Piet Groeneboom
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031, 2600 GA Delft
p.groeneboom@ewi.tudelft.nl

Piet Groeneboom

Afscheidsrede

Summa cogitatio

Wat zouden belangrijke onderwerpen van onderzoek moeten zijn? De politiek, de wetenschappelijke beleidsmakers en de wetenschappers zelf houden er zeer verschillende meningen op na. Voor werk aan de grote wiskundige problemen wordt in Nederland maar weinig geld beschikbaar gesteld. Waar zou dit toch van komen? Piet Groeneboom, emeritus hoogleraar Statistiek aan de Technische Universiteit Delft en de Vrije Universiteit Amsterdam, zoekt een antwoord op deze vraag in zijn afscheidsrede, gehouden op 8 september 2006.

Ik sta in het keukentje van mijn tijdelijk verblijf in Seattle en lees daar de tekst die op het afwasmiddel Seventh generation staat. Misschien is dit iets waar een excellent wetenschapper geen tijd voor zou mogen hebben. Misschien laat dit zelfs wel zien dat ik mij niet tot dit illuster gezelschap mag rekenen. Maar goed . . . ik lees: "In our every deliberation, we must consider the impact of our decisions on the next seven generations." From the great law of the Iroquois confederacy. En . . .u zult het misschien niet geloven, maar ik voel mij plotseling ontroerd. Om verschillende redenen. In de eerste plaats om de inhoud van de tekst en de mooie manier waarop het is geformuleerd. In de tweede plaats vanwege het feit dat dit zo maar op een afwasmiddel staat. Ik vraag mij af of het mogelijk is dat ik in Nederland in mijn keuken sta en een vergelijkbare tekst op mijn afwasmiddel zie staan. En ik weet: "Nee, het is niet mogelijk." En ten derde ben ik ontroerd vanwege het idee om terug te grijpen op een manifest van een aantal indianen in de omgeving van New York.

Dit moment van ontroering komt op dezelfde dag dat ik via de e-mail een aansporing heb gekregen om een voorstel te schrijven voor een initiatief van het ministerie, getiteld *Smart Mix*, waaruit ik nu ook wat zal laten zien (uit: Staatscourant 27 maart 2006, nr. 61, pag. 11).

"Het Smart Mix-programma is een strategische inzet van honderd miljoen euro uit de extra middelen voor de kenniseconomie. Deze middelen worden als breekijzer ingezet om in samenhang en balans twee knelpunten in de Nederlandse kenniseconomie aan te pakken: het versterken van focus en massa in het **excellente** wetenschappelijke onderzoek en de kennisparadox. De kennisparadox wordt aangepakt door het vitaliseren van samenwerking tussen bedrijfsleven en kennisinfrastructuur op voor Nederland cruciale terreinen in combinatie met het versterken van **excellente** onderzoeksgroepen. Het Smart Mix-programma onderscheidt zich van bestaande instrumenten door de beoogde focus en massa in **excellent** onderzoek in combinatie met de wisselwerking en samenspel in een breed deel van de kennisketen. Op basis van de vraag van bedrijfsleven en/of maatschappelijke organisaties in ons land, wordt in dynamische netwerken **excellent** wetenschappelijk en/of technologisch onderzoek uitgevoerd." En:

"Het Smart Mix-programma heeft twee gerelateerde doelen, het creëren van maatschappelijke en economische waarde (valorisatie) in de brede betekenis van het begrip en het versterken van focus en massa in wetenschappelijk **excellent** onderzoek."

NAW Fried Air Incentives

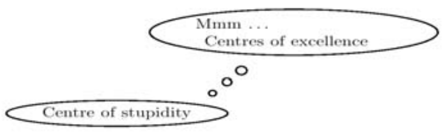
Misschien zal een aantal onder u (hoewel ik wat dat betreft zo langzamerhand van niets meer zeker ben) begrijpen dat ik na het lezen van de ministeriële taal in het Smart Mix-manifest me niet zo zeer geroerd als wel beroerd voelde. Het gaat hier om iets dat belangrijker is dan je misschien oppervlakkig geneigd zou zijn te denken. Ik word geconfronteerd met een voorstel dat de titel *Smart Mix* heeft. Ik weet dan meteen dat het om iets gruwelijks gaat, alleen al vanwege de titel van het voorstel. Maar misschien is de wetenschappelijke wereld in Nederland al zo vaak door ministeries gebombardeerd met idiote voorstellen met navenante titels dat niemand er meer aanstoot aan neemt. Er is een zekere berusting ingetreden, net als bij reizigers die gebruikmaken van de Nederlandse Spoorwegen. In ieder geval kon ik in de discussie over Smart Mix niets van mijn eigen weerzin ten aanzien van naam en voorstel terugvinden. Het is misschien de macht van de rinkelende geldbuidel die de arme wetenschappers wordt voorgehouden, zodat al gauw een sfeer ontstaat van: ja, we moeten zorgen de boot niet te missen.

Ik wijs er nu even op dat alleen al in de eerste alinea vier keer het woord 'excellent' voorkomt. Dit soort taalgebruik zou ik willen aanduiden met *topdenken*, oftewel *summa cogitatio*.

Het is misschien interessant om te filosoferen over de vraag of de tekst in de Smart Mix subsidieregeling door een computer gegenereerd zou kunnen worden. We zouden bijvoorbeeld kunnen denken aan een computerprogramma dat per alinea minstens vier keer het woord 'excellent' genereert en misschien ook nog een aantal keren 'kenniseconomie', 'kennisparadox', 'valorisatie', 'dynamisch', 'focus', 'massa', enz.

