

Henk Broer

Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800
9700 AV Groningen
broer@math.rug.nl

Computergebruik en demathematisering

Hoewel wiskunde een centrale rol heeft in de maatschappij, verdwijnt haar zichtbaarheid steeds verder onder de remote control. Veel resultaten van onderzoek zijn reeds ondergebracht binnen software pakketten en vervolgens vergeten. Dit geldt ook voor veel expliciete wiskunde in het onderwijs. Wat dat laatste betreft lijkt het er inmiddels op alsof we met het badwater ook het kind weggooiden. Deze problematiek wordt hieronder belicht met een uitgebreid voorbeeld over het verantwoord inzetten van ICT bij de behandeling van het wiskundig modelleren.

De huidige maatschappelijke positie van wiskunde staat onder een merkwaardige spanning. Enerzijds is het min of meer evident dat de wiskunde overal om ons heen aanwezig is. Om te beginnen wordt in veel wetenschapsgebieden, zoals mathematische fysica (denk aan, bijvoorbeeld, snaartheorie, nanoscience of statistische mechanica), maar ook in de levenswetenschappen (populatiedynamica, et cetera) en in de meteorologie (onder meer klimaatmodellen) geavanceerde wiskunde toegepast. Dit geldt evenzeer voor een gebied als elektrotechniek, met toepassingen in de ICT (uw notebook en mobieltje, uw pinpassen, uw cd's, uw nieuwe auto, et cetera) maar ook in het vliegverkeer (zowel het vliegen zelf als de logistiek eromheen) en in de medische technologie (uw pacemaker

en uw MRI-scan). In alle gevallen stimuleren deze toepassingen de ontwikkeling van de wiskunde als zelfstandige discipline.

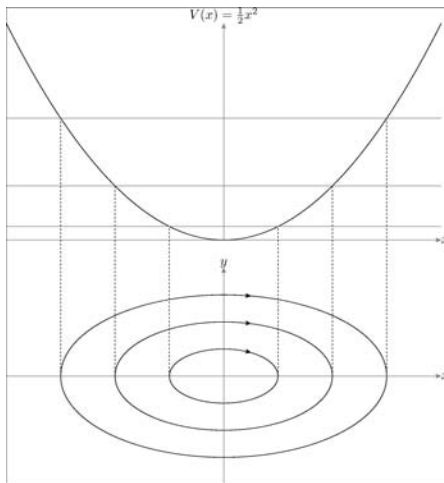
Anderzijds is veel van dit alles tamelijk onzichtbaar, behalve voor kenners. De wiskunde zit namelijk vaak achter knoppen en schakelaars of verloopt zelfs volautomatisch. Verder wordt op veel instituten en bedrijven onderzoek verricht, waarbij allerlei 'expliciete' aspecten van wiskunde in softwarepakketten zijn ondergebracht. Enkele voorbeelden van dergelijke instituten zijn TNO, de KPN, de universiteiten, het Europees Galileoproject, en zo meer.

Deze tendens van *demathematisering* vindt haar weerslag in het onderwijs. Dit geldt met name voor het beroepsonderwijs (onder meer het hbo — helaas inclusief de lerarenop-

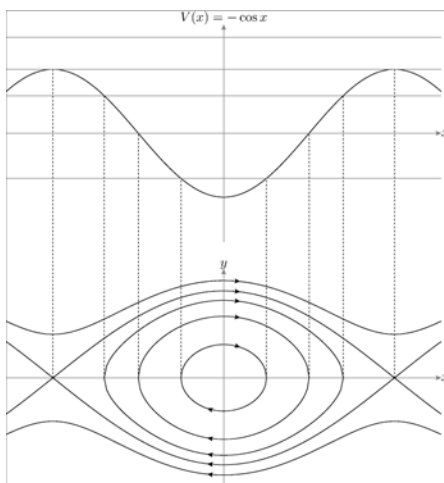
leiding wiskunde), maar inmiddels ook voor delen van het havo en het vwo. Zo is een groot deel van het natuurkundeonderwijs momenteel gedemathemiseerd. Aan de andere kant is inmiddels ook duidelijk geworden dat het vervolgonderwijs zeer ontevreden is over de kwaliteit van de instroom aan studenten. Deze klacht klinkt universeel over een grote breedte van het afnemend veld. Het gaat dan om reken- en formulevaardigheid, maar tegelijkertijd om zaken als inzicht en redeneren. Gelukkig wordt dit probleem op veel plaatsen ernstig genomen, zie onder meer het visiedocument natuurkunde [11], waar men pleit voor terugkeer van de wiskunde.

