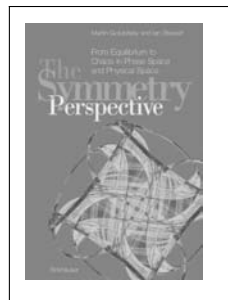


Boekbesprekingen

| Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
 Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
 Dept. of Math. and Computer Science
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
 Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
 e-mail: wgreview.win@tue.nl



M. Golubitsky, I. Stewart
**The symmetry perspective
 From Equilibrium to Chaos in
 Phase Space and Physical Space**

Progress in mathematics; vol 200

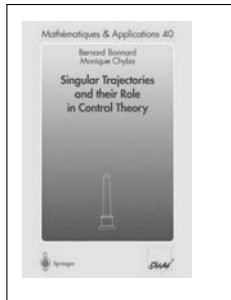
Basel: Birkhäuser, 2002

325 p., prijs €75,-

ISBN 3-7643-6609-5

De auteurs hebben gezamenlijk al diverse boeken geschreven om het begrip symmetrie duidelijk te maken voor een breed publiek. Bekende titels zijn onder andere *Fearful symmetry: is God a geometer?* en *Symmetry in chaos: a search for pattern in mathematics, art and nature*. In deze boeken vindt men toepassingen van de theorie van symmetrie in de natuurlijke wereld. Het onderhavige boek gaat met name nu dieper in op de wiskundige achtergrond van deze toepassingen. Symmetrie wordt vaak gebruikt om, zoals in de klassieke kristallografie, regelmatige vormen of patronen te beschrijven. De auteurs laten echter zien dat symmetrie ook bij de totstandkoming van patronen een rol speelt. Symmetrieën van systemen niet-lineaire differentiaalvergelijkingen of partiële differentiaalvergelijkingen verschaffen de mogelijkheid om een catalogus te maken van verschillende soorten gedrag met patroonvorming. De ondertitel van het boek luidt: 'From equilibrium to chaos in phase space and physical space'. De auteurs benadrukken hiermee dat symmetrieën een belangrijke schakel zijn tussen abstracte theorie en het experiment. Zo is er vaak geen directe relatie tussen de tijdreeksen die een experimentator observeert en de banen en meetkundige objecten die de theorie van niet-lineaire systemen beschrijft. Maar in de meeste gevallen blijkt juist dat de symmetrie van een systeem zowel een fysische interpretatie heeft als een abstracte betekenis. De symmetrie-eigenschappen van een baan in de faseruimte laten zich veelal vertalen in een symmetrie van de gerelateerde fysische waarneming. Het boek kent een graduele opbouw. De symmetriemethoden worden achtereenvolgens toegepast op steeds complexere dynamische verschijnselen: evenwichtstoestanden, periodieke oplossingen, zadelpunten met homokliene en heterokliene banen en, tenslotte, chaotische fenomenen. Daarbij wordt telkens de link gelegd met toepassingsgebieden, variërend van theoretische fysica tot evolutiebiologie. Het boek is uitstekend verzorgd met foto's en illustraties en is helder geschreven. De brede scope van het boek maakt het aantrekkelijk voor algemeen geïnteresseerden die wat meer wiskundige diepgang zoeken, maar zeker ook voor specialisten die een overzicht willen hebben van de verschillende toepassingsgebieden en van de literatuur op deze gebieden. Zo kent het boek een zeer uitgebreide literatuurlijst. Het is dan ook niet verwonderlijk dat de rijke inhoud van dit boek en de aangename presentatie aanleiding zijn geweest om in 2001 aan dit boek een prijs toe te kennen, vernoemd naar de internationaal gerespecteerde Catalaanse toegepaste wiskundige Ferran Sunyer i Balaguer (1912 – 1967). En te weten dat dit boek door een computer crash bijna verloren was gegaan! Het werk is namelijk de neerslag van een serie lezingen die in het begin van 1993 aan het Fields Institute door de auteurs werden gegeven. De aantekeningen op de PC waren niet gebackupt en werden pas in 2000 gereconstrueerd voor een nieuwe serie lezingen.

G.B. Huitema



B. Bonnard, M. Chyba
**Singular Trajectories and their Role
 in Control Theory**

Mathématiques et Applications, Vol. 40

Berlijn: Springer Verlag, 2003

373 p., prijs €69,50

ISBN 3-540-00838-5

The contents and aims of this book are convincingly explained in its preface. Given a (nonlinear) control system $\dot{x} = f(x, u)$, with the state x taking values in an n -dimensional manifold, and a control vector $u \in U \subset \mathbf{R}^m$, consider the *end-point mappings* $E : u(\cdot) \mapsto x(T, x_0, u)$ where $x(T, x_0, u)$ denotes the state at some fixed time $T > 0$ resulting from applying the control function $u(\cdot)$ to the control system, starting from a fixed initial state x_0 at time 0. The singularities of this mapping are called the *singular trajectories* of the control system.

