Willem Uittenbogaard
Freudenthal Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 9432
3506 GK Utrecht
willemub@fi.uu.nl

Onderwijs

Geen catechismus leren, maar nadenken

Hoe berekenen we 345 × 729? Steeds minder basisschoolleerlingen leren nog hoe ze dit uit kunnen rekenen. Voor een dergelijk gruwelvoorbeeld worden zij naar de rekenmachine doorverwezen. Aldus Willem Uittenbogaard, auteur van dit artikel. Het recent door de CITO uitgevoerde PPON-onderzoek heeft aangetoond, dat de vaardigheden van snel en foutloos rekenen sterk omlaag zijn gegaan. Waar Hans Freudenthal nog voor het inzichtelijk oefenen van algoritmen pleitte, is men inmiddels verder: het toepassen van een algoritme is geen wiskunde. Sinds de jaren tachtig zijn systematisch steeds meer nieuwe methoden zoals de 'hapmethode' in het rekenonderwijs op school geïntroduceerd om kinderen handig te leren rekenen. In het juni 2007-nummer heeft Jan van de Craats, hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit, deze praktijk aan de kaak gesteld.

Willem Uittenbogaard, medewerker van het Freudenthal Instituut, geeft al 37 jaar op een pabo les en werkt daar zowel met kinderen als studenten en stoort zich aan de kritiek van Van de Craats. In dit artikel bespreekt hij de door Van de Craats aangehaalde voorbeelden vanuit zijn eigen perspectief. Moet 345 × 729 tot de gruwelvoorbeelden worden gerekend?

De titel van dit artikel is een citaat uit een recensie van het proefschrift van Jan de Lange (1987), geschreven door Jan van de Craats. Deze recensie stond in de NRC van 20 oktober 1987 met de titel 'Het nut van de wiskunde'. De inhoud van het toen nieuw in te voeren vak Wiskunde A vatte hij samen door 'Geen catechismus leren maar nadenken' (zie figuur 1). Dit artikel is een reactie op 'Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen' in dit blad (juni 2007). De ondertitel van zijn bijdrage luidt: Mythen in de rekendidactiek.

Er zijn vele aanleidingen om op dit artikel te reageren. Het bestek van dit stuk is te kort om op alle beweringen uitvoerig in te gaan. Ik zal in mijn bijdrage nogal eens verwijzen naar andere publicaties. De voornaamste aanleiding ligt misschien wel in de titel van dit artikel. Van de Craats heeft na 20 jaar de steven 180 graden gewend: Eerst de catechismus leren, het nadenken komt later.

Twintig jaar geleden schreef Van de Craats in genoemde recensie: “Het revolutionaire van Wiskunde A is de invalshoek vanwaaruit onderwerpen worden benaderd. Steeds vanuit concrete, alledaagse problemen die je 'met je gezonde verstand' kunt oplossen. Misschien is de nadruk op het gebruik van het gezonde verstand en het ontwikkelen van een kritische houding wel het meest essentiële van Wiskunde A. Geen catechismus leren, maar nadenken.”

Van de Craats werpt zich in zijn artikel op als voorstander van het gebruik van onze traditionele cijferalgoritmen, en tegen het zogenaamde kolomsgewijs rekenen. Ook heeft hij een hekel aan het woord gecijferdheid, want dat is volgens hem niets anders dan rekenvaardigheid. Op deze drie punten zal ik mij vooral richten. Ook zal ik ondertussen proberen zijn Mythen anders te formuleren. Laten we maar eens aan het eind van zijn artikel beginnen. Daar komt Van de Craats met aanbevelingen:

Hoe leren Daan en Sanne weer rekenen?

- Herstel systematisch oefenen in ere.
- Eén methode per bewerking (het traditionele cijferalgoritme).
- Doe 'handig rekenen' de deur uit.
- Verbied 'kolomsgewijs rekenen'.
- ... en noem cijferen weer gewoon rekenen.

Leren met inzicht

In de wiskunde en dus ook in het wiskundeonderwijs is het zoeken naar patronen, regelmatigheden, regels, verkortingen en ook algoritmen essentieel. Hoe korter of vlugger, hoe beter. Daar is natuurlijk niets op tegen. Dat is in mijn ogen ook de zoektocht die we met alle kinderen, zowel in het basisonderwijs als in het voortgezet onderwijs zouden moeten gaan. Met alle kinderen! Ieder naar zijn of haar vermogen. Zo ver komen als je kunt. Niet met onbegrepen regels. Maar met inzicht.

