

Patrick Oonincx

Koninklijk Instituut voor de Marine
Postbus 10.000
1780 CA Den Helder
p.j.oonincx@kim.nl

Onderzoek

Een functionele blik onder water

Land- en zeekaarten zijn er in allerlei soorten en maten: sommige vertellen iets over de contouren van landsgrenzen, andere geven de diepte van zeeën aan en weer andere vertellen ons iets over bodemsoorten. Nieuw zijn kaarten natuurlijk ook niet, alhoewel de mogelijkheden voor details in kaarten door de voortschrijdende kennis natuurlijk wel gegroeid is. In dit artikel laat Patrick Oonincx zien hoe wiskundige analyse kan helpen real-time een aantal eigenschappen van een relatief onbekend stukje zee in kaart te brengen.

Hoe kunnen we er snel achter komen hoe een stuk zeebodem er uitziet? De wiskundige techniek die hiervoor gebruikt wordt, heet *Rapid Environmental Assessment* (REA). Op een snelle manier wordt geprobeerd parameters van een stukje zee(bodem) in kaart te brengen die invloed hebben op een plaatselijk akoestische profiel. Voor defensieve toepassingen is deze informatie onder andere van belang in onbekende kustgebieden, waar amfibische operaties plaats dienen te vinden. Samen met de *Université Libre* van Brussel en het *NATO Undersea Research Center* heeft de *Nederlandse Defensie Academie* een project opgezet om technieken te ontwikkelen in het kader van REA.

Een centrale techniek in het project is gebaseerd op de propagatie onder water van een sonarpuls. Na een bepaalde afstand in ondiep water te hebben afgelegd, zal deze aan een sensor onder water worden waargenomen. De ontvangen puls bestaat vooral uit reflecties van de sonarpuls op de zeebodem. Mathematisch gezien is de ontvangen puls te beschouwen als *Greense functie* van een systeem bestaande uit een niet-lineaire differentiaalvergelijking met randvoorwaarden. De coëfficiënten in de vergelijking alsmede de randvoorwaarden bestaan uit gezochte geo-akoestische parameters: zeediepte en bodemeigenschappen, zoals bodemsoort (steen/zand), korrelgrootte zand, kleisoort et cetera. Het inverse probleem bestaat uit het herleiden van de vergelijking (en dus de parameters) uit de aan de hydrofoon gemeten *Greense functie*. Natuurlijk gebruiken we hiervoor meerdere metingen (*Greense functies*) door bijvoorbeeld de hydrofoon aan een wegdrijvende boei te hangen en met een zekere regelmaat de ontvangen signalen uit te lezen. Tevens kunnen er meerder boeien in een gebied

uitgezet worden, zodat de metingen in een heel gebied waargenomen kunnen worden, met wellicht verschillende bodemsoorten. Een voorbeeld van een dergelijke boei, voorzien van gps-ontvanger om de exacte locatie te bepalen is te zien in figuur 1. De werkelijke sensor onder water is gefotografeerd in figuur 2.

Het idee lijkt eenvoudig maar het inverse probleem is dusdanig complex dat vereenvoudiging noodzakelijk is, zeker voor het geval de metingen real-time in de gewenste informatie omgezet dienen te worden. Een grote stap in deze richting zou het opdelen van het probleem zijn en wel in deelproblemen waarbij bodemparemeters niet of nauwelijks veranderen. Deze simplificatie vraagt dus om een soort van zwart-wit zeekaart waarbij de bestudeerde kustgebieden gesegmenteerd zijn, grofweg in zand en gesteente. De exacte structuur van het sediment laten we dus even buiten beschouwing, aangezien de structuur van het sediment de *Greense functie* in mindere mate beïnvloedt dan het type sediment. Een interessant vraagstuk is nu of er op een elegante manier segmentatie kan worden verkregen door slechts gebruik te maken van



Figuur 1 Een te water gelaten boei met ontvanger voor de ontvangst van gepropageerde pulsen en een GPS antenne ten behoeve van plaatsbepaling



Figuur 2 De geluidsbron voor onderwater propagatie van sonar pulsen

de gemeten responsies op de gepropageerde puls. Een mogelijke oplossing voor dit probleem is gebaseerd op twee observaties:

- De waargenomen Greense functies bestaan uit golfpakketjes, afkomstig van de op de zeebodem gereflecteerde puls;
- Gelijksortige sedimenten leiden tot golfpakketjes met sterk gelijkende karakteristieke kenmerken.