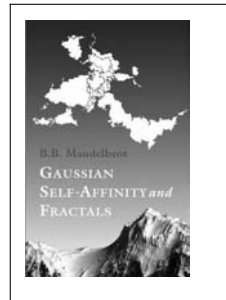
These singular trajectories crucially show up in at least three instances: (1) The singular trajectories are candidate minimizers for the *time-optimal control problem* of steering the system to a desired end-point in a minimal amount of time. The singular trajectories are parametrized by the Pontryagin Maximum principle applied to the time-optimal control problem. (2) The singular trajectories are the *abnormal extremals* of optimal control problems for the control system. Indeed, the optimal control problem can be seen as minimizing a cost functional over the set of all possible system trajectories, with the singular trajectories being the singular points of this set. A particular example of this case is provided by sub-Riemannian geometry. (3) The singular trajectories remain the same when applying a general state feedback to the control system. Hence they are invariants under the action of the *feedback group*. It turns out that the singular trajectories can be used to generate a *complete* set of invariants. In particular, with the aid of singular trajectories one may compute invariants for the classification of *distributions*.

The book brings together a wealth of results on the topic of singular trajectories and its applications, which were up to now for a large part scattered throughout the literature. Hence the book serves as a very valuable source of information for every researcher interested in these and related areas.

Generally speaking, the book is well accessible. The goals of the individual chapters and sections are stated clearly. In addition, the book contains a large number of useful exercises at the end of every chapter. On the other hand, the present reviewer feels that as a textbook the book exhibits some flaws. First, there is occasional sloppiness in the notation. For example, in Proposition 8 the time-invariant linear system is denoted as $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ and on p. 67 the alternative notation $[\vec{F}, \vec{G}] = \vec{G} \circ \vec{F} - \vec{F} \circ \vec{G}$ for the Lie bracket suddenly shows up. The English of the book sometimes would have benefited from a closer inspection (cf. 'In 1963 was published given an example' on p. 82, 'It has in some extend slopped the post-war research in this area' on p. 233). Its mathematical contents, although generally of an admirable quality, could also be improved at some points (e.g. the proof of Proposition 2 does not appear correct, while much better, — and more constructive —, proofs for Proposition 8 are available in the literature).

Summarizing, the book is a very welcome and useful addition to the literature, especially as a research monograph and source of information and inspiration.

A.J. van der Schaft



B.B. Mandelbrot

Gaussian Self-Affinity and Fractals

Berlijn: Springer Verlag, 2002

654 p., prijs €64,15

ISBN 0-387-98993-8

Mandelbrot heeft grote bekendheid gekregen door zijn onderzoek aan fractals. Het is niet eenvoudig voor dit begrip een bevredigende algemene definitie te geven, maar men moet denken aan objecten die, bij goede herschaling, er in hun kleinste details (ongeveer) net zo uit zien als het geheel. Ter toelichting twee van de eenvoudigste voorbeelden. Eerst de 'middelstederde-Cantorverzameling': hierbij is zowel de linker als de rechter 'helft', na opschaling met een factor drie, congruent met het geheel; door herhaalde toepassing van dit principe zien we dat we de oorspronkelijke Cantorverzameling overal in verkleinde vorm terugvinden. Een tweede voorbeeld is de Brownse beweging. Bij een dergelijke beweging treedt in een tijdsinterval van lengte t gemiddeld een verplaatsing op over een afstand die evenredig is met $\sqrt{t}$. Hier geldt dat, bij een opschaling van de tijd met een factor α en tegelijkertijd een opschaling van de 'ruimtelijke afstanden' met een factor $\sqrt{\alpha}$, we weer hetzelfde stochastische proces van Brownse beweging krijgen. Dus ook hier is Brownse beweging in het klein gelijk aan Brownse beweging in het groot.