Opzet

In het algemeen zij gesteld dat de ICT-toepassingen zoals internet, Google, powerpoint, et cetera als zegeningen mogen worden aangemerkt bij vrijwel alle vormen van onderwijs. De wiskunde heeft bovendien een hechte band met ICT via numeriek en symbolisch rekenen en via de vele grafische mogelijkheden. Verder bestaan softwarepakket-



Figuur 1 Faseportret veer



Figuur 2 Faseportret slinger

ten als Mathematica, Maple, SPSS (voor statistiek) en zo meer, die bij wiskundig getint onderzoek en bij het onderwijs ingezet kunnen worden. Ook in het havo en vwo gebruikt men (grafische) rekenmachines en softwarepakketten.

Hieronder beschouwen we kort de algemene situatie rond wiskunde en ICT. Uitgangspunt is het feit dat klakkeloos gebruik van ICT, op een 'learn to use' basis, bij leerlingen en studenten inzicht en formulevaardigheid belemmert en daarmee een der oorzaken vormt voor de zojuist geformuleerde universele klacht.

Dit is ook de analyse in het visiedocument wiskunde [10], waarin daarom juist gepleit wordt voor een aanpak gericht op 'use to learn'. In het bijzonder sta ik stil bij enige modellen: in een uitgewerkt voorbeeld, betreffende oscillaties, wordt een scenario geschetst hoe wiskunde en ICT op bevredigende wijze met elkaar te verenigen zijn. Dit leidt, bijna en passant, tot de numerieke detectie van chaos in de vorm van een Hénon-achtige

vreemde aantrekker in een model voor de schommel (zie figuur 3 boven).

Wiskunde en ICT

We bespreken eerst de verhouding tussen expliciete wiskunde en ICT en daarna een mogelijke rol van ICT bij modellen.

Expliciete wiskunde

Expliciete wiskunde wordt vaak 'ouderwets' genoemd, met als bijmaak 'saai'. Meestal hebben de bijbehorende onderwerpen een lange schoolse traditie, ze zijn vaak algoritmisch van aard lenen zich dus goed voor ICT-implementatie. Het gaat dan om al het (hoofd-)rekenen met getallen en met letters, om breuken optellen, ontbinden in factoren, haakjes verdrijven, enzovoort, aangevuld met de calculus (algebra). Dat laatste omvat functies, grafieken, goniöformules, differentiëren en integreren. Hiertegenover staat een 'moderner' gebruik van wiskunde, dat zich meer richt op interdisciplinaire zaken aangaande levenswetenschappen, mathematische fysica of klimaatvariabiliteit. Dit geheel heeft de bijmaak 'interessant'. Vergelijk de onderwerpen zoals die bij het nieuwe bètavak Natuur-, Leven en Technologie genoemd worden [16].

Door veel bèta's, econom(etr)isten en dergelijke wordt expliciete wiskunde vrijwel dagelijks beoefend, waarbij de intensiteit nogal varieert en er deels ondersteuning met ICT plaatsvindt. Overigens is opvallend dat mensen, die gemakkelijk een Mathematica-sessie openen, meestal ook goed 'met de hand' kunnen rekenen. Hun symbol sense helpt hun om scherp te kunnen beoordelen hoe de ICT effectief in te zetten en om ICT-fouten sneller te ontdekken.

