

## Jaap Top

Afdeling Wiskunde en Informatica  
Rijksuniversiteit Groningen  
Postbus 800  
9700 AV Groningen  
top@math.rug.nl

### Feestrede

# Möbius in strips

In vele kelders van universiteiten kan men ze nog wel aantreffen: gips- en draadmodellen van algebraïsche oppervlakken en andere meetkundige objecten. Vroeg in de twintigste eeuw is men gestopt met de productie ervan; wel vonden ze een vervolg in de abstracte beeldende kunst. De beeldhouwer Henry Moore heeft eens verteld hoe gefascineerd hij was door deze draadfiguren, en hoe hij zich door deze voorstellingen heeft laten inspireren. Tegenwoordig staan virtuele modellen dank zij de computer weer in de belangstelling. Misschien beantwoorden deze figuren toch aan de behoefte om te kunnen zien waar je aan rekt. Jaap Top bespreekt in dit artikel de Möbiusstrings: een algebraïsch object, dat aanleiding geeft tot een speciaal type draad- en gipsmodel. In de Rijksuniversiteit Groningen is een complete verzameling te vinden, zij het dat deze wel restauratie behoeft. Hij sprak deze tekst uit op 22 mei bij het afscheid van Jan van Maanen, die benoemd is tot hoogleraar-directeur van het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.

Wie op internet naar Möbius zoekt, zal onmiddellijk bij de Franse striptekenaar Jean Giraud terecht komen. Maar dat is niet de Möbius die in deze tekst een hoofdrol speelt. Weliswaar is ook bij de onze een strip de belangrijkste reden waarom hij veelvuldig op internet te vinden is. Om nog even in dezelfde stijl te blijven, de Möbiusstrip speelt een belangrijke rol in het stripverhaal *De Wentelwereld*, getekend door Don Lawrence en geschreven door Martin Lodewijk.

Direct nadat de geheimen van een Möbiusstrip van hun verhaal uit de doeken zijn gedaan (zie drie pagina's verderop),

volgt een plaatje waarop een welgevormd boegbeeld van achteren wordt getoond. De oplettende lezer zullen de strings hierop niet ontgaan. Over zulke draadjes, de Möbiusstrings, hebben we het hier.

August Ferdinand Möbius (1790–1868) was een Duits sterrenkundige en wiskundige. Hij leerde sterrenkunde van Gauss, en wiskunde van diens promotor Pfaff. In 1816 kreeg Möbius een vaste aanstelling aan de universiteit van Leipzig. Daarna werd zijn ambitie snel duidelijk: hij wilde hoogleraar in Leipzig worden. Maar dat viel niet mee.

Pas in 1844, enkele jaren na zijn vijftig-

ste verjaardag dus, ging deze lang gekoesterde wens in vervulling. Die Möbiusstrip overigens, vond men pas na zijn dood in nagelaten geschriften. In de kennissenkring van Jan van Maanen vindt men personen die veel meer over Möbius te vertellen hebben. John Fauvel, Robin Wilson en Raymond Flood redigeerden het in 1993 verschenen boek *Möbius and his Band: Mathematics and Astronomy in Nineteenth-Century Germany*. De Möbiusstrings komen daarin evenwel niet voor.

### Strings

De originele Möbiusstrings werden van zijden draadjes gemaakt, aan het eind van de negentiende eeuw, bij de firma Martin Schilling in Leipzig. We danken ze aan de hoogleraar Hermann Wiener (1857-1939) uit Darmstadt, die er in 1901, eveneens bij de firma M. Schilling, de tekst *Die Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung* over publiceerde.