In het onderzoek van Mandelbrot komen veel meer en veel gecompliceerdere voorbeelden van dit soort situaties aan de orde; met name komen in dit werk ook varianten van de Brownse beweging aan de orde waarbij de afgelegde weg in een tijdsinterval van lengte t gemiddeld evenredig is met t^α , waarbij α niet gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Ook wordt met veel nadruk en voorbeelden aangetoond dat vaak situaties buiten de wiskunde vragen om een beschrijving in termen van dergelijke fractale structuren. Een bekend voorbeeld, dat wel met een korreltje zout genomen moet worden, is de kustlijn van bijvoorbeeld Noorwegen: die ziet er op een kaart grillig uit; maar niet alleen dat, bij gebruik van een gedetailleerdere kaart blijft die kustlijn ongeveer even grillig omdat er nieuwe details zichtbaar worden (ik heb het niet gecontroleerd). Ook ruwe oppervlakken van materialen hebben vaak (bij benadering) een fractale structuur — bij de keuze van de term *fractal* heeft voor Mandelbrot de associatie met een *breukvlak* een belangrijke rol gespeeld. Ook in de wiskunde zelf komen deze fractals voor. Heel bekend is wat we nu de Mandelbrotverzameling noemen, hoewel daar het principe dat we overal in het klein de hele verzameling weer terugvinden minder streng geldig is dan bij de bovenstaande voorbeelden. Dit is de verzameling van die waarden c in het complexe vlak waarvoor de rij punten $\{\varphi_c^n(0)\}_n$, waarbij $\varphi_c(x) = x^2 + c$, begrensd is. Het is een schitterende figuur met een ongelooflijk complexe structuur die aanleiding gegeven heeft tot veel mooi wiskundig werk. Uit deze korte beschrijving moge het duidelijk zijn dat we hier te maken hebben met een man

die niet de standaard wegen van de wetenschapsbeoefening laat staan van de wiskundebeoefening gevolgd heeft: vaak wierp hij meer vragen op dan hij oploste (maar in een niet onaanzienlijk aantal gevallen inspireerden zijn ideeën anderen tot substantiële bijdragen) en ook met een man die terecht een ruime bekendheid geniet. Zoals men kan verwachten waren de reacties op dit werk, vooral in het begin, sterk wisselend. Mijn indruk is echter dat nu vrij algemeen wordt ingezien dat fractals in een aantal gevallen goede hulpmiddelen zijn bij het beschrijven van situaties uit de werkelijkheid en ook dat er een begin is van een goede wiskundige theorie van (ten minste bepaalde klassen van) dit soort objecten.

Het werk waar het hier om gaat bevat een selectie van zijn artikelen, aangevuld met een aantal speciaal voor deze uitgave geschreven artikelen. Het is het derde deel in de serie 'Selected works of Benoit B. Mandelbrot'. De eerste twee hadden als titel *Fractals and scaling in finance* en *Multifractals and $1/f$ noise*. Uit het bovenstaande moge duidelijk zijn dat ik het toejuich dat (een selectie uit) de werken van Mandelbrot door een nieuwe uitgave toegankelijker gemaakt worden. Wat mij echter tegenviel is dat de schrijver het niet kan laten om voortdurend te hameren op het grote belang van fractals en zijn eigen grote bijdragen op dit gebied. Hij lijkt een permanente strijd te voeren voor erkenning. Dit kende ik ook al uit eerdere publicaties, maar ik heb de indruk dat dit hier nog sterker was geworden. Nu kan men hier natuurlijk overheen lezen. Maar erger is dat, tenminste in het eerste grote overzichtsartikel dat speciaal voor deze uitgave was geschreven en dat ik nauwkeurig heb proberen te lezen, iedere keer waar ik mededelingen tegenkwam met een meer wiskundige inhoud de zaak niet klopte. Het varieerde van slordige notatie (zie midden pagina 15) en het vergeten van een min-teken (zie midden pagina 32) tot een geval waar de lezer naar mijn mening echt belazerd wordt. De eerste twee gevallen kan men afdoen als slordigheden (hoewel uiterst hinderlijk als men wil begrijpen wat er staat) maar dat laatste geval is natuurlijk het ernstigste en zal ik in iets meer detail bespreken (het staat in de alinea die op pagina 41 begint en op pagina 42 eindigt).