Maar dit te denken is in feite een belediging van de computer. Voor mensen zoals ik, die in een soort symbiose met de computer leven, is de computer een intelligente gesprekspartner. Want wij weten dat de computer vaak met iets aan komt zetten dat we niet hadden verwacht. Dit is niet zo zeer de 'kennisparadox' waar de ministeriële nota over spreekt als wel de paradox dat we zelf van alles in de computer hebben gestopt waarna de computer ons informatie teruggeeft die we niet hadden verwacht. De 'buzzwords' in de nota van het ministerie zijn van een geheel andere aard. Die stammen uit de sfeer van de *windhandel*, om de titel van een van Marten Toonders meesterwerken te citeren.

Ik zal u nu een zogenaamde flow chart van de situatie in de randstad laten zien. Zoals u weet, is de flow chart een populair 'tool' van managers. Linksonder in mijn flow chart is een centrum dat ik helaas niet anders kan benoemen dan 'centre of stupidity', hoe graag ik ook anders zou willen. Vanuit dit centrum borrelen met regelmatige tussenpozen bepaalde dingen op. Zoals:

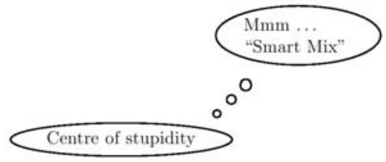


Of: laten we eens de volgende borden ophangen naast de snelweg.

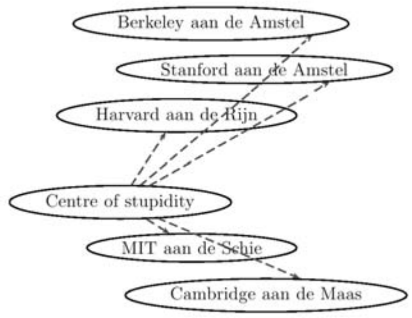
I ♥ afstand houden

Als ik alleen al denk aan het geld dat het ophangen en vervolgens weer verwijderen van deze borden heeft gekost en aan al het wiskundig onderzoek dat voor dit geld gefinancierd had kunnen worden, dan krimpt mijn hart ineen.

Of er borrelt de gedachte op: laten we die wetenschappers in hun ivoren toren eens dwingen de markt op te gaan en te werken voor onze industrie en overheid. Laten we dit voorstel de eigentijdse titel Smart Mix geven!:



Uit de door het topdenkvirus aangetaste kringen van universitaire bestuurders zien we de volgende gedachten opborrelen: kom. . .laten we eens roepen dat Delft het MIT aan de Schie moet worden! Rijmt ook nog. Of: kom. . .laten we roepen dat Leiden Harvard aan de Rijn moet worden. Of: kom. . .laten we roepen dat Rotterdam Cambridge aan de Maas moet worden!. Ik heb zelf ook nog een suggestie voor de twee universiteiten in onze landelijke hoofdstad.



Wat denken bestuurders van universiteiten met kreten als 'Leiden moet Harvard aan de Rijn worden' te bereiken? Ik heb zelf aan een van die Amerikaanse 'topinstituten' op mijn flow chart lesgegeven en ik heb helemaal niet het gevoel dat Nederland zich per se in alle opzichten moet spiegelen aan wat daar gebeurt. Waarom probeert Nederland zich niet gewoon tot doel te stellen goed onderwijs te geven op alle niveaus, te beginnen met de basisschool?

We weten eigenlijk allemaal wel dat het heel slecht gaat met het onderwijs in Nederland. In de bijlage van de NRC van de afgelopen week zegt Margaretha van der Werf van de Rijksuniversiteit van Groningen: ik heb maar één boodschap: stop de daling van het onderwijsniveau. Deze week dinsdag las ik in dezelfde krant het alleszins geloofwaardige artikel *Scholen willen geen academici* van Ton van Haperen, die leraar en leraaropleider is.

Waardoor zou deze daling in het onderwijsniveau kunnen worden tegengehouden? Het antwoord is heel voor de hand liggend. Er moeten geen onbevoegden meer voor de klas staan, het niveau moet bewaakt worden, leraren moeten niet gedwongen worden les te geven in vakken waarin ze niet zijn opgeleid en hun salarissen moeten omhoog. Maatregelen zonder 'glamour' voor de politici, maar wel heel noodzakelijke maatregelen. De leraarsalarissen zijn, zoals bekend, heel laag, zeker in verhouding tot de salarissen in het bedrijfsleven. Dit maakt het leraarschap niet tot een aantrekkelijk beroep. Maar in plaats van de aandacht op de zo juist genoemde zaken te richten, entameert de regering prestigeprojecten.

In het hoger onderwijs is de situatie al niet beter. Bij het aantrekken van een hoogleraar moet natuurlijk het eerste criterium zijn hoe goed hij is in zijn vak en niet hoe goed hij is in het aantrekken van geld 'van buiten' of in het 'managen'. Ik gebruik nu de woorden 'hij' en 'zijn', maar het geldt natuurlijk op dezelfde manier voor 'zij' en 'haar'. Als de hoogleraar op latere leeftijd geen goede ideeën meer heeft of wat uitgeblust raakt, kan hij zich altijd nog wat meer in het bestuurlijk circuit profileren en zich met het aantrekken van geld bezighouden. Om van de creatieve wetenschapsbeoefenaars te eisen dat zij zich voortdurend met het aantrekken van 'geld van buiten' en management bezighouden is een gigantische verspilling van talent en een universiteit onwaardig.