Een tegenhanger van het bovengenoemde uitgangspunt is de stelling dat zonder een gezonde dosis expliciete wiskunde interessante interdisciplinaire onderwerpen niet goed toegankelijk zijn en niet met voldoende diepgang en begrip te behandelen zijn. Positiever geformuleerd zegt deze bewering dat een goede beheersing van expliciete wiskunde maakt dat je op een plezierige manier met meer ingewikkelde vraagstukken bezig kunt zijn.

Dit gezegd zijnde is het uiteraard bij elk schoolprogramma een afweging hoeveel expliciete wiskunde aangeboden moet worden.

Modelleren

Modelleren is een van de activiteiten die zich goed leent voor gebruikmaking van ICT. Zowel buiten als binnen de universiteiten rust deze activiteit zwaar op computertools, we noemden hiervan reeds voorbeelden. Het ligt dus voor de hand dat ook scholen zulke tools

gaan gebruiken. Op dit moment zijn voorbeelden van zulke grafische modelleeromgevingen systeemodynamische packages als *power-sim* en *coach 6*.

Hierbij mag het volgende aangetekend worden. Modelleren is buitengewoon moeilijk, zeker wanneer het om 'realistische' situaties gaat. Men denke hierbij aan vragen aangaande klimaatvariabiliteit (Wordt Europa op een termijn van honderd jaar warmer of kouder? En op een termijn van tienduizend jaar? Hoe kan de Golfstroom van richting omkeren?) of aan de verspreiding van vogelgriep over het aardoppervlak, het vliegen van een Boeing 747 (laat staan van een levende vogel) en zo kunnen we nog wel even doorgaan. Het is om te beginnen niet eenvoudig te weten welke variabelen een rol (moeten) spelen in zulke processen en om relevante wiskundige modelveronderstellingen te formuleren. Daarna is er nog het probleem van de numerieke tools waarmee we het model doorrekenen, waarbij de resultaten dan op een grafische manier worden getoond. Hier zitten dus twee vertaalslagen in: van de realiteit naar het model en van het model naar numerieke uitvoer, die beide een rol spelen bij de evaluatie van het geheel.

Bij gebruik van een modelleertool als een black box kan hier het overzicht zoekraken. Bij velen leeft de vrees dat de invoering van zulke tools bovengeschetste problematiek in negatieve zin zal versterken. Dit geeft dan nog eens extra aanleiding tot de reeds genoemde klacht over het gebrek aan wiskundig vermogen. Deze kwestie speelt bij het modelleren des te meer, omdat de achterliggende wiskunde zeer veel verder reikt dan die van het voortgezet onderwijs.

Als je wilt leren modelleren, dan moet je zijn bij mensen die er ervaring mee hebben. Jarenlange ervaring heeft geleerd dat je bij voorkeur zou moeten beginnen met een 'schoolse' aanpak, gebaseerd op 'first principles', zoals die uit de natuurkunde, scheikunde, economie, en dergelijke, bekend zijn. Een model kan dan bijvoorbeeld bestaan uit een kracht- of ladingsevenwicht, waarbij wetten van Newton, Hooke, Ohm, Kirchhoff, enzovoort, worden toegepast. De bijbehorende contexten kunnen dan meer of minder eenvoudige mechanische of elektrische systemen zijn. Gedachte is dat leraar en leerling, gewapend met een flink arsenaal aan expliciete wiskunde, met dit soort 'first principles' modellen ervaring en intuïtie opdoen. Hierbij kan de inzet van ICT zeer wenselijk zijn, maar het liefst niet te vroeg, en zeker niet 'in plaats van'. In het algemeen zouden in het be-

gin black box situaties zoveel mogelijk vermeden moeten worden. Bij de inzet van numerieke tools zou gedemonstreerd kunnen worden hoe zeer bepaalde keuzen (bijvoorbeeld stapgrootten) effect kunnen hebben op de uiteindelijke uitvoer.

Verdere gedachte is dat de leerling op deze manier rijp wordt gemaakt om complexere situaties te modelleren, waarbij deze een kritische houding heeft ontwikkeld ten aanzien van modelkeuzen en een zeker respect voor de onderliggende wiskunde.

