

Martinus van Hoorn

Noordersingel 12

9901 BP Appingedam

mc.vanhoorn@planet.nl

Column Lieve Maria

Realistische wiskunde versus abstract denken

Januari 2006 hebben de gezamenlijke studieverenigingen voor wiskunde, natuurkunde en informatica een open brief gestuurd aan minister Van der Hoeven, waarin zij hebben gepleit voor meer en bovendien een ander soort wiskunde op het vwo. De door deze actie ontstane beroering was genoeg aanleiding om op het Nederlands Mathematisch Congres 2006 een discussie te organiseren tussen Kees Hoogland, hoofd kenniscentrum APS, adviseur rekenen, wiskunde en Robbert Dijkgraaf, hoogleraar mathematische fysica aan de Universiteit van Amsterdam. Martinus van Hoorn, oudhoofdredacteur van Euclides, hoorde het aan.

Op 28 maart werd tijdens het Mathematisch Congres te Delft een discussie gehouden tussen Robbert Dijkgraaf en Kees Hoogland. Het is goed dat deze discussie plaatsvond: het is goed dat er gepraat wordt tussen de universitaire wiskundigen en de leraren. Dat is in het verleden wel eens anders geweest.

Wat is het probleem?

We kunnen niet zeggen dat het met de wederzijdse interesse ook al goed is. Als het gaat om een geringe instroom bij de wiskundestudie, en om ernstige lacunes in kennis en inzicht van de (te weinige) studenten wiskunde, dan ligt er een gezamenlijk probleem, zou je zo zeggen. Op zijn minst zijn de zorgen gemeenschappelijk. Dat laatste blijkt niet overduidelijk als je argeloos getuige bent van de discussie tussen Dijkgraaf en Hoogland. Het zou zelfs kunnen dat je als argeloos bezoeker de zaal verlaat met het onbestemde gevoel dat er toch niets aan te doen is en dat ieder zijn eigen problemen maar moet zien op te lossen. Dat is natuurlijk jammer. Mag je van zo'n

discussie oplossingen verwachten? Joop Doorman, die de discussie leidde, sprak van een verkennende discussie. Stiekem hoop je toch op enige voorzichtige schreden naar een oplossing. Zelf had ik van de kant van de leraren op een duidelijke erkenning van het probleem gehoopt. (In hoeverre 'de' leraren werden vertegenwoordigd mag onbesproken blijven.) Ik vermoed dat de opstelling van Kees Hoogland wat dit betreft niet uniek was. Zo gezien was het goed dat hij voor de discussie gevraagd was.

Over abstracties en bewijzen

Ik denk dat een genuanceerdere weergave mogelijk was geweest van hoe kinderen wiskunde leren, met open gelaten de mogelijkheid dat oefenen een middel is om tot abstractie te komen. De zaal was per slot van rekening gevuld met mensen die én in hun schooltijd oefenopgaven hadden gemaakt, én tot abstracties waren gekomen. Waarmee een causaal verband weliswaar niet is aangetoond, noch het tegendeel. Abstract denken staat soms in een ongunstig daglicht. Abstraheren kan leerlingen blijkbaar ontmoedigen. Ik moest hierbij denken aan een klein maar fijn boekje, waarin prima uitgelegd wordt dat abstracties de zaken juist kunnen verhelderen [1]. Wat in dit boekje staat geldt mutatis mutandis toch ook voor het voortgezet onderwijs?

Over het bewijzen bleek verschil van opvatting te bestaan. Dijkgraaf wil het algoritmisch aspect van bewijzen benadrukken, met andere woorden vertrouwen opbouwen door de leerling te laten zien dat hij dit gewoon wel kan. Hoogland wees dit af, en benadrukte het belang van redeneren. Ik zou menen dat tussen deze twee opvattingen een brug geslagen kan worden.

Hoe programma's ontstaan

Ik had in de discussie ook wel iets willen horen over dat het wiskundeprogramma voor het voortgezet onderwijs ad hoc tot stand is gekomen, iets wat al meerdere jaren zo is, en waarvan de naamgeving: wiskunde A, wiskunde B, wiskunde C en nu ook wiskunde D op droeve wijze getuigt — wie weet nog wat zulke letters betekenen? Er bestaat blijkbaar geen coherente visie op het programma, over de opbouw die daarin moet zitten, over de didactiek, en dan speciaal over de didactiek van de algebra [2]. Ook hoorden we weinig over de groepen leerlingen om wie het gaat, noch over de vereiste vooropleiding van deze leerlingen. De leerlingen die later niet de bètakant opgaan moeten hierbij juist niet — zoals in de discussie — ongenoemd blijven.