Niettemin is deze mentaliteit, die aansluit bij de initiatieven van het centrum links onder op mijn flow chart van de randstad, er in Nederland stilletjes ingeslopen. Als genoemd centrum vindt dat het bedrijfsleven of de overheidsinstellingen in Nederland te weinig aansluiten bij de voorlopers in kennis op de universiteiten, moet het er voor zorgen dat het bedrijfsleven en de overheidsinstellingen buiten de universiteit zich wenden tot de universiteiten. Ons centrum moet niet proberen onderzoekers op de universiteiten van het werk te houden door ze te dwingen 'de markt op te gaan' onder het motto 'anders krijgen jullie geen geld'. Een universiteit moet als eerste doel hebben onafhankelijk onderzoek te doen en goed onderwijs te geven en niet om om een bedrijf te worden dat gericht is op het aantrekken van 'geld van buiten'.

Op dit punt aangeland, voel ik mij gedwongen een kreet te slaken die weer geïnspireerd is op een titel van een van Marten Toonders meesterwerken, namelijk: *Hoe vreselijk is dit alles!*. Laat ik mij van deze deprimerende zaken afwenden en mij wenden tot het gebied dat mij in mijn loopbaan als hoogleraar zo veel vreugde heeft verschaft: de wiskunde.

In het volgende diagram ziet u de natuurlijke getallen tot en met 117. Ik laat daar nu de priemgetallen donker uit oplichten, op dezelfde manier als waarop ik het woord excellent uit de subsidieregeling Smart Mix van het ministerie donker heb laten oplichten. Een priemgetal is een natuurlijk getal ≥ 2 dat alleen deelbaar is door zichzelf en door 1.

1, **2**, **3**, 4, **5**, 6, **7**, 8, 9, 10, **11**, 12, **13**, 14,
15, 16, **17**, 18, **19**, 20, 21, 22, **23**, 24, 25,
26, 27, 28, **29**, 30, **31**, 32, 33, 34, 35, 36,
37, 38, 39, 40, **41**, 42, **43**, 44, 45, 46, **47**,
48, 49, 50, 51, 52, **53**, 54, 55, 56, 57, 58,
59, 60, **61**, 62, 63, 64, 65, 66, **67**, 68, 69,
70, **71**, 72, **73**, 74, 75, 76, 77, 78, **79**, 80,
81, 82, **83**, 84, 85, 86, 87, 88, **89**, 90, 91,
92, 93, 94, 95, 96, **97**, 98, 99, 100, **101**,
102, **103**, 104, 105, 106, **107**, 108, **109**,
110, 111, 112, **113**, 114, 115, 116, 117

Vervolgens omcirkel ik in deze verzameling de zogenaamde priemtweelingen; dit zijn paren priemgetallen die een afstand gelijk aan 2 hebben.

1, **2**, $\boxed{3}$, 4, $\boxed{5}$, 6, $\boxed{7}$, 8, 9, 10, $\boxed{11}$, 12, $\boxed{13}$, 14,
15, 16, $\boxed{17}$, 18, $\boxed{19}$, 20, 21, 22, **23**, 24, 25,
26, 27, 28, $\boxed{29}$, 30, $\boxed{31}$, 32, 33, 34, 35, 36,
37, 38, 39, 40, $\boxed{41}$, 42, $\boxed{43}$, 44, 45, 46, **47**,
48, 49, 50, 51, 52, **53**, 54, 55, 56, 57, 58,
$\boxed{59}$, 60, $\boxed{61}$, 62, 63, 64, 65, 66, **67**, 68, 69,
70, $\boxed{71}$, 72, $\boxed{73}$, 74, 75, 76, 77, 78, **79**, 80,
81, 82, **83**, 84, 85, 86, 87, 88, **89**, 90, 91,
92, 93, 94, 95, 96, **97**, 98, 99, 100, $\boxed{101}$,
102, $\boxed{103}$, 104, 105, 106, $\boxed{107}$, 108, $\boxed{109}$,
110, 111, 112, **113**, 114, 115, 116, 117

Met betrekking tot de priemgetallen heeft de Hongaarse wiskundige Paul Erdős de volgende wijze woorden gesproken: "God dobbelt misschien niet met het heelal, maar er is iets vreemds aan de hand met de priemgetallen." En met betrekking tot wiskundepraatjes heeft de Nederlandse wiskundige Hendrik Lenstra jr. de wijze woorden gesproken: "Een wiskundepraatje zonder bewijs is als een film zonder liefdesscène."

Ik zal mij daarom voor deze gelegenheid

NAW Fried Air Incentives

wijden aan het bewijs van Euclides dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Aangezien ik goed op de hoogte ben van de situatie in het onderwijs op de Nederlandse basis- en middelbare scholen, ben ik er zeker van dat velen van u dit bewijs nooit hebben gezien. Bovendien is dit bewijs het eerste bewijs in *Proofs from THE BOOK* (Aigner, Ziegler en Hofmann (2004)), opgedragen aan Erdős.

Euclides leefde, naar wordt aangenomen, rond driehonderd jaar voor Christus, en zijn werken, in de Engelse vertaling getiteld *The elements*, zijn nog steeds in paperback te krijgen. In feite heb ik voor deze speciale gelegenheid de drie deeltjes in een Engelse paperbackeditie aangeschaft. De stelling dat er oneindig veel priemgetallen zijn is hier te vinden als Propositie 20 uit boek IX.

Toen ik op de middelbare school zat leerden wij nog om bewijzen op te schrijven. Dit ging in een schema van drie stappen: *gegeven*, *te bewijzen*, *bewijs*. Ouderen onder u zullen een golf van jeugdsentiment voelen bij het zien van de afkortingen geg., te bew. en bew.. We krijgen dus:

geg.: er zijn priemgetallen.

Merk hierbij op dat we eigenlijk niet kunnen zeggen: geg.: de priemgetallen, omdat als ze echt gegeven waren, we meteen zouden weten of het er wel of niet oneindig veel zijn!

Vervolgens krijgen we:

te bew.: er zijn oneindig veel priemgetallen.

