

Bas Edixhoven

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

edix@math.leidenuniv.nl

Samenleving Viering driehonderdste geboortejaar Euler

Eulerconferentie aritmetische meetkunde

Leonhard Euler was een van de grootste en productiefste wiskundigen ooit. Hij werd in Bazel geboren in een predikantenfamilie. Na het gymnasium liet zijn vader hem Grieks, Hebreeuws en wiskunde studeren; zijn leraar was Johann Bernoulli. In 1726 studeerde hij af en in het voorjaar 1727 ging hij, net twintig jaar oud, op weg naar St. Petersburg om daar hoogleraar te worden. Zijn geboortejaar, 1707, is ook daar op grootse wijze gevierd met een serie conferenties over de verschillende thema's uit zijn onderzoek. Bas Edixhoven, hoogleraar meetkunde in Leiden, was ook uitgenodigd om er een lezing te geven: hij vertelt over zijn bezoek aan het deelcongres over aritmetische meetkunde.

Ter gelegenheid van de driehonderdste verjaardag van Leonhard Euler vonden er in juni en juli van 2007 een aantal conferenties plaats in St. Petersburg. Euler werd geboren op 15 april 1707 in Basel (Zwitserland), en stierf op 18 september 1783 in St. Petersburg. Op zijn negentiende werd hij lid van de academie van wetenschappen in St. Petersburg, na een mislukte sollicitatie in Basel. Euler is een van de giganten in de geschiedenis van de wiskunde, en hij staat dan ook zeker in mijn top 5 van favoriete wiskundigen tot nu toe: Archimedes, Euler, Gauss, Serre, en Grothendieck. Euler heeft aan vele gebieden van de wiskunde bijgedragen (in ieder geval getaltheorie, algebra, analyse — waaronder variatierekening, meetkunde, mechanica, optica), en een belangrijk aantal van de nu gebruikte notaties en concepten is van hem afkomstig, zoals bijvoorbeeld het grondgetal e van de

natuurlijke logaritme, alsook de mooie identiteit $e^{i\pi} = -1$, en zelfs het begrip functie, inclusief de notatie $f(x)$. Zijn verzameld werk (*Leonhard Euler Opera Omnia*) bestaat uit 82 volumes; de volledige index is te vinden op de webpagina's van Springer-Verlag. Tot bijna vijftig jaar na zijn dood verschenen er nog artikelen van hem in de verslagen van de academie in St. Petersburg. Om recht te doen aan zijn bijdragen op al deze gebieden is dan ook een serie van tien conferenties georganiseerd. Waar normaal op de aankondigingsposter een lijst van sprekers staat, staat in dit geval een even lange lijst van conferenties (zie [1]). Voor één daarvan, over aritmetische meetkunde, kreeg ik een uitnodiging.

Deze uitnodiging was de aanleiding tot mijn eerste reis naar Rusland. De voorbereiding begon met een bezoek aan het Russisch consulaat in Den Haag, waar ik op vertoon

van een officiële uitnodiging en na het betalen van ongeveer 100 euro een visum kreeg. Het contrast met het consulaat van de Verenigde Staten in Amsterdam viel me erg op. Direct achter de voordeur kwam ik in de hal met de loketten, waar mooie blondines met grote boezems behulpzaam visumaanvragen verwerkten. De orde werd bewaard door slechts één persoon waar duidelijk niet mee te spotten viel. Daarna kocht ik een vliegticket voor de gewenste data. Aangezien de KLM niet op die dagen vloog werd het de Scandinavian Airlines (SAS).

Enige dagen voor vertrek informeerde ik eens bij onze Russische master-studente hoe ik eigenlijk aan roebels moest komen. Het antwoord was simpel: die trek je uit de muur, net als in Nederland, maar kijk wel uit waar je dat doet. De avond voor vertrek kwam toch nog onverwacht, en met mijn vrouw overlegde ik of het nodig was nog snel een testament op te maken (het is er niet van gekomen, en is gelukkig ook niet nodig gebleken).

