Jaap Top
Instituut voor wiskunde en informatica
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800
9700 AV Groningen
j.top@math.rug.nl

Onderwijs

De opgaven van de LIMO

De Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade (LIMO) vond voor de tweede keer plaats op vrijdag 2 juni in Nijmegen. De tien opgaven werden door de deelnemers als behoorlijk pittig ervaren. Hoe zagen de opgaven eruit?

De opgaven van de LIMO kwamen ook dit jaar weer uit de verschillende disciplines binnen de wiskunde. Om er een indruk van te geven, drukken we de tien opgaven hieronder af. Voor elke volledige en correcte oplossing konden de deelnemende groepen tien punten verdienen, dus maximaal waren er honderd punten te vergeven. De deelnemers mochten er totaal drie uur aan werken.

De beste groep met de naam *Groep van orde 4*, afkomstig uit de Universiteit Utrecht won met 49 punten. Tweede werd de eveneens Utrechtse groep *Taart* met 43 punten. De derde prijs werd behaald door de groep *NSA* van de Universiteit Amsterdam.

Voor een uitgebreid verslag van Dion Coumans, zie de nieuwsrubriek van het septembernummer van het Nieuw Archief voor Wiskunde. De oplossingen zijn te vinden op internetpagina www.desda.science.ru.nl/antwoordenboekje2006.pdf

De opgaven

De opgaven zijn bedacht door wiskundigen van verschillende Nederlandse universiteiten. De meeste bedenkers waren 's middags aanwezig om de opgaven zelf na te kijken.

Opgave 1: Een eigenwaardenprobleem

Michael Bochev, Universiteit Twente

Dit is een klassiek probleem dat in verschillende toepassingen voorkomt, bijvoorbeeld bij het numeriek oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen met behulp van de eindige elementenmethode (we danken Ferenc Izsák voor het onder de aandacht brengen van dit probleem). We beginnen met de volgende definitie:

Definitie *Voor twee matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ definiëren we hun Kroneckerproduct $A \otimes B$ als de volgende matrix*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn\times mn}.$$

Bijvoorbeeld als $m = n = 2$ hebben we

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Opgave Gegeven zijn twee matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ die elk een volledig stelsel van eigenvectoren hebben, met andere woorden, er bestaan nietsinguliere matrices $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$ en diagonaalmatrices

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_m \end{pmatrix}$$

met $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $\Gamma \in \mathbb{R}^{m\times m}$ zodanig dat

$$AV = V\Lambda, \qquad BW = W\Gamma. \tag{1}$$

De lineair onafhankelijke kolommen van de matrices V en W zijn respectievelijk de eigenvectoren van A en B. Bewijs dat de eigenwaarden van $A \otimes B$ zijn

$$\left\{ {}_i\gamma_j,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m \right\}.$$

Bepaal verder een matrix waarvan de kolommen de eigenvectoren van $A \otimes B$ zijn. (Hint: Gebruik relaties (1) en het volgende lemma.)

Lemma *Voor elke twee gehele getallen m en n bestaat er een matrix $P \in \mathbb{R}^{mn \times mn}$ zodanig dat voor alle matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ geldt*

$$P^T (A \otimes B) P = B \otimes A.$$

De matrix P is tevens orthogonaal: $P^{-1} = P^T$.

Opgave 2: Priemgetallen

Frans Keune, Radboud Universiteit Nijmegen

De rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ van gehele getallen is gegeven door

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_1 = 1, \\ a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n \quad \text{voor alle } n \geq 0. \end{cases}$$

Bewijs dat $a_p \equiv 1 \pmod{p}$ voor alle priemgetallen p.

Opgave 3: Pi als breuk?

Klaas Landsman, Radboud Universiteit Nijmegen

Aan het eind van de achttiende eeuw bewezen Lambert en Legendre dat π niet rationaal is. In deze opgave geef je een bijzonder eenvoudig analytisch bewijs van dit feit. Het is een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat π rationaal is, dan is π^2 dat ook, zodat $\pi^2 = a/b$ met $a, b \in \mathbb{N}$. Je gaat nu een tegenspraak afleiden.

N.B. Voor het oplossen van iedere volgende opgave mag je de te bewijzen bewering van een vorige opgave gebruiken. De opgaven zijn zodoende onafhankelijk te maken.

Definieer

$$f_n(x) = \frac{x^n (1-x)^n}{n!},$$

waarbij $n \in \mathbb{N}$ later zal worden bepaald, en daaruit

$$F_n(x) \ = b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(x),$$

ofwel

$$F_n(x) \ = b^n \left(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) \right).$$

1. Bewijs dat $F_n(0)$ en $F_n(1)$ gehele getallen zijn.
2. Bewijs dat $\pi a^n \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) dx = F_n(1) + F_n(0)$.
3. Bewijs hieruit dat $0 < F_n(1) + F_n(0) < \pi a^n / n!$.
4. Leid nu met behulp van de Stirlingformule:

   $$n! \ \sim \sqrt{s\pi n}\, e^{-n} n^n$$

   een tegenspraak af.