We beginnen nu met het bewijs van Euclides in moderne notatie.

bew.: we laten zien dat er een priemgetal groter dan 5 bestaat.

Hier zitten we meteen met een moeilijkheid. Stel we trachten een politicus het bewijs van Euclides uit te leggen en we beginnen met het bovenstaande te zeggen. Onze politicus zou misschien de wenkbrauwen fronsen en iets zeggen in de volgende trant:

"Ik vind ... je moet in die dingen *reëel* zijn. We zagen net al die priemgetallen groter dan 5 passeren. Dus we weten al dat er priemgetallen groter dan 5 zijn. Ik zeg altijd: we moeten natuurlijk wel een beetje reëel blijven!"

Wij zouden dan kunnen antwoorden: "Ho, ho, mijnheer de politicus: in plaats van 5 kunnen we een willekeurig groot priemgetal nemen, het maakt voor de redenering niet uit."

Na deze korte toelichting zetten we ons bewijs voort

Bekijk het getal $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, het kleinste gemene veelvoud van $2, 3$ en 5. Weet u het nog, het KGV en de GGD? Dit kleinste gemene veelvoud is het product van de priemgetallen t/m 5. Tel hier het getal 1 bij op. We krijgen dan:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 30 + 1 = 31.$$

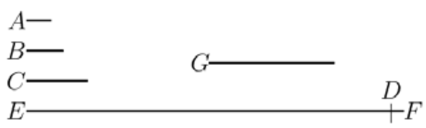
Dit getal laat bij deling door $2, 3$ of 5 rest 1 achter! Dus ofwel dit getal is zelf een priemgetal, ofwel het is geen priemgetal, maar wel deelbaar door een priemgetal groter dan 5. Dus er is een priemgetal groter dan 5!

Deze redenering kunnen we ook houden voor een willekeurige rij $2, 3, 5, \ldots, p_k$ van k opvolgende priemgetallen, want

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$$

laat bij deling door één van de priemgetallen t/m p_k *ook* rest 1 achter! □

Het bewijs van Euclides zelf begint als volgt in mijn vertaling:
"Let A, B, C be assigned prime numbers. Let the least number measured by A, B, C be taken, and let it be DE. Let the unit DF be added to DE. Then EF is either prime or not ..." en wordt geïllustreerd met de volgende tekening:



De lijnstukjes A, B en C representeren respectievelijk de getallen $2, 3$ en 5, het lijnstukje ED het getal 30 en DF representeert het getal 1. Merk op dat Euclides met het lijnstukje G al waarschuwt voor een fout die 2300 jaar later nog vaak gemaakt zou worden, namelijk aan te nemen dat het product van de gekozen priemgetallen $+1$ weer een priemgetal is. Hoewel dit bij $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$ wel het geval is, is dat bijvoorbeeld niet het geval bij:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509.$$

Euclides, bij wie het vermogen tot logisch redeneren goed ontwikkeld was, realiseerde zich dat niets in de redenering liet zien dat het gevormde product $+1$ weer een priemgetal was. Wel liet de redenering zien dat *als* het gevormde product $+1$ deelbaar was door een priemgetal kleiner dan het gevormde product $+1$, dit priemgetal in ieder geval groter moest zijn dan het grootste getal in het product.

Dit basisfeit met betrekking tot ons getallenstelsel, dat al meer dan tweeduizend jaar geleden bekend was aan Euclides, is, voorzover ik weet, nog steeds niet in ons voortgezet onderwijs terecht gekomen. Het is mijzelf niet verteld op de middelbare school en het is mijn zoons ook niet verteld. Geen wonder dat er in Nederland zo weinig scholieren wiskunde gaan studeren! Voor mensen die hier gevoelig voor zijn, en dat zijn er misschien meer dan je zou denken, geeft dit bewijs van Euclides een schoonheidsbeleving. Dat is van een geheel andere orde dan in een wiskundeboekje voor middelbare scholieren het wortel trekken 'toe te lichten' met een cartoon over een tandartsbehandeling!

Er is ook een overdreven nadruk op waar het allemaal goed voor zou moeten zijn. Ik herinner me televisie-uitzendingen waar scholieren met hun leraar zwoegend buiten in de weer waren in het kader van het 'dichter bij de mens brengen' van de wiskunde. Die tijd hadden ze beter kunnen besteden aan het bestuderen van het zo juist gegeven bewijs van Euclides!

Als je beseft dat ongeveer driehonderd jaar voor Christus Euclides met alle gebrekkige hulpmiddelen uit die tijd, zonder de notatie die we tegenwoordig hebben, in staat was om een bewijs te geven dat er oneindig veel priemgetallen zijn en dat binnenkort, als wiskunde ook nog facultatief zou worden op de middelbare school, dit basisfeit van ons getallenstelsel geheel buiten het bereik van een groot aantal scholieren zal raken, dan kun je alleen maar concluderen tot een toenemende domheid van de mensheid, en van de Nederlanders in het bijzonder.

Euclides kwam uit de school van Plato. Het komt mij enigszins onwaarschijnlijk voor dat Plato en Euclides hun werk hebben gedaan, gemotiveerd door de zogenaamde gesel van de markt, om de woorden van een minister uit een eerder kabinet te gebruiken. Niettemin benadert de 'impact' van Euclides de 'impact' van de bijbel. En hoewel we dus kunnen constateren dat de 'impact factor' van Euclides ongeveer 2300 jaar later bijzonder groot is gebleken te zijn, betwijfel ik ook of die 'impact factor' al heel erg groot was ten tijde van Euclides zelf.