Het plan van aanpak is nu om de reeds gemeten Greense functies te ontbinden in karakteristieke golfpakketjes en deze met elkaar te vergelijken. Segmentatie zal dan gebaseerd zijn op het al dan niet verschillen in karakteristieke kenmerken. Deze kenmerken zijn vooral gebaseerd op amplitude, frequentie, schaling en tijdslokalisatie van de betreffende golven.

Matching Pursuit Algoritme

De besproken kenmerken zullen een wiskundige waarschijnlijk aanzetten tot de elegante theorie der wavelets voor de schalings-eigenschappen en tijdslokalisatie, wellicht gecombineerd met een vleugje Fourieranalyse voor de frequentie-aspecten. De elegantie van dit alles zal ik niet ontkennen maar helaas zijn deze concepten te veel gericht op hetgeen mathematisch wenselijk is, zoals het vormen van Rieszbases of orthonormale bases. Bij het segmentatie probleem staat de 'match' met de fysica op de eerste plaats. We zoeken een verzameling van functies, die lijken op de golfpakketjes in de Greense functie en die tevens de parameters van de wavelettransformatie bevatten. Een oplossing voor deze zoektocht werd voor het eerst beschreven door Mallat en Zhang [6] in de vorm van de zogenaamde *Matching Pursuit* (MP).

De MP-signaaldecompositie projecteert een signaal $s \in L^2(\mathbf{R})$ op een redundante set monofrequente geschaalde functies $h_\gamma \in L^2(\mathbf{R})$, atomen genoemd, die het resultaat vormen van schaling, frequentiemodulatie en translatie in tijd van een gegeven vensterfunctie h ,

$$h_\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{u-t}{a}\right) e^{-iu\omega}, \gamma = (a, t, \omega) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2. \quad (1)$$

Deze vensterfunctie heeft niet per definitie compacte drager, maar zal wel goed benaderd kunnen worden door een compact gedragen functie. Verder veronderstellen we $\|h\|_2 = 1$. In het bijzonder

bekijken we hier Gabor-atomen h_γ , beschreven door de Gaussfunctie $h(u) = 2^{1/4} e^{-\pi u^2}$. Deze functie genereert namelijk een bibliotheek aan functies die bijzonder goed passen bij de fysische responsies op de uitgezonden puls.

In het algemeen start de decompositie met het kiezen van een (redundante) aftelbare verzameling functies h_{γ_n} , de atomen, die volledig is in $L^2(\mathbf{R})$. Een dergelijke verzameling kan verkregen worden door een opdeling van het tijd-schaal-frequentie vlak (t, a, ω) , toegepast volgens (1) op een passende functie h . Torresani [8] toonde aan dat elke functie $f \in L^2(\mathbf{R})$ te ontbinden is in de functies uit een dergelijke verzameling. Wanneer de verzameling functies beschreven is, gaat een algoritme op zoek naar een functie, zeg h_{γ_0} die het best past bij het te decomponeren signaal s , in de zin van

$$|\langle s, h_{\gamma_0} \rangle| \geq |\langle s, h_{\gamma_n} \rangle|, \forall n > 0, \quad (2)$$

met $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het gebruikelijke L^2 -inwendig product. Het zoeken en vinden van atoom h_{γ_0} dat voldoet aan (2) gebeurt door optimalisatie van een kostenfunctie, zie [6]. Het signaal s kan nu ontbonden worden in een deel in de 'richting' van h_{γ_0} en, zoals we zullen zien, een deel loodrecht hierop:

$$s = \langle s, h_{\gamma_0} \rangle h_{\gamma_0} + R_1 s, \quad (3)$$

met $R_1 s$ het residu. Het voordeel van ontbinding (3) is dat $\langle R_1 s, h_{\gamma_0} \rangle = 0$ en dus

$$\|s\|^2 = |\langle s, h_{\gamma_0} \rangle|^2 + \|R_1 s\|^2. \quad (4)$$

De procedure kan herhaald worden voor het residu $R_1 s$. Na optimalisatie van een nieuwe kostenfunctie vinden we wederom een best passende functie h_{γ_1} uit de verzameling overgebleven atomen. Deze voldoet aan

$$|\langle R_1 s, h_{\gamma_1} \rangle| \geq |\langle R_1 s, h_{\gamma_n} \rangle|, \forall n > 1.$$