Opgave 4: Een toren van machten

Hendrik Lenstra, Universiteit Leiden

Bepaal of er positieve gehele getallen a, b, n en m bestaan, zo dat $a \neq b$, $n \geq 2$, $m \geq 2$ en

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}} \Big\}n = b^{b^{b^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{b}}}}}} \Big\}m.$$

Opgave 5: De ijzergieterij

R.D. Nobel, Vrije Universiteit

Het bedrijf *Complex* wil elke maand een n-tal verschillende legeringen maken uit m verschillende metalen. Deze metalen zijn niet onmiddellijk beschikbaar maar moeten via een serie van twee bewerkingen, *smelten* en *onttrekken*, verkregen worden uit een t-tal ertsen die bedrijf *Complex* elke maand moet inkopen. De inkoopprijs van één ton erts k is C_k ($k = 1, \ldots, t$).

Van elke erts kan onbeperkt veel worden ingekocht, maar het totale tonnage aan ingekocht erts mag vanwege de beschikbare verwerkingscapaciteit niet meer dan E bedragen.

Het smelten van een ton van erts k kost een bedrag S_k en neemt een tijd T_k uur in beslag. Het onttrekken van metaal i uit gesmolten erts k kost een bedrag D_{ik} *per ton metaal* i, en neemt, opnieuw per ton metaal i, een tijd F_{ik} uur in beslag. Verder is gegeven dat in één ton van erts k een percentage P_{ik} aan metaal i zit ($i = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, t$). In legering j wil bedrijf *Complex* hoogstens een percentage Q_{ij} van metaal i opnemen en minstens een percentage R_{ij} ($i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$).

Het bij elkaar voegen en goed mengen van de verschillende metalen, nodig voor een optimale kwaliteit van de legering, kost voor elke ton van legering j een bedrag B_j, en neemt voor elke ton een tijd U_j uur in beslag. Alle bewerkingen (smelten van de verschillende ertsen, het onttrekken van de verschillende metalen uit de verschillende ertsen en het mengen van de metalen voor de verschillende legeringen) worden *na elkaar* uitgevoerd.

In totaal is W uur per maand beschikbaar voor alle werkzaamheden bij elkaar, maar aan het smelten mag hoogstens 30 procent van deze tijd besteed worden. Het onttrekken van de metalen dient tussen de 40 en 60 procent van de tijd in beslag te nemen en aan het bij elkaar voegen en mengen van de metalen moet minstens 10 procent van de tijd besteed worden.

Het bedrijf *Complex* is verplicht elke maand van legering j minstens V_j ton te produceren. De legering j wordt door *Complex* verkocht voor een bedrag van G_j per ton. De vraag naar alle legeringen veronderstellen we onbeperkt. Uiteraard is *Complex* geïnteresseerd in een productieplan dat een maximale winst per maand oplevert.

Bron: www.desda.science.ru.nl/cgi-bin/script.pl?limo

Bron: www.desda.science.ru.nl/cgi-bin/script.pl?limo

Van links naar rechts, voorste rij: Hendrik Lenstra, Klaas Landsman, Frans Keune, achterste rij: Arno van den Essen, Robert Tijdeman, Floris Takens

Formuleer dit probleem van *Complex* als een lineair programmeringsprobleem. We nemen aan dat aan alle lineariteitseisen voldaan is, dus, om een voorbeeld te noemen, het smelten van twee ton erts vergt twee keer zoveel tijd als het smelten van één ton, ook al is dit misschien niet geheel realistisch.

Opgave 6: Bijzondere functies
F. Takens, Rijksuniversiteit Groningen

We beschouwen continue reële afbeeldingen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. We noemen $p\in\mathbb{R}$ een periodiek punt voor f met periode k als $f^k(p)=p$ en $f^i(p)\neq p$ voor $i=1\dots k-1$. (Deze terminologie sluit aan bij de interpretatie van $(\mathbb{R},f)$ als dynamisch systeem: $\mathbb{R}$ is de verzameling van alle mogelijke toestanden en f beeldt elke toestand af op de toestand die daar na één tijdstap op volgt.)

Stel nu dat f een periodiek punt p heeft met periode vier, en wel zo dat $p=f^4(p)<f(p)<f^3(p)<f^2(p)$. Toon aan dat voor elke k de afbeelding f een periodiek punt heeft met periode k.

Opgave 7: Naar beneden afronden
R. Tijdeman en S.W. Rosema, Universiteit Leiden

Stel $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ met $ad-bc=\pm1$. Zij $\lfloor x\rfloor$ het grootste gehele getal $\leq x$.

a) Stel $a>1, b>1$. Bewijs dat $\lfloor \frac{c}{a}\rfloor=\left\lfloor\frac{d}{b}\right\rfloor$.
b) Stel $a>0, b\geq 0, a+b>c+d$. Bewijs dat $a\geq c$.