De definitie van een *Möbiusstring* begint met een homogene, derdegraads veelterm  $F(x, y, z)$  met reële coëfficiënten. Homogeen betekent, dat  $F(tx, ty, tz) = F(x, y, z)$  een macht  $t^n$  van  $t$  is, en derdegraads im-

# en strings

pliceert dat  $n = 3$ . We eisen verder, dat  $F$  irreducibel is, hetgeen wil zeggen dat voor elk paar niet-constante veeltermen  $G, H$  geldt, dat  $G \cdot H \neq F$ . Neem nu een lijn  $\ell$  door de oorsprong in de ruimte  $\mathbf{R}^3$ . Zo'n lijn  $\ell$  wordt bepaald door een 'richting'  $0 \neq v \in \mathbf{R}^3$ , en bestaat dan uit alle veelvoud

$$\ell := \{tv ; t \in \mathbf{R}\}.$$

Als  $F(v) = 0$ , dan volgt  $F(tv) = t^3F(v) = 0$  voor elke  $t \in \mathbf{R}$ , en we korten dit af door te schrijven  $F(\ell) = 0$ . Omgekeerd, als  $F(v) \neq 0$ , dan geldt  $F(tv) \neq 0$  voor elke  $t \neq 0$ , en dit schrijven we als  $F(\ell) \neq 0$  (hoewel in dit geval natuurlijk het punt  $(0, 0, 0) \in \ell$  wél ingevuld in  $F$  de waarde nul oplevert).

Een Möbiusstring bestaat uit een groot (maar eindig) aantal lijnen  $\ell$  door de oorsprong in  $\mathbf{R}^3$ , die voldoen aan  $F(\ell) = 0$ . In een concreet model zoals de firma Schilling maakte, kan je natuurlijk geen oneindig lange lijn  $\ell$  stoppen. Daarom beperken we ons tot een stukje ervan:

$$s\ell := \{w \in \ell ; \|w\| \leq 10\}.$$

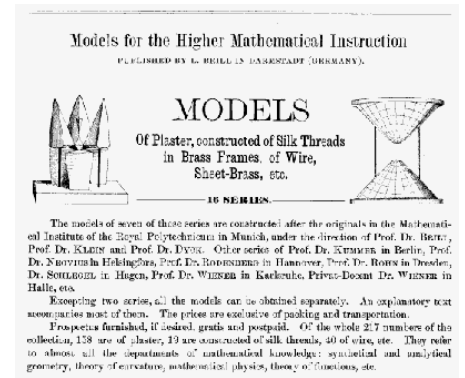
In de in 1899 verschenen Serie XXV van de *Mathematische Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, maakte de firma Schilling precies zeven verschillende Möbiusstrings. In feite wist men al een aantal jaren eerder hoe een Möbiusstring er zou gaan uitzien. Elk lijnstukje  $s\ell$  in zo'n string wordt namelijk volledig bepaald door een willekeurig punt  $\neq 0$  op  $s\ell$ . Dus door de punten  $v$  van de string te nemen, die precies op een gegeven bol om de oorsprong liggen, bepaal je de hele string. In 1886 liet hoogleraar Alexander Wilhelm von Brill (1842–1935) in Tübingen student Dollinger uit gips twee bollen met straal 5 maken. Hierop werden de punten van de zeven Möbiusstrings getekend. Preciezer gezegd, op zo'n bol zie je