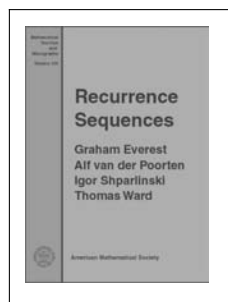
Het gaat over de dichtheidsverdeling van melkwegstelsels in het universum. Die schijnt in eerste benadering niet uniform te zijn maar clusteringen te vertonen zodat men aan een fractale verdeling zou kunnen denken. De vraag was of een dergelijke clustering het gevolg zou kunnen zijn van de gravitatie-theorie van Newton. Mandelbrot vertelt dat dit aannemelijk gemaakt werd door computersimulaties die uitgevoerd werden bij IBM (waar Mandelbrot al heel lang werkt). Hierbij werd uitgegaan van een universum in de vorm van een 3-dimensionale torus (dit komt op hetzelfde neer als een universum dat gewoon de vorm van $\mathbf{R}^3$ heeft, met coördinaten x , y en z , waarbij alles periodiek is in zowel x , y als z). Hierin werd een begintoestand genomen met puntmassa's (die melkwegstelsels voorstelden) die bij benadering uniform verdeeld waren en werd vervolgens berekend hoe dit systeem zou evolueren volgens de mechanica van Newton: men zou een clustering gezien hebben die lijkt op de waargenomen clustering van melkwegstelsels. Op het eerste gezicht lijkt dit heel verstandig. Maar schijn bedriegt. Gelukkig heb ik als bijvak sterrenkunde (zoals dat toen nog heette) moeten doen. Daar heeft Van Albada ons toen geleerd dat, zoals Newton al ingezien had, een universum, waarbij de massa bij benadering uniform verdeeld is (en dat is het geval in zo'n multiperiodiek universum), de mechanica van

Newton niet mogelijk is omdat de gravitatiekrachten die het gevolg zijn van zo'n massaverdeling gegeven worden door divergerende integralen. In het geval van een universum in de vorm van een 3-dimensionale torus kan de argumentatie als volgt gegeven worden.

De potentiaal van een puntmassa in $\mathbf{R}^3$ is van de vorm $V = -c/r$ waarbij c positief is en r de afstand tot de puntmassa voorstelt. Buiten de puntmassa voldoet dit aan de vergelijking van Laplace. Op een 3-dimensionale torus verwachten we dus een potentiaal die naar $-\infty$ nadert bij de puntmassa en elders voldoet aan de vergelijking van Laplace. Maar zo'n functie moet, omdat de torus compact is, een maximum aannemen. En dat gaat niet samen met het voldoen aan de vergelijking van Laplace.

Er wordt dus gewoon verwezen naar een numerieke simulatie die niet mogelijk is. Voor mij was dit het punt om te stoppen met een nauwkeurige lezing. Ik kan het boek dan ook niet aanbevelen als een betrouwbare bron van informatie. Dit is vooral te betreuren omdat op het gebied van de fractals, behalve waar het sterk wiskundig georiënteerde werken betreft zoals de beide boeken van Falconer, moeilijk aan betrouwbare informatie te komen is.

F. Takens



G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski, T. Ward

Recurrence Sequences

Mathematical Surveys and Monographs 104
Providence : American Mathematical Society,
2003

318 p., prijs \$ 79,-
ISBN 0-8218-3387-1

Recurrenties komt men veelvuldig tegen in de wiskunde en informatica: bij machtreeksen van rationale functies, pseudo-randomgetallengeneratoren, cellulaire automaten, Diophantische vergelijkingen en in de cryptografie bijvoorbeeld. De beoefenaars van deze (soms ver uit elkaar liggende) wetenschapsgebieden zijn soms nauwelijks op de hoogte van elkaars werk en dit boek zal ongetwijfeld leiden tot meer contacten tussen mensen van verschillende disciplines met een gemeenschappelijke belangstelling in recurrenties. (Inderdaad vertelde een van de auteurs me dat dit al gebeurd is.) Dat de auteurs toch met autoriteit over deze uiteenlopende zaken hebben kunnen schrijven, is te danken aan hun uiteenlopende expertises.

Recurrenties zijn al sinds oudsher bestudeerd (met als bekendste voorbeeld de recurrentie $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, die met $F_0 = 0$ en $F_1 = 1$ als startwaarden de Fibonaccigetallen geeft). De literatuur erover is dan ook zeer uitgebreid, alleen al omdat allerlei resultaten met zeer eenvoudige middelen bewezen kunnen worden. Gelukkig zijn de auteurs relatief selectief met hun referenties geweest (niettemin zijn er meer dan 1400 referenties).

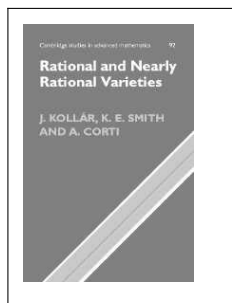
Er bestaan al verscheidene boeken over recurrenties, maar dit is het meest omvattende. Het boek bespreekt ook enkele onderwerpen die recent sterk in de belangstelling zijn komen te staan (Somosrijen en elliptische-deelbaarheidsrijen). De auteurs beogen ook na verloop van tijd met een update van hun boek te komen.