Voortzetting van de decompositie levert nu

$$R_1 s = \langle R_1 s, h_{\gamma_1} \rangle h_{\gamma_1} + R_2 s,$$

met orthogonaliteit als tevoren:

$$\|R_1 s\|^2 = |\langle s, h_{\gamma_1} \rangle|^2 + \|R_2 s\|^2.$$

Iteratie van dit proces leidt uiteindelijk tot een volledige decompositie in alle functies van de gecreëerde verzameling. Een vermoeden van Huber [2] beschreef voor het eerst de convergentie van projectie pursuit algoritmen. Dit vermoeden werd later bewezen door Jones [4]. Dit convergentieresultaat valideert de volledige decompositie

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \langle R_n s, h_{\gamma_n} \rangle h_{\gamma_n}, \quad (5)$$

met $R_0 s = s$ per definitie. Verder hebben we door constructie een soort van relatie van Parseval verkregen

$$\|s\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle R_n s, h_{\gamma_n} \rangle|^2. \quad (6)$$

Resumerend, het MP-algoritme genereert een niet-lineaire decompositie van een functie s in een reeks zogenaamde atomen met enkele gewenste fysische eigenschappen. Verder krijgen we door constructie een energiebehoudswet erbij, die gebruikt kan worden om de kwaliteit van een approximatie met een eindig aantal functies uit de bibliotheek te meten. Praktisch gezien is resultaat (6) van belang om een stopcriterium voor het algoritme te kunnen gebruiken. De l^2 -norm van de coëfficiënten in een partiële som kan worden afgezet tegen de l^2 -norm van s . Op grond hiervan kan worden besloten het algoritme een volgende bijdrage aan de reeks te laten genereren of om met deze eindige reeks genoeg te nemen.

Coherentiedetectie

Nu we een manier hebben om functies te ontbinden in in tijd gelokaliseerde golfpakketjes met karakteristieke schalen en frequentie, volgt een tweede vraag, namelijk hoe de decomposities van verschillende signalen goed te vergelijken zijn. Immers we willen positieafhankelijke Greense functies met elkaar vergelijken en hiermee tot een segmentatie van de zeebodem komen. Een mogelijke oplossing voor deze vraagstelling kan gevonden worden in de beeldverwerking. Daar wordt om beelden met elkaar te kunnen vergelijken vaak gebruik gemaakt van zogenaamde *featurevectors*. Dit zijn vectoren waarvan de componenten getallen zijn die eigenschappen van het plaatje vertegenwoordigen. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de variantie in een plaatje, oriëntatie van objecten in een plaatje en kleurings. Het komt niet zelden voor dat deze getallen gebaseerd zijn op coëfficiënten in een decompositie/transformatie van een plaatje, zoals de tweede generatie wavelettransformatie [3]. De identificatie van objecten met een vector zou idealiter een bijectieve afbeelding moeten zijn, echter een grote mate van discriminatie tussen de vectoren van verschillende beelden is reeds voldoende. In onze probleemstelling zouden oneindig dimensionale featurevectoren, bestaande uit de in (5) aanwezige parameters γ_n en $\langle R_n s, h_{\gamma_n} \rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$ een 1-1 representatie voor een signaal s vormen. Featurevectoren gebaseerd op een approximatie van s met behulp van de eerste N functies uit de bibliotheek geven welliswaar geen bijectieve afbeelding van s , maar bieden voor grote N wel genoeg discriminatie voor verschillende s .

We identificeren nu gemeten signalen $s_i \in L^2(\mathbb{R})$ met $4N$ -dimensionale featurevectoren $\vec{v}_i$, gegeven door

$$\vec{v}_i = (c_{i,1}, a_{i,1}, \omega_{i,1}, t_{i,1}, \dots, c_{i,N}, a_{i,N}, \omega_{i,N}, t_{i,N}), \quad (7)$$