Opgave 8: Magische vierkanten
A.R.P. van den Essen, Radboud Universiteit Nijmegen

Zij M een 3×3 magisch vierkant, dat wil zeggen een 3×3-matrix waarin de som van alle getallen in iedere rij, kolom en ieder van de twee hoofddiagonalen hetzelfde is.

Laat zien dat voor ieder oneven natuurlijk getal n de matrix M^n een magisch vierkant is. Hierbij wordt onder M^n verstaan het matrix product van n factoren M.

Opgave 9: Bernoulli-polynomen
J. Top en G. Tiesinga, Rijksuniversiteit Groningen

Acht jaar na zijn dood, verscheen in Bazel het boek *Ars Conjectandi* van Jakob Bernoulli. Jakob was de oom van de in Groningen geboren Daniel Bernoulli (1700) en de broer van Johann, die van 1695 tot 1705 hoogleraar in Groningen was en vandaar vertrok om zijn overleden broer in Bazel te kunnen opvolgen.
In *Ars Conjectandi* leidt Jakob onder meer een formule af voor $\sum_{k=0}^n k^m$, in termen van wat tegenwoordig een *Bernoullipolynoom* heet. We noteren P voor de lineaire ruimte over $\mathbb{Q}$ bestaande uit alle veeltermen in de variabele x, met rationale getallen als coëfficiënten. Op P beschouwen we drie lineaire operatoren, namelijk

$$\begin{aligned} D &: P\longrightarrow P \quad \text{gegeven door} \quad D(f)=\frac{df}{dx}\\ \Delta &: P\longrightarrow P \quad \text{gegeven door} \quad \Delta(f)=f(x+1)-f(x)\\ \varphi &: P\longrightarrow P \quad \text{gegeven door} \quad \varphi(f)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt \end{aligned}$$

a) Toon aan dat $\Delta=\varphi\circ D=D\circ\varphi$ en $\Delta\circ\varphi=\varphi\circ\Delta$ en $\Delta\circ D=D\circ\Delta$.
b) Bewijs verder dat φ inverteerbaar is.

Voor elk geheel getal $n\geq 0$ definiëren we het n-de Bernoullipolynoom $B_n(x)$ door

$$B_n(x):=\varphi^{-1}(x^n).$$

c) Bewijs de volgende eigenschappen van de Bernoullipolynomen.
1. $B_n(x)$ heeft graad n.
2. $\frac{dB_n(x)}{dx}=nB_{n-1}(x)$ voor $n\geq 1$.
3. $\Delta(B_n(x))=nx^{n-1}$ voor $n\geq 1$.
4. $\sum_{k=0}^{n-1}k^m=\frac{(B_{m+1}(n)-B_{m+1}(0))}{(m+1)}$ voor $n\geq 1, m\geq 0$.
5. $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n\binom{n+1}{k}B_k(x)=x^n$.
6. $B_n(x)=\sum_{m=0}^n\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^m(-1)^k\binom{m}{k}(x+k)^n$.

Opgave 10: Een statistisch vraagstuk
A.W. van der Vaart en R.W.J. Meester, Vrije Universiteit Amsterdam

Laat $X_1,\dots,X_n$ onafhankelijke reëelwaardige stochastische grootheden zijn, met kansdichtheid

$$f(x)=\frac{1}{\delta}e^{(x-\mu)/\sigma}$$

voor $x\leq\mu$ en $f(x)=0$ voor $x>\mu$. Hierin zijn $\mu\in\mathbb{R}$ en $\sigma>0$ constanten.

We definiëren

$$\begin{aligned}\hat\mu_n&=\max(X_1,\dots,X_n),\\ \hat\sigma_n&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\hat\mu_n-X_i),\\ S_n&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\mu-X_i).\end{aligned}$$

Een rij stochastische grootheden T_n convergeert in verdeling naar de (continue) verdelingsfunctie F als voor elke $x\in\mathbb{R}$ geldt dat

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(T_n\leq x)=F(x).$$

N.B. Voor het oplossen van iedere volgende opgave mag je de te bewijzen bewering van een vorige opgave gebruiken. De opgaven zijn zodoende onafhankelijk te maken.
1. Bewijs dat $(\hat\mu_n,\hat\sigma_n)$ de meest aannemelijke schatter van (μ,σ) is.
2. Laat zien dat de rij stochastische grootheden $n(\hat\mu_n-\mu)$ in verdeling naar een limiet convergeert.
3. Gebruik de centrale limietstelling om te bewijzen dat de rij stochastische grootheden $\sqrt{n}(S_n-\sigma)$ in verdeling naar een normale verdeling convergeert.
4. Bewijs dat de rij stochastische grootheden $\sqrt{n}(\hat\sigma_n-\sigma)$ in verdeling naar een normale verdeling convergeert, en geef de parameters van deze normale verdeling.