$$\{w \in \mathbf{R}^3 ; \|w\| = 5 \text{ \& } F(w) = 0\}$$

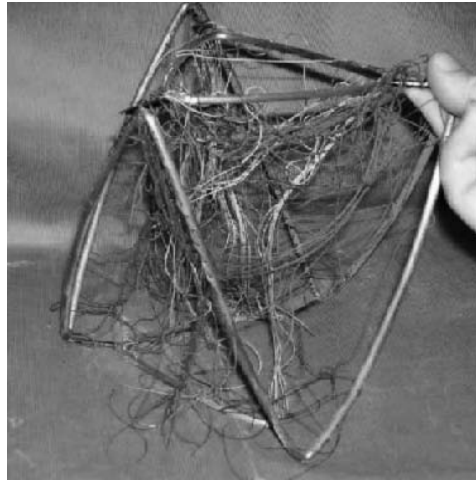
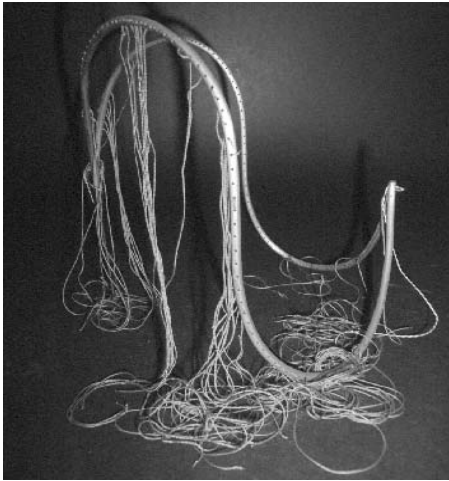
voor in totaal zeven verschillende homogene, derdegraads veeltermen  $F$  (op een van de bollen drie, op de andere vier veeltermen). Ze staan te boek als Nummer 2a en 2b in Serie XVII van de al eerder genoemde *mathematische Modelle für*

*den höheren mathematischen Unterricht*. Exemplaren van alle negen genoemde modellen zijn in het bezit van het Groningse Instituut voor Wiskunde en Informatica. De advertenties in diverse wiskundetijdschriften, waarmee de firma L. Brill (broer van Alexander) en opvolger de firma M. Schilling hun modellen wereldwijd aanprezen, bleven niet onopgemerkt. Onderstaand voorbeeld komt uit het *American Journal of Mathematics*, juli 1890.

Overigens, ruim een eeuw na het oorspronkelijke ontwerp zien alle zeven Gro



Announce in het *American Journal of Mathematics* van 1890



Twee Groningse draadmodellen in slechte staat: links de *parabola cuspidata*, rechts de *parabola campaniformis cum ovali*

ningse Möbiusstrings er ongeveer hetzelfde uit, ten gevolge van het feit dat een uit zijdedraad vervaardigd model na zoveel tijd vrij letterlijk tot op de draad versleten is. De oudere gipsbollen daarentegen hebben de tand des tijds beter doorstaan.

**Newtons typen**

Om uit te leggen waarom er zeven Möbiusstrings zijn, en niet bijvoorbeeld zes of dertien of een ander aantal waar minder 'volheid' van afstraalt, beperken we onszelf tot een simpel soort derdegraads veeltermen. Dit lijkt een essentiële beperking, maar in feite is het dat niet, omdat bewezen kan worden dat met een lineaire variabelentransformatie elke  $F$  in een exemplaar van onze speciale soort kan worden overgevoerd. Neem reële getallen  $a, b, c$  en

$$F(x, y, z) := x^3 + ax^2z + bxz^2 + cz^3 - y^2z.$$

We zijn geïnteresseerd in de nulpunten van  $F$ . Zoals we al zagen, bestaat de verzameling  $V(F)$  van alle nulpunten uit een collectie lijnen door de oorsprong. Wat we



De twee gipsen bollen van A.W. von Brill. Op de twee bollen staan afgebeeld  $\{w \in \mathbb{R}^3; \|w\| = 5 \text{ \& } F(w) = 0\}$  voor zeven verschillende homogene, derdegraads veeltermen  $F$ . Op de ene bol staan er drie, op de andere vier. Deze staan in *mathematische Modelle für den höheren mathematischen Unterricht* als Nummer 2a en 2b in Serie XVII.

eerst doen, is deze verzameling doorsnijden met het vlak  $V(z - 1)$  in  $\mathbb{R}^3$  gegeven door  $z = 1$ . Per definitie is

$$V(z - 1) \cap V(F) = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3; y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c\}.$$

In het vlak  $V(z - 1)$  zien we dus de reële oplossingen  $(x, y)$  van  $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Anders gezegd, we zien twee grafieken, namelijk die van de functie

$$f : x \mapsto \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c},$$

en de in de  $x$ -as gespiegelde grafiek hiervan, die van

$$-f : x \mapsto -\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}.$$

Sir Isaac Newton (1643–1727) gaf in een appendix 'Enumeratio Linearum Tertii Ordinis' van zijn boek *Opticks* (1704) een klassificatie in termen van de veelterm  $x^3 + ax^2 + bx + c$ . Hij vindt vijf typen.