met $c_{i,k} = \langle R_{k-1} s_i, h_{\gamma_{i,k-1}} \rangle$ en $\gamma_{i,k-1} = (a_{i,k-1}, t_{i,k-1}, \omega_{i,k-1})$, de verzameling van alle MP-parameters van $s_{i,N}$, de N -term MP-decompositie van s_i . Aangezien gebleken is dat de golfpakketjes in de geofysische signalen op de uit de bibliotheek gekozen geschaalde en gemoduleerde Gabor-atomen (Gaussfuncties) lijken, kunnen karakteristieke delen van de ontvangen signalen goed geïdentificeerd worden met steeds vier bij elkaar horende indices van $\vec{v}_i$. De dimensie van de featurevectoren ($4N$) wordt bepaald door het aantal mee te nemen functies (N) in de decompositie van

de signalen. Voor alle gemeten signalen s_i kan een N_i worden gevonden, zodanig dat de L^2 -approximatiefout in s_i met N_i atomen kleiner is dan een zekere $\delta > 0$. Feature vectoren met gelijke dimensie worden verkregen door voor elke s_i een decompositie met N atomen te nemen, met $N = \max_i(N_i)$.

De featurevectoren bieden nu de mogelijkheid coherentie van twee onderlinge signalen s_i en s_j te meten. Dit gebeurt door een gewogen Euclidische afstand tussen $\vec{v}_i$ en $\vec{v}_j$ te bepalen. De wegingsfactoren in de afstandsmaat worden gegeven door de reciproke waarden van de variantie per decompositiecoëfficiënt, gemeten over alle signalen, dus

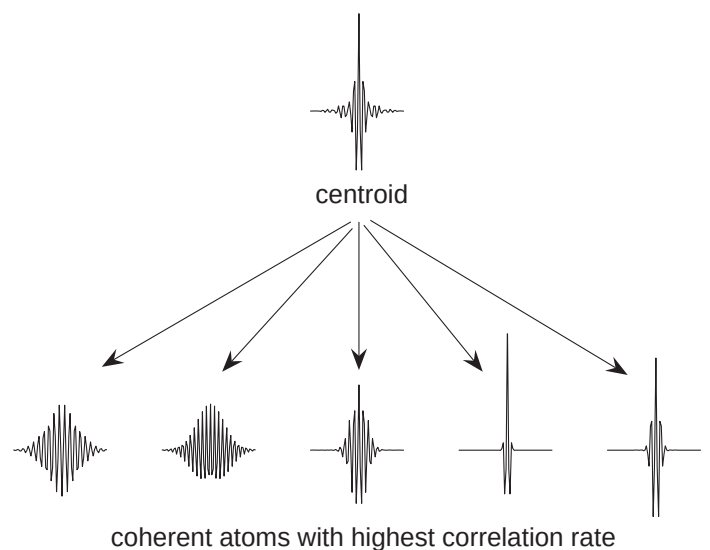
$$\text{var}(c_{\cdot,1})^{-1}, \text{var}(a_{\cdot,1})^{-1}, \dots, \text{var}(t_{\cdot,N})^{-1}.$$

Nemen we nu voor s_i de gemeten Greense functies van het propagatiemodel waargenomen op positie i , dan zullen grote schommelingen in de afstanden tussen $\vec{v}_i$ en $\vec{v}_{i+1}$ geassocieerd worden met veranderingen in de structuur van de Greense functies. Dit laatste is dan weer te herleiden tot veranderingen in de probleemstelling, in dit geval de bodemstructuur.

Met het Franse onderzoekscentrum *l'Institut de Recherche de l'Ecole Navale* is gewerkt aan een verfijning van de aanpak gebaseerd op een adaptieve afstandsmaat. In plaats van het vergelijken van $4N$ -dimensionale vectoren $\vec{v}_i$ en $\vec{v}_j$, meten we alleen de gewogen afstand tussen de eerste $\max(4N_i, 4N_j)$ kentallen van de featurevectoren. Hiermee voorkomen we dat een decompositie die veel termen nodig heeft de dimensie onnodig hoog opschroeft. Hierdoor zouden bij signalen met 'sparse' representaties decompositietermen met zeer weinig energie-inhoud een relatief grote bijdrage aan de coherentieberekening hebben.