Politici en bestuurders zouden zich meer moeten realiseren dat "In our every deliberation, we must consider the impact of our decisions on the next seven generations". Een wiskundige die een stelling bewijst die iets voorstelt doet mogelijk iets met "positive impact on the next seven generations". Waaraan ik moet toevoegen dat 'impact' iets heel anders is dan wat tegenwoordig onder 'impact factor' wordt verstaan. Laatstgenoemde 'impact factor' heeft meer te maken met de waan van de dag.

Ik wil nu aandacht besteden aan een aantal vermoedens met betrekking tot de priemgetallen, waarvan het oudste door Euclides is geopperd (volgens Tao (2006); ik heb dit niet zelf kunnen verifiëren).

- *Priemtweelingvermoeden* (Euclides, ongeveer driehonderd jaar voor Christus?): Er zijn oneindig veel paren $(p, p+2)$ van priemgetallen die afstand 2 tot elkaar hebben: $(3,5), (5,7), (11,13), (17,19), \ldots$
- Het *oneven Goldbachvermoeden* (Goldbach, 1742): Elk oneven getal ≥ 7 is de som van drie priemgetallen: $7 = 2+2+3$, $9 = 3+3+3$, $11 = 3+3+5$, enz.
- Het *even Goldbachvermoeden* (Euler, 1742): elk even getal ≥ 4 is de som van twee priemgetallen: $4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 3+5$, enz.
- *Rekenkundige rijenvermoeden*: de priemgetallen bevatten oneindig veel rekenkundige rijen van willekeurige (maar wel eindige) lengte ≥ 3.
  Rekenkundige rijen van lengte 3 zijn: $(3,5,7), (5,11,17), (11,17,23)$, een rekenkundige rij van lengte 4 is: $(5,11,17,23)$, enz.
- Het laatste vermoeden is een speciaal geval van het *Erdős-Turánvermoeden* (1936): elke deelverzameling $\{n_1, n_2, \ldots\}$ van de natuurlijke getallen waarvoor geldt
  $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} = \infty$$
  heeft willekeurig lange rekenkundige rijen. Dit vermoeden is 'totaal open', zoals dat heet. Het is zelfs niet bekend of zo'n deelverzameling rekenkundige rijen van lengte 3 bevat.
- Er is ook een \$1,000,000 vermoeden: *Riemannhypothese* (Riemann, 1859): De niet-triviale nulpunten van de ζ-functie liggen op een verticale lijn door $(1/2, 0)$ in het complexe vlak.

Het belang dat wiskundigen aan dit vermoeden hechten wordt geïllustreerd door de volgende uitspraak van Hilbert: "Als ik na vijfhonderd jaar geslapen te hebben wakker word, zal mijn eerste vraag zijn: is de Riemannhypothese bewezen?". De Riemannhypothese is probleem 8 in Hilberts lijst van 23 problemen (Hilbert, 1900). Kort voordat Hilbert zijn lijst van 23 problemen heeft gepresenteerd hadden Hadamard en De la Vallée Poussin bewezen dat de reëele delen van de niet-triviale nulpunten tussen 0 en 1 liggen (Hadamard en De la Vallée Poussin (1896)). Dat het vandaar nog een grote stap is naar de Riemannhypothese blijkt uit het feit dat de Riemannhypothese nog steeds niet is bewezen (of weerlegd, maar er is in feite weinig twijfel aan de juistheid van deze hypothese).

Het Clay Mathematics Institute (CMI) werd opgericht in september 1998 door Landon T. Clay, een zakenman uit Boston, en zijn vrouw, Lavinia D. Clay. Hun doel was: "to increase and disseminate mathematical knowledge." Kom daar eens om in Nederland! De Riemann hypothese is een van de zeven "Millennium prize problems"; het vermoeden van Poincaré (1904) is een ander. Men denkt op het moment dat Grigori Perelman dit laatste vermoeden heeft bewezen en in aanmerking komt voor de \$1,000,000. Hij heeft al meegedeeld dat het Clay Mathematics Institute eerst de prijs maar eens aan hem toe moet kennen en dan zal hij nog wel zien of hij hem zal accepteren.

Het is grappig om te bedenken dat zowel Andrew Wiles, die aan het eind van de vorige eeuw het vermoeden van Fermat heeft bewezen, als Grigori Perelman uit de Nederlandse onderzoeksscholen gezet zouden zijn vanwege hun gering aantal publicaties. Zij voldoen allebei geenszins aan het criterium van gemiddeld minstens twee papertjes per jaar. Denk alleen al aan de precedentwerking van het toelaten van twee van die onderzoekers met zo'n lage productie in een van onze onderzoekscholen!

We citeren hier uit de beschrijving van de Millennium Prize Problems van het Clay Mathematics Institute:

"The Millennium Prize Problems were selected by the founding Scientific Advisory Board of CMI Alain Connes, Arthur Jaffe, Andrew Wiles, and Edward Witten after consultation with other leading mathematicians. Their aim was somewhat different than that of Hilbert: not to define new challenges, but to record some of the most difficult issues with which mathematicians were struggling at the turn of the second millennium; to recognize achievement in mathematics of historical dimension; to elevate in the consciousness of the general public the fact that in mathematics the frontier is still open and abounds in important unsolved problems; and to emphasize the importance of working toward a solution of the deepest, most difficult problems."

Louis De Branges de Bourcia heeft geclaimd dat hij de Riemannhypothese bewezen heeft in een 124 pagina's tellend manuscript, maar er is grote scepsis in de wiskundige wereld met betrekking tot deze claim. Hij heeft tevens aangekondigd bij het ontvangen van de prijs zijn voorvaderlijk kasteel in Frankrijk te zullen restaureren van het ontvangen geld.