Oscillaties, een schoolvoorbeeld

Hieronder volgt een voorbeeld van een wat uitgebreidere, uit de natuurkunde zeer bekende context, bedoeld om bovenstaande gedachtegang nader toe te lichten. Er wordt eerst schools over modellen gesproken volgens 'first principles' met gebruikmaking van de nodige calculus, waarna ICT op passende wijze wordt ingezet. Hierbij wordt met betrekkelijk geringe moeite toegang verschaft tot een hedendaags begrip als *chaos*.

'First principles' modellen

Om de gedachten te bepalen beschouwen we de trillingen van een veer of slingerbewegingen. Een overkoepelende naam is *oscillaties*, waarbij meteen ook gedacht kan worden aan verschijningsvormen zoals die in andere wetenschapsgebieden voorkomen. We komen hier nog even kort op terug.

Laat x een (1-dimensionale) variabele zijn, die de positie van het bewegende massapunt (met massa m) aangeeft als functie van de tijd t . Voor de oscillatie is een teruggedrijvende kracht nodig, die we in eerste instantie alleen van de positie x laten afhangen. De beweging wordt bepaald door Newtons (tweede) wet

$$F = m a,$$

die leidt tot de differentiaalvergelijking:

$$F(x) = m x'' \quad (1)$$

waarin

$$x'(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad (\text{snelheid})$$

$$x''(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) \quad (\text{versnelling}).$$

Het is nu zaak verstandige, vaak kwalitatieve, dingen te zeggen over de onbekende functies $x = x(t)$.

Veer en slinger

Voor de veer wordt het model verder gespecificeerd door de teruggedrijvende kracht bij een uitwijking x vast te leggen als

$$F(x) = -kx,$$

waarbij k de zogenaamde veerconstante is. Deze keus staat bekend als de wet van Hooke. Ingevuld in (1) leidt dit tot de lineaire differentiaalvergelijking

$$x'' = -\omega^2 x, \quad (2)$$

waar we schrijven $\omega^2 = k/m$.

Stelling 1 (Algemene Oplossing (2)): *De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking (2) wordt gegeven door $x(t) = R \cos(\omega t + \phi)$, waarbij de integratieconstanten R en ϕ als volgt samenhangen met de beginwaarden: $x(0) = R \cos \phi$ en $x'(0) = -\omega R \sin \phi$.*

Een bewijs van stelling 1 volgt later.

Opmerking: De bewegingsvergelijking (2), waarbij ω niet verder gespecificeerd is, blijkt in vele omstandigheden een goed model te zijn. Te denken valt aan een U-buis met vloeistof, of aan een elektrisch LC-netwerk. Ook wordt dit model vaak gebruikt bij benaderingen. Bij de contextvrije vorm $x'' = -\omega^2 x$ spreekt men wel van de *harmonische oscillator*. Hiervoor geldt onze analyse onverkort.

Bij de slinger met lengte ℓ is de uitwijking x de hoek met de verticaal en wordt de teruggedrijvende kracht gegeven door de zwaartekracht (versnelling g). Dat geeft

$$F(x) = -mg \sin x.$$

Als x in radialen gemeten wordt is $a = \ell x''$, hetgeen leidt tot de differentiaalvergelijking

$$x'' = -\omega^2 \sin x, \quad (3)$$

waarbij nu $\omega^2 = g/\ell$. Bij de veer is de periode $2\pi/\omega$ onafhankelijk van de amplitude R . Deze eigenschap heet wel *isochronie*, een eigenschap die bij de slinger niet blijkt te gelden. Dit fenomeen heeft Huygens aangezet tot zijn *Horologium Oscillatorium* (1673), vergelijk onder meer [4, 7].

Voor kleine waarden van x bestaat de benadering $\sin x \approx x$: die voor kleine waarden van (x, x') aanleiding geeft tot zogenaamde *kleine* oscillaties van de slinger. In tegenstelling tot wat Galileo dacht, is ook hier de slinger niet isochroon.

Een expliciete oplossingsprogramma in termen van elementaire functies is voor de slinger niet uitvoerbaar vanwege het optreden van elliptische integralen. We maken daarom een omweg langs het *fasevlak*.