De vliegreis verliep probleemloos. Het vliegveld van Kopenhagen, waar ik een overstap had, bracht me al in een Scandinavische sfeer: de vloeren van de terminals zijn geheel van parket. In St. Petersburg aangekomen doorstond mijn visum de toets, afge-



Figuur 1 Vanaf links naar rechts, boven naar onderen: Nevski Prospekt bij middernacht, buste van Euler op de binnenplaats van het Eulerinstituut, Hermitage museum, een straat in St. Petersburg, hotel (in een park), een straat, Fontanka-rivier

nomen door een strenge blondine achter een hoog loket, en ik bevond me voor het eerst van mijn leven in Rusland.

Een promovendus van Sergei Vostokov, de lokale organisator van de conferentie, haalde mij op in de aankomsthal. Deze uiterst vriendelijke jongen heette mij welkom in Rusland, en begon meteen met grapjes over spionnen en de KGB. De onofficiële taxi die hij geregeld had bracht ons naar mijn hotel. De reis werd door hem continu voorzien van commentaar. Het vliegveld ligt ten zuiden van de stad, in het gebied dat tijdens de tweede wereldoorlog door de Duitsers was bezet. De omsingeling van St. Petersburg door Duitsers (en minder actieve Finnen) heeft zo'n negenhonderd dagen geduurd, en men zegt dat er in de stad ongeveer een miljoen doden zijn gevallen (het huidige inwonersaantal is zo'n 5 miljoen). De plaats tot waar de Duitsers zijn gekomen is nu gemarkeerd door een monument. Het centrum, dat wonderwel goed bewaard is gebleven, ligt slechts een tiental kilometers verderop. Door het zeer drukke verkeer duurde de reis meer dan een uur. Het aantal auto's is natuurlijk sterk gestegen in de laatste jaren, terwijl het wegennet niet is aangepast. Daarentegen is er een efficiënte en fraaie metro, waarmee het reizen veel sneller gaat. Het hotel bleek een oude villa in een park te zijn, met een vijftiental kamers. Erg comfortabel was het hotel niet: geen internet, 's nachts mugenjacht, en een enigszins rustieke douche. De prijs was wel Europees: 70 euro per nacht, maar de ligging was dat zeker waard.

Vanaf het hotel was het vijf minuten lopen,

via een brug over een de vele takken van de Neva, naar het Eulerinstituut. Dit instituut is gehuisvest in een fraai gebouw, dat recentelijk gerenoveerd is. Op de binnenplaats staat een buste van Euler. Wie goed kijkt kan een bekende formule ontcijferen in het bloemperk ervoor (zie ook de foto rechts).

Het wetenschappelijke programma bestond uit drieëndertig voordrachten verdeeld over zes dagen (zie [3] voor de lijst). Het gemeenschappelijke thema was de moderne theorie van zeta en L-functies. In de uitnodiging hadden de organisatoren laten weten het liefst overzichtsvoordrachten te hebben, dus niet te specialistisch, met daarin liefst ook nog iets over het werk van Euler.

Om aan dit verzoek te voldoen heb ik de aankondigingsposter in detail bekeken, deze bevatte namelijk een flink aantal formules van Euler. Na mij verbaasd te hebben over een foute formule vond ik wat ik zocht:

$$\prod_{n \geq 1} (1 - x^n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k x^{(3k^2+k)/2}.$$

Euler bewees deze identiteit vast met behulp van combinatoriek. Gewoon het product uitschrijven laat zien dat de coëfficiënt van x^m het verschil is van het aantal partities van m in een even aantal ongelijke delen en het aantal partities van m in een oneven aantal ongelijke delen. Daarna moet dan bewezen worden dat dit verschil 0 is als m niet van de vorm $(3k^2 + k)/2$ is, en $(-1)^k$ als $m = (3k^2 + k)/2$ (voor details, zie [4]). Tegenwoordig wordt dit soort functies bestudeerd via modulaire vormen. Mijn voordracht ging over het snel uitre-

kenen van de coëfficiënt van x^m in machten

$$\prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^r.$$

Snel betekent hier: in tijd polynomiaal in $r \log m$. Het is een diep resultaat dat dit kan als r een veelvoud van 24 is en $m + r/24$ een priemgetal is (zie [6] voor details).

Don Zagier gaf een opmerkelijke voordracht die begon met Euler's oplossing van het zogenaamde *Baselprobleem*: geef de exacte waarde van $\sum_{n>0} 1/n^2$, en eindigde met de hedendaagse vermoedens over waarden van L-functies in gehele getallen. Nikolai Durov, een promovendus bij Faltings, is een fenomeen waar we nog meer van zullen horen. Zijn voordracht gaf een goed overzicht van de preprint van 568 pagina's die hij in april op arxiv heeft geplaatst. Christopher Deninger werd vergezeld door een televisieploeg uit Basel.