Het boek is bedoeld als overzichtswerk en bevat niet veel bewijzen. In sommige gevallen wordt het basisidee van een be-

wijs gegeven, soms ook nieuwe resultaten (maar dan gedetailleerd). De wiskundige methodes die gebruikt worden zijn meest afkomstig uit de Diophantische approximatie, p -adische analyse en de theorie van karaktersommen. Enige getaltheoretische en algebraïsche achtergrond is nuttig voor het lezen van dit boek.

Ik meen dat de wiskundegemeenschap de auteurs dankbaar kan zijn voor hun harde en vele werk en het nuttige boek dat daaruit is voortgekomen. Voor liefhebbers van recurrenties en voor bibliotheken beveel ik het van harte aan!

P. Moree



J. Kollár, K.E. Smith, A. Corti
Rational and Nearly Rational Varieties

Cambridge Studies in Ad. Mathematics, 92
Cambridge: Cambridge University Press, 2004
235 p., prijs £38.00
ISBN 0-521-83207-1

Een algebraïsche variëteit V heet rationaal als er een birationale afbeelding bestaat naar een projectieve ruimte, dat wil zeggen een afbeelding die 1-1 duidelijk is en die in beide richtingen gegeven wordt door rationale functies (maar de afbeeldingen hoeven slechts op Zariski-open stukken gedefinieerd te zijn). Men spreekt van 'rationaal' (zo zonder meer) als de afbeelding gedefinieerd kan worden over hetzelfde lichaam als waarover de variëteit gedefinieerd is (het grondlichaam) en van 'meetkundig-rationaal' als hiervoor een uitbreiding van het lichaam nodig is (dan is de variëteit rationaal over de algebraïsche afsluiting van het grondlichaam).

De meest bekende rationale variëteiten zijn – naast de projectieve ruimten zelf – de hyperoppervlakken van graad 2 (kwadrieken); deze zijn echter slechts meetkundig-rationaal en rationaal dan en alleen dan als ze een punt bezitten gedefinieerd over het grondlichaam. Verder zijn de gladde oppervlakken van graad 3 in de driedimensionale projectieve ruimte (gladde kubische oppervlakken) meetkundig-rationaal, en rationaal alleen onder zekere subtiële condities.

De (meetkundig-)rationale variëteiten vormen een weliswaar zeer speciale, maar toch erg interessante klasse, enerzijds omdat ze vaak intrinsiek een rijke structuur bezitten zowel vanuit meetkundig als vanuit aritmetisch oogpunt – men denke bijvoorbeeld aan de fascinerende configuratie van de 27 lijnen op een glad kubisch oppervlak – en anderzijds omdat er in dimensie groter dan twee vele interessante variëteiten zijn die 'bijna-rationaal' zijn, in de zin dat hun numerieke invarianten triviaal zijn (zoals bij de projectieve ruimten), maar die toch niet (of vermoedelijk niet!) rationaal zijn. Voorbeelden van zulke 'bijna-rationale' variëteiten zijn de gladde driedimensionale hyperoppervlakken van graad 3 (kubische drievouden) en van graad 4 (kwartische drievouden); het feit dat deze variëteiten niet rationaal zijn was reeds vermoed in de Italiaanse meetkunde, in het bijzonder door Fano, maar de bewijzen zijn pas gegeven in de jaren zeventig van de vorige eeuw, voor de kubieken door Clemens-Griffiths en voor de kwartieken door Iskovskikh-Manin.

In dit boek komen beide soorten, rationale en bijna-rationale variëteiten, uitgebreid en diepgaand aan de orde.

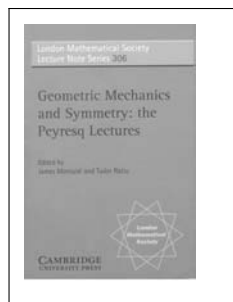
De eerste drie hoofdstukken gaan over (meetkundig-)rationale variëteiten. In hoofdstuk 1 vinden we als inleiding vele voorbeelden van zulke rationale variëteiten waarvan sommige wel meetkundig-rationaal zijn, maar niet rationaal over het grondlichaam. Verder treffen we er een prachtige stelling aan van B. Segre (1943, 1951), met een uitbreiding van Kollár uit 2002, handelend over de vraag naar de zogenaamde 'unirationaliteit' van kubische hyperoppervlakken (unirational betekent dat er een dominante rationale afbeelding bestaat van een projectieve ruimte naar de variëteit). Het tweede hoofdstuk is voornamelijk gewijd aan kubische oppervlakken met boeiende stellingen van B. Segre (1942) en Y. Manin (1966), betreffende gevallen van niet-rationaliteit over het grondlichaam. Het hoofdstuk besluit met de beroemde stelling van Max Noether en Castelnuovo over de structuur van de groep van de birationale transformaties van het projectieve vlak zelf. Hoofdstuk 3 gaat over de theorie van rationale oppervlakken in het algemeen. We treffen er Castelnuovo's rationaliteitscriterium en de classificatie van de del Pezzo oppervlakken aan, maar naast deze klassieke onderwerpen is er ook ruime aandacht voor de methode van de minimale modellen die zo belangrijk is voor de moderne theorie van Mori voor hoger-dimensionale variëteiten.

