-\frac{1}{e^2}$ b. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ c. $\frac{1}{e^2}$ d. $(-e)^2$
10. De oplossing van de vergelijking $e^{2x} = 4$ is
a. $\ln 16$ b. $\ln 2$ c. $\ln \sqrt{2}$ d. $-\ln 2$