Tree-Based Pursuit

Voordat we bekijken of en hoe de gepresenteerde aanpak in praktijk van nut blijkt te zijn, merken we op dat een redundante bibliotheek van functies voor de decompositie een grote hoeveelheid rekenwerk oplevert bij het zoeken naar de zogenaamde



Figuur 3 Vijf atomen en hun centroide uit een set van geschaalde en gemoduleerde Gaussfuncties

'best passende' atomen. Hiervoor moeten namelijk de inwendige producten van alle aanwezige kandidaatfuncties met het te decomponeren signaal berekend en onderling vergeleken worden. Een aan het Zwitserse *Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne* ontwikkeld idee [5] maakt gebruik van een ordening van de atomen met behulp van een boomstructuur, waarbij slechts berekeningen worden gemaakt in een klein aantal takken van de boom. In een dergelijke boomstructuur worden n atomen geïdentificeerd met n bladeren, allen op afstand 1 verbonden aan eenzelfde knoop. Deze knoop, die zelf ook weer blad is van een bovenliggende tak, representeert een atoom uit de bibliotheek met een hoge graad van correlatie ten opzichte van de onderliggende knopen en een lage graad van correlatie ten opzichte van alle andere bladeren (atomen) in de boom. Een dergelijke representatieve knoop noemen we een centroïde. Een voorbeeld van enkele atomen met bijbehorende centroïde is te zien in figuur 3.

De mate van correlatie tussen de bladeren onderling wordt berekend met behulp van de afstandsmaat

$$d(f, g) = \sqrt{1 - \frac{|\langle f, g \rangle|}{\|f\|_2 \|g\|_2}}, \quad (8)$$

met $f, g \in L^2(\mathbf{R})$, twee atomen uit de bibliotheek. Idealiter zou een centroïde c in de boom moeten voldoen aan

$$\max d(c, h_{\gamma_m}) \leq \min d(c, h_{\gamma_n}), \quad (9)$$

waarbij h_{γ_m} de onderliggende bladeren van c zijn en h_{γ_n} alle overige functies in de bibliotheek. Als een dergelijke boomstructuur eenmaal gecreëerd is, kan het vinden van 'optimale' atomen $h_{\gamma_0}, h_{\gamma_1}, \dots$ beperkt worden door bijvoorbeeld in (2) alleen de knopen in de boom te beschouwen die door een direct pad met elkaar verbonden zijn. Uiteindelijk blijven er een beperkt aantal bladeren over om het beste atoom h_{γ_n} uit te kiezen. Natuurlijk levert het opzetten van een dergelijke boomstructuur het nodige rekenwerk, echter dit gebeurt slechts éénmalig per bibliotheek. Het totale rekenwerk dat nodig is om telkens weer voor een gegeven signaal een decompositie te verkrijgen, met dezelfde bibliotheek van atomen, wordt hiermee aanzienlijk verkleind [5]. Natuurlijk speelt hierbij wel het aantal bladeren per knoop een grote rol. Enerzijds resulteert een groot aantal bladeren per knoop in een boom met weinig diepte en dus weinig berekeningen voor (2) en volgende, anderzijds zal de kans toenemen dat we op suboptimale atomen $h_{\gamma_0}, h_{\gamma_1}, \dots$ uitkomen. Dit laatste is te wijten aan het feit dat centroïden die meer bladeren moeten vertegenwoordigen minder discriminerend van karakter zullen zijn. Hierdoor kan het gebeuren dat een atoom met de hoogste correlatiegraad ten opzichte van het aangeboden signaal niet bereikt wordt, omdat de bovenliggende knoop een lagere graad van correlatie met het signaal vertoont dan een collega knoop. Aanbevolen wordt een aantal van vier à acht bladeren (atomen) vertegenwoordigd door één centroïde [5].

Terug naar zee

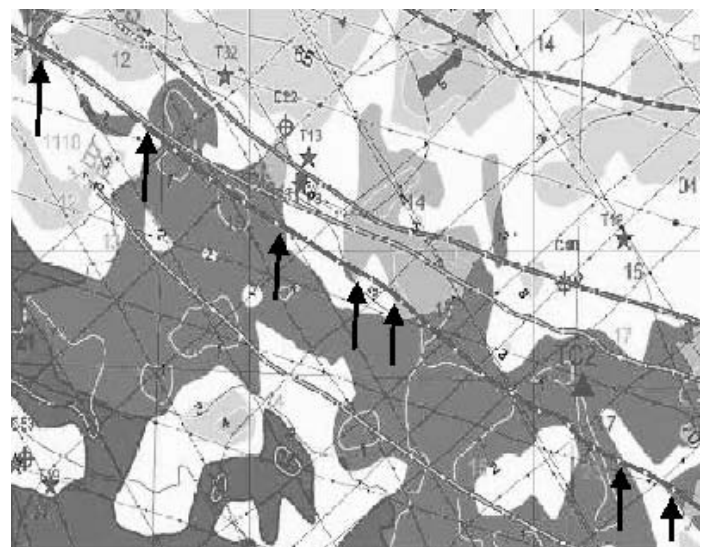
Het ontwikkelde algoritme wordt getoetst aan data verkregen uit experimenten in de buurt van Sicilië daterend van november 1997 verricht door het *NATO Undersea Research Center* (NURC). Geo-