In de volgende twee hoofdstukken ligt de nadruk op 'bijna-rationale' variëteiten. In hoofdstuk 4 wordt de door Kollár in 1995 ontwikkelde methode besproken waarbij zulke variëteiten worden verkregen (verrassend!) via reductie naar priemkarakteristiek. In hoofdstuk 5 wordt de Noether-Fano methode voor niet-rationaliteit behandeld met als toepassing het bewijs van Iskovskikh-Manin voor de niet-rationaliteit van gladde hyperoppervlakken van dimensie 3 en graad 4. Deze Noether-Fano methode bestaat uit het in detail analyseren van de vaste punten en vaste 'infinitesimale-punten' van lineaire systemen. Sommige van de meer technische en moeilijke punten uit deze analyse worden vooruitgeschoven naar hoofdstuk 6 dat een technisch karakter heeft en de meer geavanceerde machinerie bespreekt. Het boek besluit met een hoofdstuk waarin de oplossingen gegeven worden van de vele 'oefeningen' die in het boek voorkomen.

De theorie van de rationale variëteiten gaat terug tot het midden van de negentiende eeuw (bijvoorbeeld Clebsch 1866, kubische oppervlakken), maar het onderzoek strekt zich uit tot op de dag van heden met nieuwe, vaak verrassende, ontwikkelingen. Er zijn talloze diepe, open vragen waarvoor waarschijnlijk een nieuw origineel inzicht nodig zal zijn. Om slechts een voorbeeld te noemen: het is bekend dat er in dimensie groter dan drie families bestaan van gladde kubische hyperoppervlakken die rationaal zijn, maar het is onbekend of het 'algemene' kubische hyperoppervlak in dimensie groter dan drie (meetkundig-)niet-rationaal is.

Dit boek geeft een prachtig en diepgaand beeld, zowel van klassieke als van moderne methoden en resultaten in dit fascinerende gebied uit de algebraïsche meetkunde. Van harte aanbevelen!

J.P. Murre



J. Montaldi, T. Ratiu (eds.)
**Geometric Mechanics and Symmetry
 The Peyresq Lectures**

London Mathematical Society Lecture Note Series 306

Cambridge: Cambridge University Press, 2005

402 p., prijs £46.00

ISBN 0-521-53957-9

In de jaren 2000 tot 2004 bestond onder de naam MASIE een Europese onderzoeksschool omtrent symmetrie en mechanica. Om de toekomstige promovendi en postdocs ervan een vliegende start te geven, werden in 2000 en 2001 twee zomerscholen gehouden. De Lecture Notes van meer dan de helft van de toen gegeven colleges zijn in het voorliggende boek verzameld, gebaseerd op lezingen van Ken Meyer, Tudor Ratiu, Darryl Holm, Richard Cushman, Henk Broer en James Montaldi.

De naam 'Lecture Notes' is hier zeer terecht, want deze werden grotendeels door de deelnemers zelf vervaardigd. Dit concept zorgt er meteen voor dat de zes teksten zeer toegankelijk zijn. Immers, de inhoud van elke cursus is door de handen gegaan van deelnemers/auteurs die de stof al hebben kunnen begrijpen.

Formeel zijn de zes teksten onafhankelijk van elkaar, maar er is wel een grote onderliggende samenhang. De steunpilaren worden gevormd door de hoofdstukken II, IV, V en VI.

Hoofdstuk II is een caput college over meetkundige mechanica. De centrale onderwerpen van de moderne aanpak van de mechanica komen aan de orde en worden door talloze (terugkerende!) voorbeelden geïllustreerd. De formuleringen zijn meestal zo gekozen dat het geval van oneindig veel vrijheidsgraden ook afgedekt wordt. Waar nodig wordt dit geval bovendien nader toegelicht. Hierdoor kan men hoofdstuk II ook gebruiken als aanvulling op de technische aspecten van het meer gevorderde hoofdstuk III over vloeistofmechanica.