Lijnelementen

Het fasevlak heeft coördinaten (x, y) , waarbij $y = x'$. Een algemene oscillator

$$x'' = F(x) \quad (4)$$

als boven omschreven (gemakshalve schaalden we tot $m = 1$), geeft dan aanleiding tot

het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= F(x) \end{aligned} \quad (5)$$

Uit de theorie [2, 12] is bekend dat een stelsel als (5) *deterministisch* is: gegeven de huidige toestand $(x(0), y(0))$, ligt de hele toekomst $(x(t), y(t))$ met $t > 0$ vast als integraalkromme in het (x, y) -fasevlak.

Uit (5) kan de tijd t geëlimineerd door overwegingen als

$$\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx} / \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx},$$

hetgeen aanleiding geeft tot het *lijnelementenveld*

$$y dy - F(x) dx = 0. \quad (6)$$

De integraalkrommen van dit lijnelementenveld zijn precies de oplossingen van (5) waarbij de tijdsparametrisering is 'vergeten'.

Energiebehoud en faseportretten

We willen nu een kwalitatieve beschrijving geven van de integraalkrommen van het lijnelementenveld (6). Hiertoe kan gebruik gemaakt worden van de *energiefunctie*

$$H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + V(x), \quad (7)$$

$$\text{waarin } \frac{dV}{dx}(x) = -F(x).$$

Men denke hierbij aan het format 'kinetische' plus 'potentiële' energie.

Stelling 2 (Behoud van Energie): *In bovenstaande zijn de niveaalkrommen $H(x, y) = E$ de integraalkrommen van het lijnelementenveld (6).*

Een algemeen bewijs van Stelling 2 is te geven door de verandering $H'(t) = \frac{d}{dt} H(x(t), y(t))$ te beschouwen langs een oplossing $(x(t), y(t))$ van (5). Met de kettingregel blijkt dat

$$H' = \frac{\partial H}{\partial x} x' + \frac{\partial H}{\partial y} y' = 0.$$

Een ander bewijs krijg je door $H(x, y) = E$ om te schrijven tot de vergelijking

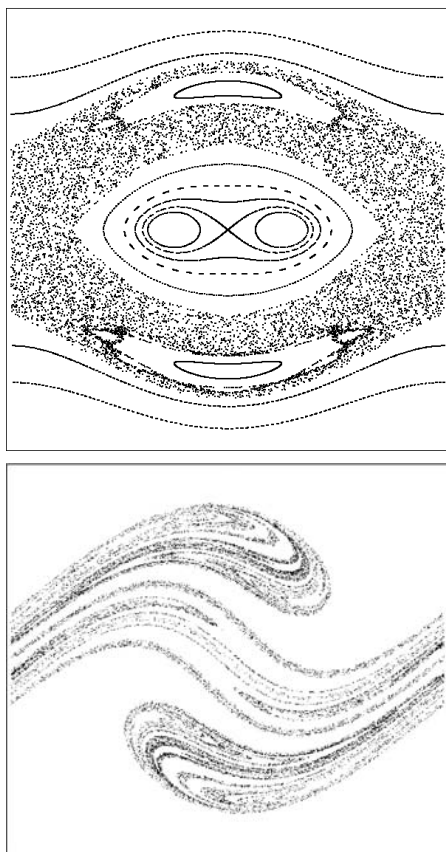
$$y = \pm \sqrt{2(E - V(x))},$$

en deze in (6) te substitueren.

Met behulp van Stelling 2 kunnen we de integraalkrommen in het geval van veer en slinger vrij gemakkelijk beschrijven.