- De veelterm heeft drie reële nulpunten  $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ . Het domein van de functies  $f, -f$  bestaat dan uit twee gedeelten: voor  $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$  vormen de beide grafieken samen een gladde 'ovaal'; voor  $x \geq \alpha_3$  zie je, in Newtons woorden, een 'klokvorm'. De officiële naam die hij aan dit geval geeft, luidt *parabola campaniformis cum ovali*.
- De veelterm heeft drie verschillende nulpunten, namelijk één reële,  $\alpha$ , en een paar complex geconjugeerde. In dit geval vormen de grafieken, voor  $x \geq \alpha$ , samen een 'klokvorm'. Bij Newton heet dit de *parabola pura*.
- De veelterm heeft slechts twee nulpunten, een dubbele en een enkele. Deze zijn dan beide reëel (omdat anders een complex geconjugeerde ook nog een

nulpunt was, en dat zouden er in totaal teveel zijn). We kunnen dus schrijven

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)^2(x - \beta)$$

met  $\alpha \neq \beta$ . We nemen nu aan dat  $\alpha > \beta$ . Het domein van  $f$  en  $-f$  bestaat dan uit alle  $x \geq \beta$ . Samen vormen de beide grafieken een kromme die zichzelf kruist in het punt  $(\alpha, 0)$ ; Newton: een *parabola nodata*.

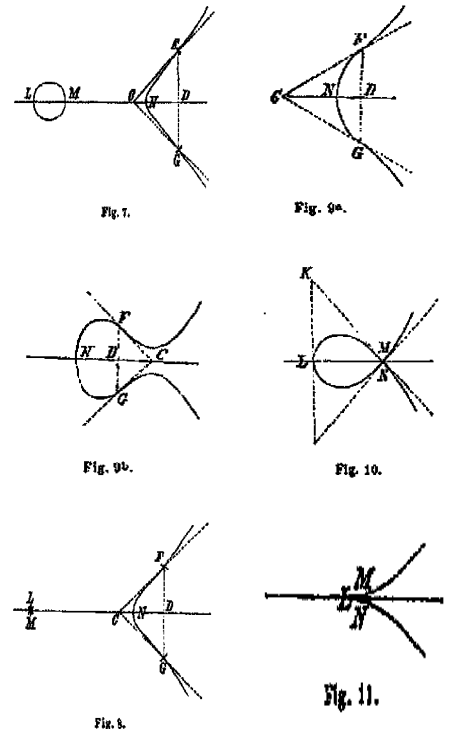
- In het analoge geval als hierboven, maar dan met  $\alpha < \beta$ , is  $x = \alpha$  een geïsoleerd punt van het domein van  $f$  en  $-f$ . De grafieken samen bestaan uit het losse punt  $(\alpha, 0)$ , samen met een 'klokvorm' voor  $x \geq \beta$ . Dit is volgens Newton de *parabola punctata*.
- Het overblijvende geval is, dat de veelterm slechts een drievoudig nulpunt heeft. We kunnen dan schrijven

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)^3$$

voor zekere  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Het domein van  $\pm f$  bestaat uit alle  $x \geq \alpha$ , en de beide grafieken 'raken' elkaar in het eindpunt  $(\alpha, 0)$ . Newton noemt dit laatste geval een *parabola cuspidata*.

**Buigpunten**

Was de theorie bij Newton geëindigd, dan hadden we vijf Newtonstrings en niet



De hier getoonde plaatjes zijn van Möbius (1852). Merk op dat hij twee figuren geeft die een parabola pura voorstellen.

meer. Het gaat echter verder: in de catalogus die de firma Schilling in 1911 uitbrengt bij al hun modellen, wordt in de beschrijving van Serie XVII 2ab gewag gemaakt van Möbius "seine schöne Untersuchungen" over derdegraads krommen. In 1852 publiceerde Möbius zijn 'Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung', 82 pagina's in de *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, math.-phys. Klasse. Hij geeft hier een verfijning van Newtons klassificatie, en daaraan danken we het gegeven dat Schillings Serie XXV uit zeven draadmodellen en niet uit vijf bestaat: de Möbiusstrings.