akoestische impulsresponsies van een sonarpuls op vaste positie zijn gemeten aan acht van de bron wegdrijvende boeien voorzien van sensoren. Van 14:00 uur tot na 18:00 uur 's middags is elke minuut aan elke ontvanger de responsie van de puls geregistreerd, leidend tot 254 Greene functies s_i per boei. Deze boeien volgen, gedreven door de zeestroom, ieder een eigen weg en bestrijken zo een heel gebied. Het algoritme is voor enkele boeien getest, echter we beperken ons hier voor het gemak tot de eerste boei. Deze passeerde diverse sedimenten en sedimentdikten (korrelgrootte zand). In figuur 4 is de route van deze boei te zien als donkere curve van linksboven (14:00 u) naar rechtsbeneden (17:30 uur). De witte punten op de curve representeren een eenheid van tien minuten. De ondergrond bestaat voor dit gebied uit klei/gesteente (donkergrijs) en zand (wit/lichtgrijs). De hier getoonde kaart met zeer hoge spatiale resolutie is verkregen door NURC in 1998 gebruik makend van moderne apparatuur zoals een *Swath multibeam systeem*. De uitgezonden pulsen waren langdurige chirp pulsen met een frequentieband van 0,8 tot 1,6 kHz en werden elke minuut herhaald.

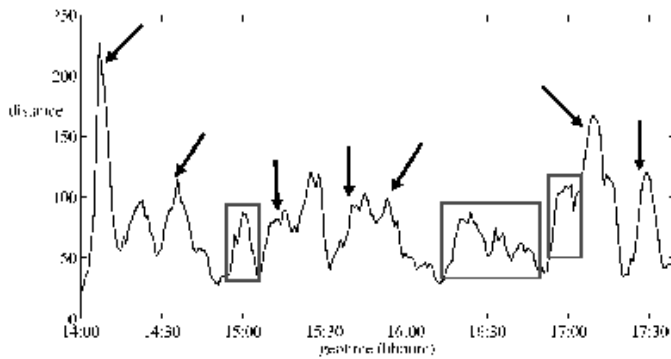
Voor de analyse van de ontvangen pulsen hebben we een verzameling van 450 Gabor-atomen aangemaakt, gebaseerd op de Gaussfunctie, door middel van combinaties van vijftig equidistant gekozen frequenties in het bereik van de pulsen en negen dyadische schalen ($a = 1, 2, 4, \dots, 2^8$). Na het creëren van een boomstructuur voor deze verzameling zijn alle waargenomen responsies s_i voor de betreffende boei geanalyseerd volgens het beschreven algoritme. Hierbij is een stopcriterium gehanteerd voor N_i atomen in de decompositie van elke s_i op basis van een 90% energiecriterium, dat wil zeggen, we nemen de kleinste N_i waarvoor geldt

$$\sum_{n=0}^{N_i-1} |\langle R_n s_i, h_{\gamma_{i,n-1}} \rangle|^2 \geq 0,9 \|s_i\|^2.$$

Voor elke s_i is de $4N_i$ -dimensionale featurevector $\vec{v}_i$ bepaald, die we volgens de adaptieve methode vergelijken met de featurevec-



Figuur 4 Route van boei 1 (donkere curve NW-ZO). De witte stippen op de curve duiden een tijdsinterval van tien minuten aan. De verschillende grijsinten duiden verschillende sedimenten aan, bijvoorbeeld zand (lichtgrijs-wit) en steen (donkergrijs). Dit is een bewerkte figuur uit [1].