Veer

Voor de veer geldt in deze beschrijving $F(x) = -\omega^2 x$ en we kiezen $V(x) = \frac{1}{2} \omega^2 x^2$ hetgeen leidt tot de energie $H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2$



Figuur 3 Chaos. Boven: $c = 0$; onder $c > 0$

Voor $E > 0$ krijgen we zo volgens Stelling 2 integraalkrommen met vergelijking

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = E. \tag{8}$$

Dit is voor elke $E > 0$ een ellips. De halve horizontale as van de ellips is juist de amplitude R , die via de formule $E = \frac{1}{2}\omega^2 R^2$ samenhangt met de waarde E van de energie. De waarde $E = 0$ correspondeert met het evenwicht $(x, y) = (0, 0)$ waarbij de veer in ruste is. Een schematische weergave van de functie V met enkele van de integraalkrommen (8) is weergegeven in Figuur 1, een zogenaamd faseportret.

Bewijs stelling 1: Nu is het ook eenvoudig een bewijs van Stelling 1 te geven. Door een schaling van de tijd $t \rightarrow \omega t$ kan de differentiaalvergelijking (2) gereduceerd worden tot het speciale geval

$$x'' = -x, \tag{9}$$

waartoe we ons even mogen beperken zonder schade aan de algemeenheid. De vergelijking (8) gaat dan over in $x^2 + y^2 = R^2$, die nu een cirkel voorstelt. We kunnen hieruit de tijdsparametrisering van de oplossing reconstrueren. Immers, schrijven we

$$x(t) = R \cos \varphi(t), \quad y(t) = R \sin \varphi(t),$$

dan volgt uit het feit dat $y(t) = x'(t)$, alweer met de kettingregel, dat ook

$$y(t) = -R\varphi'(t) \sin \varphi(t)$$

en dus dat $\varphi'(t) \equiv -1$. Hieruit volgt dat de algemene oplossing van (9) de gedaante $x(t) = R \cos(t + \phi)$ heeft, waaruit het gestelde volgt.

Slinger.

Voor de slinger is $F(x) = -\omega^2 \sin x$ en nemen we $V(x) = -\omega^2 \cos x$, hetgeen via stelling 2 leidt tot integraalkrommen

$$\frac{1}{2}y^2 - \omega^2 \cos x = E, \tag{10}$$

waarbij $E \geq -\omega^2$. De functie V en verschillende integraalkrommen zijn weergegeven in het faseportret van figuur 2. We zien hier verschillende typen krommen. Om te beginnen correspondeert opnieuw het punt $(x, y) = (0, 0)$ met een evenwicht, namelijk dat waarbij de slinger verticaal naar beneden hangt. Voor $(x, y) = (\pm\pi, 0)$ treedt het evenwicht op waarbij de slinger verticaal omhoog staat (de slinger massa zit vast aan een massaloos staafje). Voor $-\omega^2 < E < \omega^2$ treden de bekende slingerbewegingen (oscillaties) op rondom het evenwicht $(x, y) = (0, 0)$. Voor $E > \omega^2$ zien we bewegingen waarbij de slinger over de kop slaat.

Opmerking: In bovenstaande analyse van faseportretten kan men experimenteren met de potentiaal functie V , bijvoorbeeld in gevallen als de Duffing-vergelijking $x'' = x - x^3$, vergelijk met [2, 12]. Hierbij kan naar believen reeds enige ICT worden ingezet.

ICT-inzet

Tot zover hebben we in principe geen ICT hoeven gebruiken. (De figuren maakten we voor de aardigheid met een computer.)

Damping Dit is een goed moment om te gaan experimenteren met wrijving of demping. Zo kan de bewegingsvergelijking (4) veranderd worden tot

$$x'' = F(x) - cx',$$

voor een positieve dempingscoëfficiënt c . Dit leidt tot het systeem

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= F(x) - cy. \end{aligned}$$

Hiervan zijn langs numerieke weg faseportretten te produceren. De wrijving is hier gekozen als recht evenredig met de snelheid $y = x'$, maar ook allerlei andere keuzen zijn mogelijk. Een aardig voorbeeld is de zogenaamde Coulombse of droge wrijving, vergelijk onder meer [7]. Hier ligt inzet van numerieke middelen voor de hand.

Dit laatste geldt eens te meer wanneer

het gaat over ingewikkelder oscillatoren zoals die in de elektronica voorkomen (denk aan de Van der Pol-oscillator) of in de populatiedynamica, meteorologie, chemie en economie. In zulke gevallen kan ook de inzet van modelleer-tools tot de goede mogelijkheid behoren.