Ik weet zeker dat ik aan de meesten van u met geen mogelijkheid zal kunnen uitleggen wat de Riemannhypothese inhoudt. En hoe komt dat? Door ons schoolonderwijs in de wiskunde. Aangezien velen van u wiskundeonderwijs op de middelbare school genoten zullen hebben dat geen aandacht aan wortels uit negatieve getallen zal hebben besteed, is het onmogelijk om aan u uit te leggen wat de Riemannhypothese inhoudt en ik zal dat dan ook niet proberen.

Er is inmiddels met betrekking tot de vermoedens veel vooruitgang geboekt. Hieronder volgt een (onvolledig) overzicht. Daarbij heb ik de begrippen 'verdwijnende' en 'niet verdwijnende' dichtheid nodig.

Een verzameling natuurlijke getallen B heeft een *niet verdwijnende* dichtheid in een (oneindige) verzameling natuurlijke getallen A als geldt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|B \cap [1,n]|}{|A \cap [1,n]|} > 0. \qquad (1)$$

Hierbij duidt $|C|$ het aantal getallen in de verzameling C aan en $[1,n]$ de verzameling natuurlijke getallen $\{1,\ldots,n\}$. Als ([1]) niet geldt, zeggen we dat B een *verdwijnende* dichtheid in de verzameling A heeft.

- Vinogradov (1937): ieder voldoend groot oneven getal n is de som van drie priemgetallen. Huidige stand: 'voldoend groot': $n > 10^{1346}$. Dus het oneven Goldbachvermoeden is waar voor $n > 10^{1346}$. Het is ook waar voor $n < 10^{20}$.
  Nu nog het gebied tussen 10^{20} en 10^{1346}.
- Van der Corput (1939): Er zijn oneindig veel rekenkundige rijen van lengte 3 in de priemgetallen.
- Szemerédi (1975): Elke verzameling van niet verdwijnende dichtheid in de natuurlijke getallen heeft (oneindig veel) willekeurig lange rekenkundige rijen (de stelling van Szemerédi geldt in feite ook voor de gehele getallen, maar deze is in het volgende niet nodig).
- N.B. Er zijn inmiddels (minstens) vier totaal verschillende bewijzen voor de stelling van Szemerédi, via combinatoriek, Fourieranalyse, ergodentheorie, en (hyper)grafentheorie. Studenten vragen mij vaak, als ik een tweede bewijs geef voor een stelling waarom ik dat doe. Misschien vinden zij één bewijs eigenlijk al te veel. De reden voor het geven van meer bewijzen is natuurlijk dat elk bewijs nieuw inzicht geeft in het resultaat waar het om gaat.
- [9]: De priemgetallen bevatten (oneindig veel) willekeurig lange rekenkundige rijen.

Ik wil nu in de rest van mijn rede vooral ingaan op het laatste resultaat en op de methoden die leidden tot dit resultaat. En passant zal ik

Eruit gegooide priemveelvouden	Verwacht aantal rekenkundige rijen van lengte 3 in de priemgetallen $\le n$	n	Aantal priemtweelingen $\le n$	$1.32032 \int_3^n \frac{dx}{(\log x)^2}$
Niets eruit	$(1/4)n^2/(\log n)^3$	10^6	8168	8246
Veelvouden van 2 eruit	$(1/2)n^2/(\log n)^3$	10^8	440312	440366
Veelvouden van 2 en 3 eruit	$\frac{3}{8}n^2/(\log n)^3$	10^{10}	27412679	27411418
Veelvouden van 2, 3 en 5 eruit	$0.3516\, n^2/(\log n)^3$	10^{12}	1.87059×10^9	1.870560×10^9
...	...			
Veel priemveelvouden eruit ...	$0.3300\, n^2/(\log n)^3$			

Tabel 1 Links: het verwachte aantal rekenkundige rijen van lengte 3 in de priemgetallen $\le n$ wanneer veelvouden van kleine priemgetallen worden weggelaten. Rechts: een vergelijkende tabel met in de tweede kolom uit Tao (2006) het aantal priemtweelingen en in de derde het aantal priemtweelingen dat het vermoeden geeft

nog iets zeggen over het priemtweeling vermoeden. De twee volgende voorbeelden illustreren de begrippen 'verdwijnende' en 'niet verdwijnende' dichtheid.

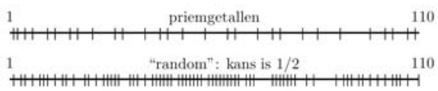
- De verzameling van positieve even getallen B heeft een *niet verdwijnende* dichtheid in de verzameling natuurlijke getallen A. B heeft rekenkundige rijen van willekeurige lengte, in overeenstemming met de stelling van Szemerédi (1975). B heeft zelfs oneindige rekenkundige rijen (dit laatste geldt niet voor de priemgetallen).
- De verzameling van priemgetallen B heeft een *verdwijnende* dichtheid in de verzameling natuurlijke getallen A. "Larger primes are thinner on the ground than small ones" (Gowers, 2002, p. 119). We kunnen dus de stelling van Szemerédi niet (meteen) toepassen.

Voor random verzamelingen natuurlijke getallen geldt het volgende.

- Kleur de natuurlijke getallen rood met een vaste positieve kans, onafhankelijk voor elk getal. De zo ontstane verzameling rode getallen B heeft met kans 1 een *niet verdwijnende* dichtheid in de verzameling natuurlijke getallen A. B heeft dus volgens de stelling van Szemerédi met kans 1 (oneindig veel) rekenkundige rijen van willekeurige lengte.
- Kleur het natuurlijke getal $n \ge 3$ rood met kans $1/\log n$, onafhankelijk voor elke n. De zo ontstane verzameling B heeft met kans 1 een *verdwijnende* dichtheid in de verzameling natuurlijke getallen A. Ook voor zo'n verzameling kan (heel gemakkelijk) bewezen worden dat hij met kans 1 (oneindig veel) rekenkundige rijen van willekeurige lengte bevat, ondanks het feit dat we de stelling van Szemerédi niet (meteen) kunnen toepassen!