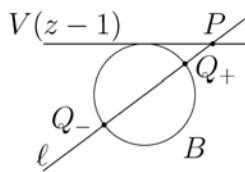
Möbius doorsnijdt de nulpuntsverzameling  $V(F)$  van de homogene, derdegraads veelterm  $F$  niet met het vlak  $V(z-1)$ , maar met de bol  $B$  met vergelijking  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Het resultaat krijgt als naam *sferische (kromme) lijn van de derde orde*:

$$B \cap V(F) = \{w \in \mathbb{R}^3; F(w) = 0 \text{ \& } \|w\| = 1\}.$$

Ieder punt  $P := (x, y, 1) \in V(z-1) \cap V(F)$  levert, door de lijn  $\ell$  die  $P := (x, y, 1)$  en  $(0, 0, 0)$  bevat te doorsnijden met de bol  $B$ , twee punten

$$Q_{\pm} := \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} (x, y, 1)$$

van  $B \cap V(F)$ .



Zo krijg je alle punten van  $B \cap V(F)$  behalve die met z-coördinaat  $z = 0$ . Omdat we uitgaan van een vergelijking

$$F = x^3 + ax^2z + bxz^2 + cz^3 - y^2z = 0,$$

correspondeert dit met het puntenpaar  $\pm(0, 1, 0)$ . We zien aan deze berekening, dat de 'grote cirkel' in  $B$  gegeven door  $z = 0$ , de kromme  $B \cap V(F)$  met multipliciteit 3 snijdt in de punten  $\pm(0, 1, 0)$ . Deze punten zijn 'buigpunten' op de kromme.  $z = 0$  definieert de 'raaklijn' aan de kromme in zo'n punt. De kromme steekt in zo'n punt over van de 'ene kant' van deze raaklijn naar de andere kant.



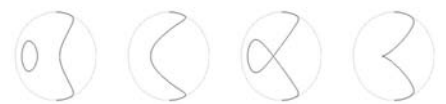
De geheimen van een Möbiusstrip, uit: *De Wentelwereld*, Don Lawrence (tekenaar) en Martin Lodewijk (tekst)

Copyright: Don Lawrence Collection

Een plaatje van  $B \cap V(F)$  maken, kan, zoals Brill en Dollinger het in 1886 deden, door de figuur op een uit gips vervaardigde bol te tekenen. Op een stuk papier kan het natuurlijk ook. Daartoe nemen we eerst de bovenste helft ( $z \geq 0$ ) van de bol  $B$ . Deze projecteren we loodrecht op het  $xy$ -vlak, zodat het beeld de schijf  $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$  wordt. De rand van de schijf correspondeert dan met de punten van de bol die z-coördinaat 0 hebben. En de punten van  $B \cap V(F)$  corresponderen met de twee randpunten  $\pm(0, 1) \in D$  samen met alle

$$(x/\sqrt{x^2 + y^2 + 1}, y/\sqrt{x^2 + y^2 + 1}) \in D$$

waarbij  $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ .



Het idee van Möbius is, nog meer buigpunten van  $B \cap V(F)$  dan die met  $z = 0$  (dus, dan die op de rand van de hier gegeven schijven) te gaan zoeken. Die hebben dan een z-coördinaat  $\neq 0$ , dus ze corresponderen met zekere punten van  $V(z-1) \cap V(F)$ . De punten die we zoeken zijn dus gewoon punten op de grafiek van  $f : x \mapsto \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$  of op die van  $-f$ . En wat we zoeken zijn precies die punten, waarin de grafiek oversteekt van de ene

kant van de raaklijn in het punt aan de grafiek, naar de andere kant. Kortom, we zoeken buigpunten van de grafiek; een onderwerp dat we ver na Möbius zelfs in het middelbare school curriculum aantreffen.