De presentatie van de mechanica in hoofdstuk IV is sterk gedreven door drie voorbeelden. Terwijl hun aantal kleiner is dan in hoofdstuk II, worden deze in detail geanalyseerd en laten ze zo de grote rijkdom aan dwarsverbindingen met algebra en topologie zien.

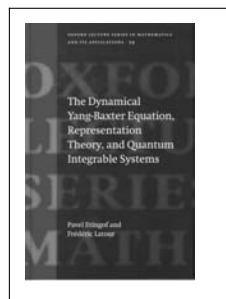
Hoofdstuk VI behandelt de bifurcatietheorie van evenwichten en relatieve evenwichten in Hamiltoniaanse systemen met symmetrie. Ook hier worden de behandelde stellingen teruggekoppeld naar expliciete voorbeelden. Men kan in dit verband zelfs het hele hoofdstuk I (her)lezen.

Hoofdstuk V gaat niet over mechanica. Hier wordt de Kolmogorov–Arnol'd–Mosertheorie (KAM) uit de doeken gedaan. Het behandelde geval van dissipatieve systemen laat duidelijk zien waar parameters nodig zijn en waarom. In het conservatieve geval zijn deze parameters van begin af aanwezig in de vorm van (vaak vanwege symmetrie) behouden grootheden. De lektuur van de andere hoofdstukken bereidt de lezer al voor op deze conclusie en in de appendix wordt hij nog expliciet op het goede spoor gezet.

Elk hoofdstuk kan uitstekend gebruikt worden als basis voor (een deel) van een op het behandeld onderwerp toegesneden master vak. Bovendien lenen deze teksten zich door hun toegankelijkheid ook goed voor studenten die een in een college aangesneden zijpad wat dieper in willen gaan — zonder meteen in

dikke boeken over het onderwerp te verdwalen. Hoofdstuk I zou dan zelfs de basis voor een of twee voordracht(en) door studenten tijdens het college kunnen bieden.

Heinz Hanmann



P. Etingof, F. Latour
**The Dynamical Yang-Baxter equation,
 Representation Theory, and
 Quantum Integrable Systems**

Oxford : Oxford University Press, 2005

Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 29

138 p., prijs £41.00

ISBN 0-19-853068-4

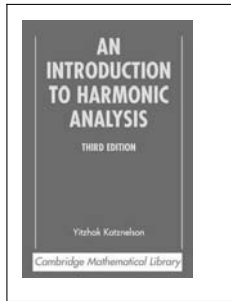
De Yang-Baxtervergelijking is $R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}$. De betekenis is als volgt. Voor V een n -dimensionale complexe vectorruimte is $R \in \text{End}(V \otimes V)$ een $n^2 \times n^2$ -matrix en we stellen $R^{12} = R \otimes \text{Id} \in \text{End}(V \otimes V \otimes V)$ zodat R^{12} betekent dat R in de eerste twee componenten van het drievoudige tensorproduct werkt. Evenzo betekent R^{13} , respectievelijk R^{23} , dat R in de eerste en derde, respectievelijk tweede en derde, component werkt. De Yang-Baxtervergelijking is dus een gelijkheid voor $n^3 \times n^3$ -matrices. Er zijn vele oplossingen van de Yang-Baxtervergelijking bekend, waaronder $R = \text{Id}$ en de flipoperator $a \otimes b \mapsto b \otimes a$. De Yang-Baxtervergelijking, of een van zijn vele varianten, komt op verschillende plaatsen voor: in de statistische mechanica gerelateerd aan het werk van Baxter, waar het de star-triangle equality heet, in Poisson-Liegroepen, quantumgroepen, Hopfalgebra's, vlechtgroepen, knopeninvarianten, speciale functies enzovoort. In feite is de genoemde Yang-Baxtervergelijking de constante Yang-Baxtervergelijking, en er zijn ook versies waarbij R als functie van een spectrale – complexe – parameter of een dynamische – vectorwaardige – parameter wordt gezien en waarbij deze parameters op verschillende niet-triviale manieren in de vergelijking verwerkt zijn. In het geval van de dynamische Yang-Baxtervergelijking wordt dit nu een differentievergelijking waaraan de matrixelementen moeten voldoen.