Natuurlijk vonden er buiten het wetenschappelijk programma ook andere activiteiten plaats. St. Petersburg is een prachtige stad, die door al het water doet denken aan Amsterdam en Venetië. St. Petersburg is echter een stuk groter, en het aantal paleizen aan de rivieren en kanalen is enorm. In 1703 werd deze stad gesticht door tsaar Peter de Grote, die een paar jaar daarvoor, tijdens een reis door Europa, in Nederland ervaring had opgedaan in scheepsbouw en ook in stedenbouw in natte streken. De conferentie vond plaats in juni, dus in de periode van de 'white nights', wanneer het 's nachts niet volledig donker wordt, en het om middernacht nog volledig

licht is. Eén dag van de conferentie was gevuld met een excursie naar Peterhof, het Versailles van St. Petersburg. Ter plekke moest extra entreegeld worden betaald voor het maken van foto's, met het gevolg dat niemand dat deed. Dat deze excursie de hele dag in beslag nam kwam vooral doordat de reis per bus ging, en nog wel op vrijdag, de dag dat vele Russen voor het weekend naar hun datsja vertrekken. Peterhof is een indrukwekkend geheel, dat te denken geeft over de middelen waarmee dat allemaal is bereikt (maar goed, ditzelfde geldt natuurlijk ook voor Versailles en Paleis Het Loo). Ondanks het afgaan van het alarm tijdens de passage van onze groep in een kwetsbare zaal eindigde onze excursie niet in Siberië. 's Avonds was er het officiële conferentiediner. Tegen mijn verwachting, gewekt door verhalen van studiegenoten die in de jaren 80 met hun promotor naar Mos-

kou waren geweest, en door mijn voormalige student Andrei Yafaev, was de hoeveelheid beschikbare wijn en wodka redelijk, en niet veel te veel. Dit diner werd interessant omdat, onder voorzitterschap van Dorian Goldfeld, alle deelnemers uiteindelijk een speech hielden. Gemeenschappelijke thema's in al deze speeches waren de betere mogelijkheid tot samenwerking met Rusland sinds het einde van de Sovjet periode, en relaties met Euler. Hier bleek nog eens dat de deelnemers aan de conferentie een aardige mix vormden van de wereldbevolking. Behalve de gebruikelijke Amerikanen, West-Europeanen, Japanners, Russen en sinds kort Chinezen, waren er ook duidelijk meer Oost-Europeanen: Polen, Letten, Albanen, ... Ik was de enige Nederlander. Helaas was mij niets bekend over de relatie van Euler met Nederland, maar ik heb beloofd mijn best te doen om te zorgen dat

over honderd jaar een Nederlander zal rapporteren over dit onderwerp tijdens de conferenties die dan ongetwijfeld zullen plaatsvinden. Informatie hierover is dus welkom! Er waren nog andere excursies: een prachtige boottocht (bijzonder aan te raden) en een bezoek aan het gebouw van de academie waar Euler heeft gewerkt (niet zo aan te raden). Tijdens de boottocht heb ik het beroemde Hermitage-museum van buiten gezien. Voor de binnenkant had ik deze keer geen tijd, maar dat komt de volgende keer wel goed. Ik ben zeker van plan een keer terug te gaan.

Tot slot nog een kleine en misschien nuttige wetenswaardigheid over de terugreis. Het vliegveld (Pulkovo) is klein, waardoor men kennelijk niet teveel mensen tegelijk wil binnenlaten. Men kan pas een uur voor vertrek inchecken, en de rij is daardoor ook kort. ←

Referenties

1. Lijst van conferenties: www.pdmi.ras.ru/EIMI/2007/Euler300
2. Wikipedia Euler: en.wikipedia.org/wiki/Euler
3. Program: www.pdmi.ras.ru/EIMI/2007/AG/prog.html
4. Wikipedia pentagonal: en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_number_theorem
5. Mactutor Euler: www.groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Euler.html
6. ArXiv comp: www.arxiv.org/abs/math.NT/0605244



Figuur 2 Binnenplaats Eulerinstituut met ervoor in het bloemperk een bekende formule uit de grafentheorie