Twee voorbeelden: bij eerstejaars pabostudenten schrijf ik op het bord:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} =$$

en vraag studenten om dat op te lossen. Er zijn er altijd wel een paar die roepen: gelijknamig maken. En zo komt er op het bord:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{10}{15} \times \frac{12}{15} = \frac{120}{15} = 8.$$

(Dat '= 8' voeg ik er meestal aan toe).

Bij het stemmen over het al dan niet juist zijn van dit antwoord is altijd ongeveer de helft vóór. Nogal wat studenten twijfelen aan hun antwoord van $8/15$. Dat lijkt zo simpel. Dat kan niet goed zijn. Daar sta je dan als opleider. Ook mijn: 'hoeveel zou $2/3$ van 80 cent zijn?', helpt weinig studenten verder.

Ann Dowker (1992) legt een stuk of tachtig wiskundigen kale schatsommen voor. Bijna alle geïnterviewden passen toe wat Van de Craats een hapsnapmanier noemt. Vrijwel niemand gebruikt een traditioneel algoritme. Een half jaar later legt ze de helft van haar onderzoeksgroep nog een keer dezelfde problemen voor. Iedereen doet het weer hapsnap, maar een groot deel van de groep gebruikt een andere strategie. Is dit exclusief voorbehouden aan wiskundigen? Heb je dan een hogere status bereikt op latere leeftijd? Of zou dat onderwijsfilosofie moeten zijn voor álle kinderen? Ongeacht hun leeftijd?

Onze traditionele cijferalgoritmen voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen hebben hun uiteindelijke vorm gekregen in de zeventiende eeuw als ultieme verkortingen, vooral ten behoeve van de handel. Een eeuw geleden hebben we die algoritmen onderwerp gemaakt van ons onderwijs. Met het oog op later ...

Verschillen

Wat is nu precies het verschil tussen cijferen en rekenen? Cijferen is een van de strategieën die je kunt inzetten om een rekenkundig of wiskundig probleem op te lossen. Laten we als voorbeeld nemen: $27 \times 37 = \ldots$ Dat doen Van de Craats en ik met ons hoofd. Niet uit ons hoofd. Dan doe je een beroep op je geheugen. Maar met ons hoofd. Die 37 licht op, als het ware. Dat is wel geheugen. We weten dat $3 \times 37 = 111$, en dus is 27×37, $9\times$ zoveel: 999. Veel andere mensen moeten dat met een algoritme oplossen. Dat moet je op voorhand goed leren, volgens het betoog van Van de Craats.

Gezond verstand

De inhoud van Wiskunde A voor het vwo kan in vaktermen beschreven worden: differentiëren, optimaliseren, vectoren, matrices, lineair programmeren, kansrekening, statistiek, grafische voorstelling en automatische verwerking van gegevens. Maar je kunt die onderwerpen op allerlei manieren behandelen. Het revolutionaire van Wiskunde A is de invalshoek van waaruit ze worden benaderd. Steeds vanuit concrete, alledaagse problemen die je in principe 'met je gezonde verstand' kunt oplossen. Misschien is de nadruk op het gebruik van het gezonde verstand en het ontwikkelen van een kritische houding wel het meest essentiële facet van Wiskunde A. Geen catechismus leren, maar nadenken.

Figuur 1 Van de Craats' beschrijving van het vak Wiskunde A uit: 'Het nut van de wiskunde', *NRC-Handelsblad*, 20 oktober 1987

Hieronder volgen vier nogal paradigmatische voorbeelden van elk van de hoofdbewerkingen. Ze zijn afkomstig uit mijn lange ervaring in het werken met kinderen. Omdat Van de Craats op zijn site eveneens met vier voorbeelden over de hoofdbewerkingen op de proppen komt, is het goed om ze hier te bespreken.

Delen: $80 : 2,75 = ?$

Jan van de Craats lost dat waarschijnlijk op door deeltal en deler te vergroten met een factor 100 en daar het traditionele deelalgoritme op los te laten. Nog een keer hetzelfde probleem: "Juf heeft voor een handenarbeidles stukjes touw nodig van 2 meter 75. Zij heeft een bol van 80 meter. Hoeveel stukken kan zij daaruit halen?"