Dit boek behandelt de dynamische Yang-Baxtervergelijking en relaties daarvan met de representatietheorie van quantum- en Liegroepen en met quantum-integreerbare systemen. Er wordt duidelijk aangegeven hoe de representatietheorie van een simpele Lie-algebra aanleiding geeft tot oplossingen van de dynamische Yang-Baxtervergelijking. De dynamische parameter komt dan voor als representatielabel. Deze aanpak is sterk gerelateerd aan de bepaling van oplossingen van de Knizhnik-Zamolodchikovvergelijkingen, zie *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations* van Etingof, Frenkel, Kirillov Jr. In dit deel worden vrijwel alle bewijzen uitgebreid gegeven, en wordt de noodzakelijke voorkennis over simpele Lie-algebra's en hun representatietheorie herhaald. Het tweede deel bespreekt de relatie met quantum-integreerbare systemen. Een quantum-integreerbaar systeem is een 'interessante' verzameling van onderling commuterende operatoren. Er wordt aangetoond hoe je zo'n collectie kunt maken uitgaande van een oplossing van de dynamische Yang-Baxtervergelijking door middel van zogenaamde spoorfuncties. Deze aanpak wordt duidelijk gemaakt aan de hand van karakters. Vervolgens gebruiken de auteurs dit om recent werk van Etingof en Varchenko over het Macdonald-Ruijsenaars

systeem voor het voetlicht te brengen. In dit deel worden niet meer alle uitspraken expliciet bewezen.

Het boek is de neerslag van aantekeningen van Latour van een college van Etingof. De bewijzen in het boek zijn duidelijk en helder, waardoor het als collegedictaat gebruikt zou kunnen worden. Als nadeel van deze aanpak geldt dat het onderwerp niet of nauwelijks in een grotere context wordt geplaatst, en dat de stijl soms te droog is. Dit nadeel had gemakkelijk kunnen worden voorkomen.

Erik Koelink



Y. Katznelson

An Introduction to Harmonic Analysis

Cambridge Mathematical Library

Cambridge: Cambridge University Press, 2004

314 p., prijs £23,99

ISBN 0-521-54359-2

The book under review is the third, revised, edition of Katznelson's famous 1968 book, which won the author the 2002 Steele prize for exposition. Katznelson aims at graduate students and mathematicians with a reasonable background in analysis. Rudin's *Real and Complex Analysis* would do handsomely as background material.

Nowadays there is a tendency towards offering introductions to Fourier analysis without assuming any knowledge of functional analysis and the theory of integration. This approach has the advantage that a larger audience may be reached. Katznelson's book, on the other hand, shows in a truly masterly way how beautiful the subject really is and how efficient and incisive the proofs can be, if a little abstract analysis is used. Two words of warning are appropriate. 'Application' in this book means 'application in harmonic analysis or maybe in another branch of pure math, NOT in physics, PDE or signal analysis'. The clarifying L^2 theory is broached on page 29 only. For readers without any experience with Fourier analysis this perhaps makes the book inaccessible; they should read through an elementary introduction like Körner's, and come back!

The book consists of eight chapters: I. *Fourier Series on $\mathbb{T}$* , II. *The Convergence of Fourier Series*, III. *The Conjugate Function*, IV. *Interpolation of Linear Operators*, V. *Lacunary series and Quasi-analytic Classes*, VI. *Fourier Transforms on the Line*, VII. *Fourier analysis on Locally Compact Abelian Groups*, VIII. *Commutative Banach Algebras*. There are appendices on vector-valued functions and probabilistic methods.

I will not try to give a description of the host of material that was already assembled in the older editions. Instead I will discuss what is new. The new edition counts 45 pages of added material dealing with approximation and probabilistic methods. In Chapter I we now find the ergodic theorem in Hilbert space setting, and two new sections on applications, mainly about Jackson-type theorems relating smoothness of functions to the quality of approximation by trigonometric polynomials. Extensions of the theory from the circle to the torus are also treated. Chapter IV now contains a section on Marcinkiewicz' interpolation theorem. In Chapter VI positivity, in particular Bochner's theorem character-

izing the Fourier-Stieltjes transforms of positive measures as positive definite continuous functions, is further elaborated and some probabilistic concepts are briefly introduced. (A function φ on $\mathbb{R}$ is called positive definite if all matrices $(\varphi(\xi_i - \xi_j))$, $\xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}$, are positive definite.) A final new feature is the appendix on probabilistic methods, which includes the de Leeuw-Kahane-Katznelson theorem stating that, given $\{a_n\} \in l^2$, there exists a continuous function f on the circle with $|\hat{f}(n)| \geq |a_n|$. Many small corrections and ameliorations have been made throughout the book, a few exercises have been added, and the bibliography has been extended slightly.

Katznelson managed to improve on a seemingly perfect book! I enjoyed reading through it again and the beauty of both the subject and the presentation struck me once more. I recommend it wholeheartedly to anyone with a serious interest in Harmonic Analysis.

J. Wiegerinck