Chaos iets anders wat nu in het numerieke bereik ligt is chaos. Als voorbeeld nemen we de bewegingsvergelijking

$$x'' = -\omega^2(1 + \varepsilon \cos t) \sin x - cx', \tag{11}$$

voor positieve constanten c en ε , op te vatten als model voor de beweging van een slinger waarvan de lengte periodiek gevarieerd wordt. Ook denkt men (met een beetje goede wil) vaak aan een slinger waarvan het ophangpunt een verticale harmonische oscillatie ondergaat of aan een schommel. (Dergelijke modellen worden ook veel gebruikt in de natuurkunde van supergeleiding, lasers, enzovoort, [8].) Om ook in dit geval een deterministisch systeem te krijgen moeten we een extra variabele z toevoegen, evenredig met de tijd t . De faseruimte is dus driedimensionaal, met variabelen (x, y, z) , waarop we de systeemvorm

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\omega^2(1 + \varepsilon \cos z) \sin x - cy \\ z' &= 1 \end{aligned} \tag{12}$$

krijgen. Zo'n driedimensionaal vectorveld is niet erg overzichtelijk, maar we kunnen er vat op krijgen door over te gaan op een tweedimensionale afbeelding die eruit bestaat dat we de integraalkrommen van (12) volgen tussen de secties $z = 0$ en $z = 2\pi$, die vanwege de derde vergelijking in (12), dwars op de integraalkrommen staat.

Om meer precies te zijn, de zogenaamde Poincaré-afbeelding van (12) is als volgt gedefinieerd. Neem een integraalkromme $(x(t), y(t), z(t))$, met $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, 0)$ en lees die af op het tijdstip $t = 2\pi$, daarbij opmerkend dat $z(2\pi) = 2\pi$. Dit geeft aanleiding tot een punt met coördinaten $(x_1, y_1, 2\pi)$ en we krijgen zo een (gladde) afbeelding

$$\Phi : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1),$$

de Poincaré-afbeelding geheten en wegens periodiciteit in de z -richting ook wel terugkeerafbeelding genoemd [5, 9, 12].

Lezen we de genoemde integraalkromme $(x(t), y(t), z(t))$ verder af op de tijdstippen $t = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$, daarbij opmerkend dat $z(2\pi k) = 2\pi k$, dan krijgen we op soortgelijke manier een reeks punten

$(x_k, y_k) = (x(2\pi k), y(2\pi k)), k = 0, 1, 2, \dots$
in het (x, y) -vlak. Er geldt nu voor elke gehele k dat

$$\Phi^k(x_0, y_0) = (x_k, y_k),$$

de punten krijg je door iteratie van de afbeelding Φ , vergelijk ook [5, 9, 12]. Fysici noemen daarom Φ ook wel eens de stroboscopische afbeelding van (12). In Figuur 3 zijn banen van deze afbeelding geplot, boven voor $c = 0$, het wrijvingsloze geval, en onder het geval $c > 0$, dus juist met wrijving. Onder een baan verstaan we een rij iteraties $\{\Phi^k(x_0, y_0)\}_{k \geq 0}$.

Wat valt er uit deze numerieke plots te leren? Wellicht teveel om hier allemaal op te noemen. Een aardigheidje is dat zich in de twee ogen van de linkerfiguur een periodiek punt van Φ bevindt van periode 2, dat hoort bij een 4π periodieke oplossing van (12) (zie [5] voor een relatie met het slingerende wie-

rookvak in Santiago de Compostela). Hierbij is belangrijk dat $\omega \approx \frac{1}{2}$, hetgeen betekent dat er resonantie optreedt. Wat ons nu interesseert is dat in het linker plaatje ($c = 0$) een grote puntenwolk voorkomt, die bestaat uit één baan van Φ , dus uit één rij geïtereerden. De rechter figuur ($c > 0$) bestaat zelfs geheel uit één baan. Deze twee banen zijn gerelateerd aan chaos, dat te maken heeft met een grillig verlopende toekomst. In het rechter geval zien we een *vremde* aantrekker, die veel overeenkomsten vertoont met de beroemde Hénonattractor [1, 3, 9, 14]. Voor achtergrond zie ook [6, 13, 15, 17]. Opgemerkt mag worden, dat in beide gevallen de achterliggende wiskunde nog veel vragen bevat.