Bovenstaand probleem komt uit de laatste Cito PPON-peiling einde basisonderwijs 2004. De goedscore van dit probleem is ongeveer 10%. Bedroevend eigenlijk. Ik heb het probleem aan vele kinderen in de basisschool voorgelegd. Alle kinderen die in dit probleem een deling herkenden en begonnen aan $80 : 2,75$, konden dat niet tot een goed einde brengen. Hoe zou Van de Craats hen dat willen leren? Waarschijnlijk toch met nadruk op het deelalgoritme. Hij zegt immers in zijn stuk: "voor elk van de vier hoofdbewerkingen is er één universeel, werkend recept". Was het leven maar zo eenvoudig.

Nu naar de kinderen die het probleem wel konden oplossen: "Jordi zegt: 1 keer is 2,75. 2 keer is 5,5. 4 keer is 11 meter. Dan is 28 keer 77 meter. Eén keer meer is minder dan 80 meter. 29 stukken, dus".

"Eva redeneert als volgt. Ik doe even alsof de juf 90 meter heeft en dat de stukken 3 meter lang zijn". (Oei, denk je dan. In een deling, zowel deeltal als deler veranderen. Dat kan haast niet goed aflopen.) Eva: "Nou, dat zijn dan 30 stukken, maar de stukken zijn niet 3 meter lang, maar 2,75 meter. Dat scheelt dus 30 keer een kwart meter, dat is 7 meter 50. Maar de juf heeft geen 82,50 meter. Dus dan één stuk minder. 29 stukken dus".

Wout redeneert als volgt: "10 stukken is 27,50 meter, 20 stukken is 55 meter, even denken. . .30 stukken is 82,50 meter. Eén stuk minder dus".

Optellen: $7 + 8 = ?$

Ik heb twee jaar in New York (Manhattan) gewerkt en gewoond om daar mee te helpen een nascholingsprogramma rekenen en wiskunde voor leerkrachten basisschool op te zetten. Van de Craats zou zich daar in het Walhalla voelen. Het algoritmeland bij uitstek! Vele malen legde ik kinderen uit groep 3 dit probleem voor. "Weet je hoeveel 7 plus 8 is?" Bijna altijd was hun redenering als volgt: "Ik zet het eerst onder elkaar":

$$\begin{array}{r} 7 \\ \underline{8\ +} \end{array}$$

En dan: "seven plus eight is 15, put down the 5, carry the 1, 1 down: 15". Ik heb natuurlijk heel vaak tegen kinderen "stop" geroepen, halverwege hun liedje. En gevraagd: "Ben je al klaar?" Nee, eerst het liedje afmaken. Het was voor veel kinderen een openbaring, dat je halverwege al klaar was. Je hoeft het 'liedje' niet helemaal af te maken. Sterker nog: helemaal niet af te maken.

Aftrekken: $2003 - 1998 = ?$

Het goede antwoord is 5. $2 + 3 = 5$. Klaar! Niet voor Jan van de Craats en z'n Amerikaanse klasgenoten. Onder elkaar natuurlijk! En lenen bij de buren, die ook niks hebben. Dan maar weer lenen bij hun buren. En nog een keer. Met enig geluk wordt het antwoord 5. "Voor alle bewerkingen één strategie, geen hapsnapmethode", volgens Van de Craats.

Vermenigvuldigen: $200 \times 200 = ?$

Amerikaanse leerlingen zeggen:"Heeft u ook een zakrekenmachine?" Nee, maar kun je het wel oplossen? "Dan heb ik papier en pen nodig". En daar gaan we:

$$\begin{array}{r} 200 \\ \underline{200\ \times} \end{array}$$

0 keer 0, is dat 1 of 0? En dan 0×2? Met alle moeite komt er 40.000 uit. Terwijl je boerenverstand zegt: een 4 met vier nullen, klaar!

De tijd staat niet stil ...