Wat het programma betreft, wiskunde lijkt wel definitief een hulpvak geworden. Dan bepaalt dus ook de hulpvraag het wiskundeaanbod. Door deze oorzaak verdwijnt elke behoefte aan een coherente visie.

Over rekenmachines en software

In de discussie vond ik de uitspraken over het weg-automatiseren van rekenvaardigheden niet geheel bevredigend, om niet te zeggen defaitistisch. Ook hierbij kun je direct vaststellen dat in onderwijsprogramma's geen consensus zit, in dit geval over hoe je met rekenmachines en software zou moeten omgaan. Natuurlijk keren de tijden van weleer niet terug, dat begrijpt iedereen, maar tegen een longitudinale door-denking van de wiskundeprogramma's, inclusief het gebruik van nieuwe hulpmiddelen, kan toch geen bezwaar zijn?

Realistische wiskunde

Aanvankelijk had de term realistische wiskunde, in de aankondiging van de discussie, mij het meest gestoord. Ik weet namelijk niet wat realistische wiskunde in het voortgezet onderwijs is. Je kunt zeggen: dit is de wiskunde zoals die al jarenlang in Nederland wordt gegenereerd. Dit is wiskunde met een expliciete rol voor contexten en modelvorming. Ik ga nu niet in op de kritiek die gehoord wordt op de keuze van contexten. Ik richt mij op die term realistische wiskunde.

Ik ken de term realisme voor de nieuwe generatie methodes voor het basisonderwijs. Daaraan ligt een krachtige visie ten grondslag [3], een visie op het werken met de abacus en dus het bouwen aan het positiestelsel, met schematische bewerkingen die verkort worden tot algoritmen, met schattend rekenen uit het hoofd, met regelmatig zinnige oefeningen om routine te krijgen.

De vraag is interessant hoe het kan dat men in het voortgezet toch klaagt over het niveau van de basisschoolleerlingen. Ik vermoed dat veel leerlingen de leiding van doorgewinterde onderwijzers ontberen, een leiding die mijns inziens altijd nodig is. Ik vermoed heel sterk dat hier de schoen wringt. Rekenmethodes zijn niet *teacher proof*, dat was ook al veel langer bekend.

De rekenmethodes voor het basisonderwijs verdienen mijns inziens de ere naam *realistisch*. De wiskundeprogramma's voor het voortgezet onderwijs mogen van mij dan niet deze naam hebben, om de simpele reden dat zij niet gebaseerd zijn op een doorslaggevende coherente visie, terwijl een longitudinale doordenking ontbreekt. Het is de vraag of zij een andere naam verdienen dan wiskunde A t/m D.

Haast geboden

Het is zeker niet eenvoudig om voor het voortgezet onderwijs wiskundeprogramma's op te stellen die gebaseerd zijn op een aantal duidelijke, consequent aangehouden uitgangspunten. Het is sowieso gemakkelijker te bedenken wat er op de basisschool moet gebeuren, met name welke onderwerpen daar de revue moeten passeren. De leerlingen in het voortgezet onderwijs vormen bovendien een veel meer heterogene groep. De meesten van hen gaan geen bètavak studeren, en dat hoeven ze ook niet. Zeg dan maar eens wie welke wiskunde moet hebben. Maar universitaire wiskundigen en wiskundeleraars kunnen volgens mij heel goed met elkaar bespreken wat ze moeten bespreken. Wel is enige haast geboden, want de generatie van de leraren die de aloude algebra nog zelf op school hebben gehad is inmiddels vijftigplus [4].

Noten

1 Timothy Gowers, *De kortste introductie wiskunde*, Utrecht 2003 (vertaling Jan Willem Nienhuys). Oorspronkelijk: *Mathematics, a very short introduction*, Oxford 2002. Besproken, tegelijk met twee andere uitgaven, door Jan van de Craats in *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5(7) (maart 2006), pp. 57–59.

2 Een nuancering is hier nodig. Anne van

Streun toont een visie op het wiskunde-onderwijs, onder meer in de vorm van weloverwogen minimeisen. Zie zijn artikelenserie "t Denken bevorderen" in *Euclides* 77 (2001–2002), pp. 348–349, en *Euclides* 78 (2002–2003), pp. 22–24, 106–107, 128–129, 226–227, 278–281.

3 Hetgeen in zeer sterke mate te danken is aan

Adri Treffers cum suis. Al vanaf de jaren zeventig werd een visie doordacht en geformuleerd, en (heel belangrijk) steeds geactualiseerd. Op de pabo's is zij echter genegeerd door aldaar vakinhoud en vakdidactiek als bijzaken te presenteren.

4 Deze observatie dank ik aan Swier Garst.