Figuur 5 Gemiddelde afstanden tussen opeenvolgende featurevectoren. Pijlen corresponderen met intersedimentale passages in figuur 4.

toren $\vec{v}_j$, $j = i - 2, i - 1, i + 1, i + 2$. We nemen de gemiddelde afstand van $\vec{v}_i$ tot deze vier burens als indicatie voor bodemsegmentatie, zodat mogelijke verstoringen in de metingen door bijvoorbeeld ruis of leven in zee uitgemiddeld worden. Dit komt de robuustheid van de methode ten goede.

In figuur 5 zijn de gemiddelde afstanden behorend bij de metingen volgens de curve in figuur 4 in de tijd uitgezet. De lokale maxima van de afstandsmaat der featurevectoren corresponderen met intersedimentale overgangen voor zover aangeduid met pijlen. In figuur 4 zijn deze pijlen te vinden op de betreffende overgangen. Verder zijn een aantal waarneembare pieken in de grafiek te herleiden tot intrasedimentale overgangen. Verschillen in

de structuur van een bepaalde bodemsoort leiden tot deze essentiële veranderingen in de Greense functie. Deze intrasedimentale overgangen zijn in figuur 4 terug te vinden als gesloten witte krommen, zoals bijvoorbeeld rechts van de tweede pijl. Het aantal valse alarmeringen in deze set-up bedraagt slechts twee, namelijk de twee pieken rond 14:20 uur en 15:25 uur. Deze pieken zijn wellicht het gevolg van rond de betreffende tijdstippen actieve omgevingsfactoren die ook invloed hebben op de ontvangen puls.

Voor de andere experimenten zijn met deze wiskundige techniek soortgelijke resultaten behaald, hetgeen een zekere mate van robuustheid van de methode garandeert. Natuurlijk is met deze aanpak het inverse probleem ter bepaling van locale structuren niet opgelost, echter het is wel dusdanig vereenvoudigd dat het numeriek sneller oplosbaar is, waardoor het grotere real-time mogelijkheden biedt. Verder is de hier gepresenteerde techniek in een breder kader toepasbaar, namelijk in allerlei soorten systemen waarbij impulsresponsies bekend zijn onder wisselende omstandigheden van het systeem.

Verantwoording De hier gepresenteerde resultaten zijn verkregen door samenwerking met Anthony Auger-Ottavi en Louis le Proux de la Riviere (*Ecole Navale* te Brest) en Jean-Pierre Hermand (*Université Libre de Bruxelles*) en deels ontleend aan [7]. Een bijzonder dankwoord geldt Jean-Pierre Hermand voor het beschikbaar stellen van data en illustratieve figuren, onder andere afkomstig uit [1].

Referenties

- 1 J.-P. Hermand, P. Boni, E. Michelozzi, P. Guerrini, M. Agate, A. Borroso, A. D'Argenio, D. Di Maio, C. Lo Iacono, M. Mancuso, M. Scannavino, 'Geoacoustic inversion with drifting buoys: EnVerse 1997-98 experiments', in: *Proceedings of the Workshop on Experimental Acoustic Inversion Methods for Exploration of the Shallow Water Environment* (A. Caiti, J.-P. Hermand, S. Jesus, M. B. Porter, eds.), Portuguese Foundation for Science and Technology, Kluwer Academic, Dordrecht, June 2000, pp. 263–286.
- 2 P.J. Huber, 'Projection pursuit', *Ann. Stat.* **13**(2) (1985), pp. 435–475.
- 3 M. Jansen, P. Oonincx, *Second Generation Wavelets and Applications*, Springer-Verlag, London, 1995.
- 4 L.K. Jones, 'On a conjecture of Huber concerning the convergence of projection pursuit regression', *Ann. Stat.* **15**(2) (1987), pp. 880–882.
- 5 P. Jost, P. Vandergheynst, P. Frossard, 'Tree-Based Pursuit', *Technical Report EPFL* (2004.13) (July 2004).
- 6 S. Mallat, Z. Zhang, 'Matching pursuit with time-frequency dictionaries', *IEEE Trans. Sig. Proc.* **41**(12) (1993), pp. 3397–3415.
- 7 P. Oonincx, J.-P. Hermand, 'Gabor Atomic Decomposition of Green's functions for Geoacoustic Inversion', *Proc. IEEE Oceans '05 Europe* (cd-rom), Brest, 2005.
- 8 B. Torresani, 'Wavelets associated with representations of the affine Weyl-Heisenberg group', *J. Math. Phys.* **32** (1991), pp. 1273–1279.