In de afgelopen vijfendertig jaar zijn we bezig geweest om over de positie van het hoofdrekenen en cijferen na te denken. Hoofdrekenen, wat vroeger 'uit' je hoofd rekenen was, heeft plaats gemaakt voor rekenen 'met' je hoofd. Dus eventueel met meer of minder tussenantwoorden. Op papier, als je dat wilt. Er blijft wel een stukje 'uit je hoofd' over, zoals $7 + 8$ en 7×8. Dat zou echt uit het hoofd moeten. Dat moet je memoriseren en oefenen helpt daarbij. Het cijferen, dat we vroeger leerden onder het motto: vlug, foutloos, voor later … heeft z'n betekenis verloren. Er is geen beroep meer waar je dat nog voor zou moeten kunnen. Er is wel veel voor dat leerkrachten basisonderwijs en voortgezet onderwijs die cijferalgoritmen begrijpen en toe kunnen passen. Voor de discussie met Van de Craats en ook als kennis van ons wiskundig erfgoed. Maar het toepassen van een algoritme is geen wiskunde!

Geschiedenis

In de jaren zeventig, in onze zoektochten naar een betere didactiek, hielden we ons al bezig met het cijferen, vooral ook omdat het daar in de basisschool niet al te best mee ging. We waren ook op zoek naar nieuwe inhoud. Toch liet dat traditionele cijferen ons niet los. Al in 1971 verscheen *Cijferen anno 2000*, een leerstofpakket voor de pedagogische akademie, met grote aandacht voor mechanische en elektrische rekenmachines (Goffree e.a., 1971). Olivetti betaalde mee. Het pakket bevatte een voorwoord van Hans Freudenthal. Het zou interessant zijn de hele inleiding hier te citeren. Hieronder maar een heel klein stukje:

"In het algemeen werd in de lagere scholen weinig tijd besteed aan de introductie van een algoritme op inzichtelijk niveau. Het accent kwam te liggen op inoefening van de mechanismen."

In die tijd verscheen er meer literatuur over het cijferen. In 1977 verscheen *Leerplanpublikatie 6: de abacus; over cijferend optellen en aftrekken* (De Jong, 1977). In 1979 verscheen *Leerplanpublikatie 10: cijferend vermenigvuldigen en delen* (Treffers, 1979) en in 1980: *Leerplanpublikatie 11: gevarieerd oefenen* (De Moor, 1980). Die leerplandelen kwamen uit als afleveringen van het Wiskobas-Bulletin. Toen met een oplage van ongeveer 10.000. Ik denk dat Van de Craats ook een abonnement had. Ik kan me z'n ingezonden brieven of blijken van verontrusting niet herinneren. Allemaal in de IOWO-tijd toen Freudenthal de leiding had over het instituut dat nu zijn naam draagt. Nog even dat leerplandeel 11: gevarieerd oefenen. In 'onze' kring (die van rekendidactici aan de pabo's) vinden we net als Van de Craats oefenen heel belangrijk. Maar …, je kunt je ook suf oefenen. Vooral als als je het VdC-recept volgt.

Mythe 2: Leerlingen vinden rijtjes sommen vreselijk. Niks tegen een rijtje met eenvormige opgaven. Maar dat moet wel een specifiek doel dienen en niet zo maar een rijtje zijn. Voor het Amerikaanse onderwijs heb ik mijn bijdrage geleverd met 'kale' rijtjes. We noemen ze daar 'strings', dat kan in het Nederlands niet. Want hier betekent een string iets anders, maar dat heet in Amerika een 'thong' (Uittenbogaard & Fosnot).

Laten we eens een voorbeeld van zo'n rijtje analyseren.

$7 + 7 =$

$7 + 8 =$

$8 + 8 =$

$8 + 9 =$

$6 + 7 =$

$8 + 7 =$

Wat wil je met zo'n rijtje? Kinderen gaan zich realiseren dat je vanuit je kennis van de dubbelen heel eenvoudig de één-keer-meer- of één-keer- minder-strategie kunt ontwikkelen. Dat helpt bij het memoriseren. En als kinderen de kennis van de dubbelen niet paraat hebben? Dan kan een ander rijtje heel goed helpen:

$5 + 5 =$

$6 + 6 =$

$7 + 7 =$

$8 + 8 =$

$9 + 9 =$

Wat kun je hiervan als kind leren? Met twee tegelijk gaat de telrij omhoog. En hoe komt dat zo? Dat kan de leerkracht weer heel mooi koppelen aan een onderzoekje van bijvoorbeeld voetafdrukken van alle kinderen, waar je kunt zien dat je met een linkervoet en rechtervoet van een volgend kind erbij twee omhoog gaat in de telrij. Ook heel belangrijk is om er bij kinderen de nadruk op te leggen, dat je dat soort dingen moet proberen te onthouden. Kinderen weten heel vaak niet wat je zou moeten onthouden en wat niet. Zomaar oefenen is voor een grote groep van kinderen geen reden om wat ook maar te memoriseren. Rijtje af, plaatje en stempeltje van de juf, krul, klaar! Vandaar dat gevarieerd oefenen.

In de jaren tachtig kwamen er rekenwiskundemethoden als *Rekenen en Wiskunde*, *Rekenwerk* en de *Wereld in Getallen* op de markt, die de opbrengsten van al dat onderzoek min of meer vorm gaven in hun methodiek. We werkten ook nog aan het *Beeldplaatproject* (Van Galen & Dolk, 1991). Voorbeelden van leerlinggedrag en lessen in de hoofdbewerkingen. Uit die tijd is ook de 'Ouderavond', een les over delen volgens de 'hapmethode' (Dolk & Uittenbogaard, 1989). Jammer dat Van de Craats van al die ontwikkelingen geen kennis heeft genomen. Het lijkt wel of al die ontwikkelingen in de tijdsspanne 1970 – 2007 aan hem voorbij zijn gegaan.

Bij het tot stand komen van de TAL-brochure: *Kinderen leren rekenen* (Van den Heuvel-Panhuizen, Buijs & Treffers, 1999), hebben we ons nogmaals het hoofd gebogen over dat traditionele cijferen. Dat heeft in die publicatie een nieuw gezicht gekregen: kolomsgewijs rekenen. Algoritmen, die min of meer in de plaats komen van die traditionele algoritmen. Niet naar míjn zin. Nog veel te veel. We zouden met veel minder toe kunnen. Met boerenverstand, met 'rijgen' en het verstandig gebruik van een rekenmachientje hoef je helemaal geen andere of betere algoritmen te leren. Toch kun je dat kolomsgewijs rekenen wel veel na geven. Van links naar rechts: grote happen eerst. Niet tegen de leesrichting in. En vele mogelijkheden tot meerdere of mindere verkortingen. In mijn ogen zeker niet als opstap naar de traditionele algoritmen. Daar maak je het alleen maar moeilijker mee. (Die verwijzing van Van de Craats naar de Arabische notatie raakt kant noch wal. Natuurlijk danken we in onze traditionele cijferalgoritmen de 'van rechts naar links'-werkwijze aan de Arabieren. En dat is voor ons en onze kinderen niet logisch.)

Opa vertelt

Ik zat op een lagere school in een volksbuurt in Amsterdam. Opleidingsschool voor HBS en Gymnasium stond er (en staat er nog, hoewel het gebouw een andere bestemming heeft gekregen) in tegeltjes op de gevel. Ik zat met ongeveer vijftig leerlingen in één klas, drie rijen van dubbel acht of negen. Ik bewaar daar dierbare herinneringen aan. Los van de verveling, die er ook was, de uitdaging. Het was natuurlijk niet eenvoudig om alle kinderen op hun wenken te bedienen. Adaptief onderwijs noemen we dat nu. Wij hadden drie rijen met banken. De raamrij: Koningsburg, de middenrij: Middelburg en de gangrij: Domburg. Zo is het nooit gezegd, maar zo was het wel. Ik heb altijd in Koningsburg gezeten. De kinderen uit Koningsburg mochten wel eens naar buiten kijken. Ik bewaar zoveel dierbare herinneringen aan al mijn meesters en juffen van de basisschool. Juf Oosterwelder om te beginnen, meester Pruis, juffrouw Ruighaver en meester Eijgenbroodt … om er maar eens een paar te noemen. Van hen heb ik al die algoritmen geleerd. Voor later … Van de Craats natuurlijk ook. Dat geldt vast niet voor al mijn en zijn klasgenoten. Jan van de Craats heeft natuurlijk ook altijd in Koningsburg gezeten. En hij denkt dat dat gewoon was of is. Natuurlijk niet! Misschien zitten Daan en Sanne ook wel niet in Koningsburg. Aanleg is jammer genoeg niet erfelijk.