Alleen als het echt iets toevoegt

Klakkeloos gebruik van ICT draagt bij aan de demathemativering van het voortgezet onder-

wijs, hetgeen een groot probleem vormt bij formulevaardigheid van de instroom in het hoger onderwijs en andere delen van het afnemend veld. De vrees bestaat dat dit probleem alleen maar verergerd zal worden bij de inzet van modelleertools. In een voorbeeld betreffende 'oscillaties' zien we, hoe je aan modellen kunt werken waarbij ICT alleen gebruikt wordt als het echt nodig is. Er wordt bovendien geïllustreerd hoe met expliciete wiskunde kan worden geoefend en hoe daarbij geredeneerd kan worden. Hierbij wordt nu en dan een verwijzing naar de literatuur gegeven. Dergelijke voorbeelden kunnen hopelijk docenten en tekstschrijvers inspireren bij het ontwikkelen van materiaal, deels cursorisch en deels voor werkstukken en modulen. ←

Referenties

- 1 M. Benedicks en L. Carleson, 'The dynamics of the Hénon map', *Ann. Math.* **133** (1991) 73–169.
- 2 P. Blanchard, R.L. Devaney en G.R. Hall, *Differential Equations* 3rd Ed., Thomson Higher Education, 2006
- 3 H.W. Broer, 'The how and what of chaos', *Nieuw Arch. Wisk. 5th series* **1**(1) (2000) 34–43.
- 4 H.W. Broer, 'Huygens' isochrone slinger', *Euclides* **70**(4) (1995) 110–117.
- 5 H.W. Broer, 'De chaotische schommel', *Pythagoras* **35**(5) (1997) 11–15.
- 6 H.W. Broer, J. vd Craats en F. Verhulst, *Het einde van de voorspelbaarheid? Chaostheorie, ideeën en toepassingen*. (Aramith Uitgevers & Epsilon Uitgaven **35** 1995.
- 7 H.W. Broer, J. Epema en M. Kuipers, *Oscillaties: Trillingen en Slingerbewegingen vanu-
it Wiskundig Oogpunt*, Rijksuniversiteit Groningen, Februari 1987.
- 8 H.W. Broer en B. Krauskopf, 'Chaos in periodically driven systems'. In: B. Krauskopf and D. Lenstra (eds.), *Fundamental Issues of Nonlinear Laser Dynamics*, American Institute of Physics Conference Proceedings **548** (2000) 31–53.
- 9 H.W. Broer en F. Takens, *Dynamical Systems and Chaos*, te verschijnen bij Epsilon Uitgaven 2008.
- 10 Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs, *Rijk aan betekenis*, Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs, Utrecht, Maart 2007.
- 11 Commissie Vernieuwing Natuurkundeonderwijs havo/vwo, *Natuurkunde leeft*, Visie op het vak natuurkunde in havo en vwo, Nederlands Natuurkundige Vereniging, Mei 2006.
- 12 J.J. Duistermaat en W. Eckhaus, *Analyse van Gewone Differentiaalvergelijkingen*. Epsilon Uitgaven **33** 1995.
- 13 E.N. Lorenz, *The Essence of Chaos*. University of Washington / University College London Press 1993.
- 14 H.-O. Peitgen, H. Jürgens en D. Saupe, *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*. Springer-Verlag 1992.
- 15 D. Ruelle, *De Wetten van Toeval en Chaos*. Aramith Uitgevers 1991.
- 16 Stuurgroep Natuur, Leven en Technologie. *Contouren van een nieuw bètavak. Visie op een interdisciplinair vak: Natuur, Leven en Technologie*. April 2007
- 17 F. Verhulst, *Chaos en Orde*. Zebra-reeks **16**, 2003.