Hoe random zijn de priemgetallen? Is er een 'conspiracy of the primes' of kunnen we ze min of meer als een random verzameling getallen behandelen? Vanwege de priemgetalstelling van Hadamard en de la Vallée Poussin (1896) weten we dat de dichtheid van de priemgetallen 'verdwijnt' met een snelheid $1/\log n$. Dus als ze zich 'voldoende random' gedragen, moeten er (oneindig veel) rekenkundige rijen van willekeurige lengte zijn. Ik druk me hier enigszins heuristisch uit, een mentaliteit die misschien wat meer zou moeten worden aangemoedigd in het wiskundeonderwijs!

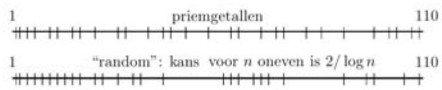
Stel ...in het kader van het Smart Mix gebeuren word ik gevraagd om met een goedkoper probabilistisch model voor de priemgetallen te komen. Mijn partners in Smart Mix zeggen bijvoorbeeld: "U begrijpt: de gesel van de markt dwingt ons om niet steeds die dure priemgetallen te gebruiken voor de beveiliging van ons kostbare systeem". Dan zeg ik: "Uitstekend, hier heb ik een portfolio van modellen voor de priemgetallen". Trendgevoelig als ik ben, weet ik namelijk dat ik het inmiddels niet meer over een portefeuille maar over een portfolio moet hebben. En ik laat als eerste bladzijde van mijn portfolio het volgende plaatje zien:



Op het eerste lijnstuk staan de priemgetallen t/m 109 en op het tweede lijnstuk staan getallen die werden gegenereerd door bij elk natuurlijk getal een zuivere munt te gooien en een streepje te zetten als kruis bovenkomt. Dat wil zeggen: ik heb een C-programmaatje geschreven om dit te doen, waarbij ik gebruik maak van een random number generator. Ik bied de getallen op het tweede lijnstuk aan als model. Maar mijn partners van overheid of bedrijfsleven in het Smart Mix project voelen zich misschien niet geheel overtuigd dat de tweede serie getallen een goed model is voor de priemgetallen.

Dan laat ik de volgende bladzijde van mijn portfolio zien, waarbij ik naar rechts loop door de natuurlijke getallen en in plaats van met een zuivere munt met een steeds onzuiverder munt gooi, die bij het getal n kans $1/\log n$ heeft om boven te komen met kruis.

Misschien zullen mijn Smart Mix partners nu zoiets zeggen als: "Ja, het begint er al wat meer op te lijken. Maar we zien nog steeds die klonterende groepjes, met binnen de groep de afstanden 1. En we weten toch dat na de priemgetallen 2 en 3 de afstanden minstens 2 bedragen". Dit slaat mij echter helemaal niet uit het veld en ik laat nu een volgende bladzijde zien, waarop ik mijn streepjes heb gegenereerd door de even getallen na het getal 2 over te slaan en alleen met mijn munt te gooien als ik een oneven getal aantref.



Als mijn partners in het Smart Mix project nu nog steeds niet overtuigd zijn, werp ik het volgende argument in de strijd. Ik kan steeds dichter bij de priemgetallen komen door veelvouden van kleine priemgetallen eruit te gooien. Voor de rekenkundige rijen van lengte 3 geeft dit bijvoorbeeld Tabel 1, links.

Eigenlijk is dit een toepassing van de zogenaamde zeef van Eratosthenes (± 240 jaar voor Christus).

Wat ik hier laat zien is in feite een speciaal geval van het Hardy-Littlewood vermoeden voor rekenkundige rijen van lengte k (1923):

- (Hardy-Littlewood (1923)) Het aantal rekenkundige rijen van k priemgetallen in de getallen $1, 2, \ldots, n$ is van de orde

$$\frac{\gamma_k}{2(k-1)}\, n^2/(\log n)^k,$$

waarbij γ_k een (berekenbare) positieve constante is.

Voor de priemtweelingen leidt dit tot het volgende vermoeden:

- Het aantal priemtweelingen in de getallen $1, 2, \ldots, n$ is van de orde

$$\gamma_3 \int_3^{n-2} \frac{dx}{(\log x)\log(x+2)}\,dx$$
$$\sim \gamma_3 \int_3^{n} \frac{dx}{(\log x)^2} \sim 1.32032\, n/(\log n)^2.$$

Voor dit laatste vermoeden heb ik een vergelijkende tabel, zie Tabel 1 rechts (de tweede kolom is uit Tao (2006), de derde is berekend met Mathematica).

Ik weet zeker dat als mijn Smart Mix partners deze tabel zien ze geheel overtuigd zullen zijn en tegen mij zullen zeggen: “Mijnheer Groeneboom, wij kunnen uw model wel in beleid vertalen!” Bovendien:

- Als bewezen is dat het aantal priemtweelingen kleiner of gelijk aan n van de orde
$$c\int_3^n \frac{dx}{(\log x)^2}$$
is, voor een positieve constante c, dan is ook het vermoeden bewezen dat er oneindig veel priemtweelingen zijn. Maar ...

Deze zo overtuigend ogende tabel bewijst helemaal niets! Het priemtweeling vermoeden is nog steeds niet bewezen! Een recent fout bewijs (mei 2004) werd gegeven door Richard Arenstorf (winnaar van de NASA exceptional achievement medal). De fout werd gevonden door Michel Balazard (juni 2004). Michel Balazard heeft Erdős getal 2 (wat betekent dat hij een artikel schreef met iemand die een artikel met Erdős geschreven heeft).