Een beperkt onderzoekje in de basisschool

Alle kinderen in groep 4, die nog geen enkele ervaring hadden met onder elkaar zetten, die ik rekenopgaven als 230 + 140, 234 + 145, maar ook aftrekkingen als 270 - 140 gaf, rekenden altijd van links naar rechts. Soms splitsten ze de getallen, maar lang niet altijd. Altijd rekenend van links naar rechts. Grote happen eerst, de leesrichting volgend. Logisch! Natuurlijk zouden we in de didactiek daarbij aan moeten sluiten. Niet in zijn artikel, maar wel op zijn website (www.science.uva.nl/~craats) geeft Van de Craats voorbeelden van opgaven, waarbij hij de traditionele cijferalgoritmeaanpak vergelijkt met het kolomsgewijs rekenen. Hij noemt zijn voorbeelden gruwelvoorbeelden. Hij geeft er vier, voor elk van de hoofdbewerkingen één. Ik zal ze elk van een kort commentaar voorzien en aangeven wat ik als meester kinderen zou willen leren.

Gruwelvoorbeeld 1: kolomsgewijs optellen
Tekst en opgave: vdC.

$$\begin{array}{l} 78,12 \\ 13,34 \\ 142,57 \\ 92,63 \\ \underline{104,89 \quad +} \end{array}$$

Hier zou ik, zo mogelijk, alle kinderen van de basisschool willen leren hoeveel het ongeveer is. Zeg maar 90 + 140 + 90 + 100 en dan nog wel 10 (1 + 2 + 2 + 4 en de rest) meer. Dus ongeveer 90 + 140 (tussenstand 230) + 90 (tussenstand 320) + 100 (tussenstand 420) + 10: eindantwoord 430. Dat hoeft dus niet onder elkaar. Leer kinderen in zo'n geval op tijd een rekenmachientje te gebruiken. Niemand in deze wereld doet een dergelijke opgave nog met pen en papier. Dus geen tijd inruimen voor het beheersen van een cijferalgoritme (ook niet kolomsgewijs), waarmee deze opgave opgelost kan worden. Wat het nog erger maakt, is dat Van de Craats op zijn site het meest verkorte traditionele algoritme vergelijkt met het minst verkorte algoritme van kolomsgewijs optellen. Ja, zo kan ik het ook! Dat is appels met peren vergelijken! Dan lijkt het wel erg! Hij zou oog moeten hebben voor leerlingen, die het op de meest verkorte wijze kunnen oplossen, naast leerlingen die een paar tussenstappen extra nodig hebben. En dat is wel het gros van de leerlingen. Altijd geweest! Koningsburg is niet zo groot als Van de Craats denkt. (Zie ook PPON, 2005).

Gruwelvoorbeeld 2: kolomsgewijs aftrekken

$$\begin{array}{l} 413,92 \\ \underline{376,75 \quad -} \end{array}$$

Hier zou ik wensen dat alle leerlingen zouden zeggen: $24+13 = 37$. Even de decimalen weglaten en je ziet dat 376 en 413 allebei dicht bij 400 liggen. Vandaar die $24 + 13$. En dat zouden we ze wel moeten leren. Om het zo te doen. Eerst kijken naar de getallen en dan je strategie bepalen. Misschien dat sommige leerlingen ook nog zouden inzien dat $24 + 13$ echt goed is omdat $0,92 - 0,75$ nog een rest oplevert ... Ik weet zeker dat Van de Craats dit oplost door: $24+13+0,17 = 37,17$. Dat hij het zo doet komt door de getallen. Andere getallen, andere strategie. Niet alle leerlingen over één kam scheren en één standaardoplossing klaar hebben (Dowker, 1992).

Gruwelvoorbeeld 3: kolomsgewijs vermenigvuldigen

$$\begin{array}{l} 345 \\ \underline{729 \quad \times} \end{array}$$

Dit is inderdaad een gruwelvoorbeeld. Dat doe je toch met een rekenmachientje. We gaan in deze tijd toch geen twee getallen van drie cijfers algoritmisch vermenigvuldigen.

Wat nog wel kan is een schattende aanpak: de uitkomst ligt in de buurt van de helft van 700×700. $7 \times 7 = 49$. Dus 25 met vier nullen: 250.000. Een kwart miljoen.

Ook hier vergelijkt Van de Craats weer appels met peren. Hij vergelijkt de niet verkorte kolomsgewijze aanpak met het meest verkorte traditionele algoritme.

Gruwelvoorbeeld 4: de hapmethode

$$83218 : 37$$

Weer een voorbeeld met te grote getallen. Natuurlijk is de hapmethode niet zo efficiënt als de staartdeling. Maar deze deling gaat natuurlijk veel eenvoudiger met een rekenmachientje. We kunnen een deel van de kinderen ook nog leren hoe je met een machientje de rest bepaalt. Van de Craats noemt de hapmethode onsystematisch. De bedoeling is juist wel systematisch: grote happen eerst. Hij zegt over de staartdeling dat het een recept is dat iedereen kan leren en begrijpen. Was dat maar waar! Dan was de hierboven geschetste zoektocht van al die jaren niet nodig geweest.

De andere mythen

Terug naar een paar snippers, die er nog liggen. Ten eerste Mythe één: Eerst begrijpen, dan oefenen. Ik heb niks tegen oefenen. Als je de opstelling in zijn artikel voor succesvolle leerprocessen volgt:

- Oriëntering (context, voorbeelden)
- Oefenen, eerst makkelijk, dan iets moeilijker. Geen contexten!
- Verdieping met contexten en voorbeelden
- Meer oefeningen, zonder contexten
- Verdere verdieping, voorbeelden, contexten
- ...

kan ik daar nog aardig in meegaan, al zou ik wel bij stap 2 en 4 de contexten onder handbereik houden. Maar als je de voorbeelden op zijn site of in zijn boek (Basisboek rekenen) ziet, dan lees je toch: eerst catechismus leren, dan nadenken.

Ten tweede Mythe drie: Over het gebruik van meerdere oplossingswijzen. We zouden alle kinderen de gelegenheid moeten bieden hun eigen oplossingswijzen te volgen. Je zou die mogelijkheden voor sommige kinderen misschien wat moeten inperken. Maar niet zo rigide als Van de Craats voorstelt. Hij denkt en gelooft dat alle kinderen die cijferalgoritmen kunnen leren en toepassen. Dat is nooit zo geweest en zal ook nooit zo zijn. In dit verband wil ik wijzen op het werk van S. Huitema en K. Buijs, die zich al decennia bezig houden met het onderwijs aan rekenzwakke kinderen en die nog nooit voor de 'Van de Craats oplossing' hebben gekozen.

Ten derde Gecijferdheid: Graag wil ik wijzen op een artikel getiteld: *Gecijferdheid, vier eeuwen ontwikkeling* (Oonk, Van Zanten en Keijzer, 2007). Daar wordt nog eens uitgelegd wat we onder gecijferdheid verstaan. Niet alleen in Nederland, maar in de hele wereld. Ook om nog eens duidelijk te maken dat gecijferdheid en rekenvaardigheid niet synoniem zijn. Rekenvaardigheid is een onderdeel van die gecijferdheid.

Argumenten geeft Van de Craats nergens. Hij gebruikt wel steeds de term docentenwijsheid. Hij bedoelt zijn eigen docentenwijsheid of hij verwijst naar z'n eigen boek. Hij zou toch ook oog moeten hebben voor andermans schoolmeesterswijsheid, bijvoorbeeld de mijne, opgebouwd in 37 jaar onderwijzersopleiding en basisschool en voortgezet onderwijs.

Aanbevelingen van mijn kant

- hou gevarieerd en doelgericht oefenen in ere;
- kies je strategie afhankelijk van het probleem dat je wilt oplossen, dus ...
- handig rekenen van jongsaf aan, ieder naar zijn of haar mogelijkheden;
- géén traditionele cijferalgoritmen; kolomsgewijs rekenen is een redelijk alternatief, niet als opstap naar die traditionele algoritmen;
- echt nodig is kolomsgewijs rekenen niet: we kunnen wel zonder.