Een positief resultaat is het al eerder genoemde resultaat van Green en Tao, dat meer precies geformuleerd de volgende inhoud heeft.

- Green en Tao (2006): voor elke $k \geq 3$ is er een constante $\gamma_k' > 0$ zodat het aantal rekenkundige rijen van lengte k in de priemgetallen $\leq n$ groter is dan $\gamma_k'\, n^2/(\log n)^k$ voor alle voldoende grote n.

  Gevolg: voor elke $k \geq 3$ bevatten de priemgetallen oneindig veel rekenkundige rijen van lengte k.

Het bewijs van dit resultaat is (ruwweg) gebaseerd op het idee om een verzameling A te construeren waarin de priemgetallen een niet verdwijnende dichtheid hebben, terwijl de verzameling A voor elke k oneindig veel rekenkundige rijen van lengte k bevat. In deze constructie spelen “pseudo-random” verzamelingen, die een correlatiestructuur vertonen die analoog is aan de correlatiestructuur van de boven geïntroduceerde random verzamelingen getallen, een belangrijke rol. Vervolgens kan een analogon van de stelling van Szemerédi worden toegepast op de verzameling A. Het gevolg is dat bijvoorbeeld ook deelverzamelingen van de priemgetallen die weer in de totale verzameling priemgetallen een niet verdwijnende dichtheid hebben voor elke k oneindig veel rekenkundige rijen van lengte k zullen bevatten.

De volgende feiten zijn te beschouwen als positieve ontwikkelingen.

- Terence Tao, Andrei Okounkov en Wendelin Werner kregen een Fields medals op 22 augustus 2006. Alle drie deden belangrijk werk op het gebied van combinatoriek en kansrekening. Ben Green em Terence Tao zullen op 12 april 2007 in het stadhuis van Leiden de Ostrowski prijs ontvangen.
- Kiyoshi Ito kreeg, ook op 22 augustus 2006, de Gauss prijs, die dit jaar voor het eerst werd uitgereikt. Hij werd op 7 september 2006 91 jaar. Zijn werk ligt geheel op het gebied van de kansrekening. De zogenaamde Ito calculus heeft belangrijke toepassingen in de financiële wiskunde.
- De Franse statisticus Lucien Birgé kreeg verleden jaar de Brouwer prijs (de belangrijkste Nederlandse prijs voor de wiskunde).

Het is duidelijk dat momenteel combinatoriek, kansrekening en statistiek een centrale plaats in de wiskunde (koningin der wetenschappen) innemen. Bovendien: er zijn nog veel vermoedens te bewijzen of te weerleggen!

Referenties

1 M. Aigner, G.M. Ziegler en K.H. Hofmann, *Proofs from THE BOOK* 3e editie, Springer, Berlijn, 2004.

2 L.J. Brinkhorst en M.J.A. van der Hoeven, ‘Subsidieregeling Smart Mix’, Staatscourant 27 maart 2006 (61)

3 C.J. de la Vallée Poussin, ‘Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers’, Ann. Soc. scient. Bruxelles **20** (1896), pp. 183–256.

4 P. Erdős en P. Turán, ‘On some sequences of integers’, J. London Math. Soc. **11** (1936), pp. 261–264.

5 Euclides (± 300 jaar voor Christus), *The thirteen books of the elements*, vertaald, met inleiding en commentaar, door Sir Thomas L. Heath, tweede editie, Dover Publications, New York, 1956.

6 L. Euler, Brief aan Goldbach, 16 december, 1742.

7 T. Goldbach, Brief aan Euler, 7 juni, 1742.

8 T. Gowers, *Mathematics. A very short introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2002.

9 T. Green and T. Tao, ‘The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions’, `arXiv:math.NT/0404188`, version 5 (9-2-2006)

10 J. Hadamard, ‘Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques.’, Bull. Soc. math. France **24** (1896), pp. 199–220.

11 G.H. Hardy en J.E. Littlewood, ‘Some problems of “partitio numerorum”; III: On the expression of a number as a sum of primes’, Acta Math. **44** (1923), pp. 1–70.

12 D. Hilbert, Drieëntwintig problemen, gepresenteerd op het tweede internationale congres van wiskundigen in Parijs, 1900.

13 H. Poincaré, ‘Cinquième complément à l’analysis situs’, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **18** (1904), pp. 45–110.

14 B. Riemann, ‘Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.’ Monat. der Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre 1859, pp. 671–680.

15 E. Szemerédi, ‘On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression’, Acta Arith. **27** (1975), pp. 299–345.

16 T. Tao, ‘Long arithmetic sequences in the primes’, Erdős memorial lecture, March 24 2006, University of Memphis, USA.

17 M. Toonder, *De windhandel*, De Bezige Bij, Amsterdam, 1959.

18 M. Toonder, *Hoe vreselijk is dit alles*, De Bezige Bij, Amsterdam, 1977.

19 J.G. van der Corput, ‘Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten’, Math. Ann. **116** (1939), pp. 1-50.

20 I.M. Vinogradov, ‘Representation of an odd number as the sum of three primes’, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **15** (1937), pp. 291–294. Vertaling in: L.D. Fadeev en R.V. Gamkrelidze, *Ivan Matveevič Vinogradov, Selected works*, pp. 129–132, Springer Verlag, Berlijn, 1984.

21 I.M. Vinogradov, ‘Representation of an odd number as the sum of three primes’, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **15** (1937), pp. 291–294. Vertaling in: L.D. Fadeev en R.V. Gamkrelidze, *Ivan Matveevič Vinogradov, Selected works*, pp. 129–132, Springer Verlag, Berlijn, 1984.