Handig rekenen

Kolomsgewijs rekenen en de traditionele algoritmen zijn zonder meer mooie voorbeelden van (ultieme) verkortingen. Ze zijn een studie waard. Ook leerkrachten en kinderen zouden veel kunnen leren van (het ontstaan van) de cijferalgoritmen, maar oefenen en beoefenen hoeft niet meer.

In het septembernummer van *Volgens Bartjens* poneert Jan van de Craats de stelling: doe handig rekenen de deur uit. De eindstand van een stemming onder de lezers is geworden: 43 voor, 339 tegen. Lees de samenvatting van alle commentaren in het novembernummer van *Volgens Bartjens*. (Het zou Van de Craats sieren deze reacties ook op zijn website op te nemen. Hij zegt immers de discussie te zoeken!)

Tegen Daan en Sanne zou ik willen zeggen: niks meer over rekenen aan opa vragen. Die helpt jullie van de regen in de drup. Leer daarentegen 'handig rekenen'. Voor nu en voor later.

Referenties

1 K. Buijs en P. van der Zwaart, *Aandachtsgebieden voor een doorgaande lijn rekenenwiskunde van po naar vmbo*, Enschede: SLO, 2006

2 J. van de Craats, 'Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5(2), 132–136, 2007

3 J. van de Craats en R. Bosch, *Basisboek rekenen*, Amsterdam: Pearson Education, 2007

4 M.L.A.M. Dolk en W. Uittenbogaard, 'De ouderavond. Willem Bartjens.', *Tijdschrift voor het reken-wiskundeonderwijs*, 9, 14–20, 1989

5 J. van de Craats, ' "Handig rekenen" moet de deur uit', *Volgens Bartjens*, 27(1), 27(2), 2007

6 A. Dowker, 'Computational Estimation Strategies of Professional Mathematicians', *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 45–55, 1992

7 F.H.J. van Galen en M.L.A.M. Dolk, *Interactieve video in de nascholing rekenen-wiskunde*, Utrecht: Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen (CD-beta Press), 1991

8 F. Goffree, W. Aarts, J. Eilander, D. Karman, H. Meyer, D. Oort, P. Scholten, A. Treffers, *Cijferen Anno 2000*, Experimentele uitgave van de commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, 1971

9 M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Buys en A. Treffers (Eds.), *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen Bovenbouw Basisschool*, Groningen: Wolters-Noordhoff, 1999

10 S. Huitema e.a, *Maatwerk Rekenen*, Den Bosch: Malmberg

11 J. Jansen, F. van der Schoot en B. Hemker, 'Balans (32) van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4', *PPON (periodieke peiling van het onderwijsniveau)*, 103–110 Arnhem: Cito Instituut voor toetsontwikkeling. 2005

12 R. de Jong (ed.), 'Leerplanpublikatie 6: de abakus', *Wiskobas-Bulletin, jaargang 6, nr. 4*, Utrecht: IOWO, 1977

13 W. Koersen en W. Uittenbogaard, 'Panama Praktijktip nummer 104: Cijferen, hoe nu verder?', *Panama-Post. Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 25(4), 46–50, 2006

14 J. de Lange, *Mathematics, Insight and Meaning*, Utrecht: OW&OC, 1987

15 E. de Moor, 'Leerplanpublikatie 11: gevarieerd rekenen', *Wiskobas-Bulletin, jaargang 9, nr. 1/2/3*, Utrecht: IOWO, 1980

16 W. Oonk, M. van Zanten en R. Keijzer, 'Gecijferdheid: vier eeuwen ontwikkeling', *Panama-Post. Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(3), 3–18, 1980

17 A. Treffers (ed.), 'Leerplanpublikatie 10: cijferend vermenigvuldigen en delen', *Wiskobas-Bulletin, jaargang 8, nr. 5/6*, Utrecht: IOWO, 1979

18 W. Uittenbogaard, 'Uitleggen en uitleggen is twee', *Panama-Post*, 4(4), 41–42, 1986

19 W. Uittenbogaard, 'Een zakje appels ...Voorbereidingen van een meester.', *Volgens Bartjens ...*, 26(3), 23–2, 2007

20 W. Uittenbogaard, C.T.M. Fosnot en K.L. Imm, *Minilessons for Operations with Fractions, Decimals and Percents. A Yearlong Resource*, Portsmouth: Firsthand Heinemann, USA, 2007