Een eerste observatie die hier gemaakt kan worden is, dat als  $f$  een buigpunt  $(\alpha, \beta)$  heeft bij  $x = \alpha$ , dan heeft  $-f$  dat ook, en wel  $(\alpha, -\beta)$ . De ‘grote cirkel’ in  $B$  die door

$$\pm \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}} (\alpha, \pm\beta, 1)$$

gaat, snijdt  $B \cap V(F)$  dan verder in de al bekende buigpunten  $\pm(0, 1, 0)$ . Möbius laat zien, dat de grafiek van  $f$  niet meer dan één buigpunt heeft. Hij heeft hiervoor een lang en slim meetkundig bewijs; een alternatief ervoor loopt als volgt. Heeft  $f$  voor  $x = \xi$  een buigpunt, dan is  $f''(\xi) = 0$ . Schrijf nu  $f(x) = \sqrt{p(x)}$ . Dan is eenvoudig na te rekenen dat

$$f''(x) = \frac{2p(x)p''(x) - (p'(x))^2}{4p(x)\sqrt{p(x)}}$$

We zijn dus op zoek naar die reële oplossingen van de vergelijking  $2p(x)p''(x) - (p'(x))^2 = 0$ , die bovendien voldoen aan  $p(x) > 0$ . Omdat  $p(x) = x^3 + \dots$ , volgt  $p''' = 6$ , en daarmee

$$\frac{d}{dx} (2p(x)p''(x) - (p'(x))^2) = 12p(x).$$

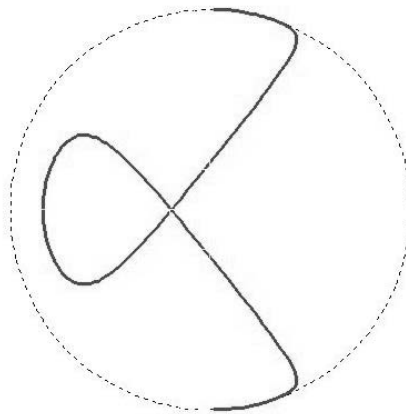
Hieruit volgt dat  $2p(x)p''(x) - (p'(x))^2$  stijgend is op elk open interval in het domein van  $f$ . Heeft  $p(x)$  hooguit twee reële nulpunten, dan zien we hieruit direct dat  $f''$  hoogstens één nulpunt heeft op het gebied waar  $p(x) > 0$ , dus inderdaad heeft de grafiek van  $f$  dan hooguit één buigpunt. In het resterende geval heeft  $p(x)$  drie onderling verschillende reële nulpunten. Tussen de twee kleinste ervan is de afgeleide van  $f$  dalend (van  $+\infty$  naar  $-\infty$ ) en de functie  $f$  dus (strict) convex (hier zit de bovenste helft van de ‘ovaal’ waar Newton van sprak). Zo’n convexe functie heeft geen buigpunten. En zoals we net al zagen, voorbij het grootste nulpunt van  $p(x)$  kan  $f$  ook maar hooguit één buigpunt hebben.

Zo is bewezen, dat  $V(z - 1) \cap V(F)$  nul of twee buigpunten bevat, en dus  $B \cap V(F)$  één of drie paren antipodale buigpunten. Zijn dit er drie, dan bepaalt, zoals we zagen, de grote cirkel door twee buigpunten de derde. Zoals eerder gezegd, onze speciale vorm voor  $F$  is geen echte be-

perking omdat door een lineaire transformatie van de variabelen, elke irreducibele, homogene derdegraads veelterm in deze speciale vorm kan worden gebracht. Dus: voor willekeurige homogene, irreducibele  $F$  van graad 3 geldt, dat gegeven twee niet antipodale buigpunten in  $B \cap V(F)$ , alle (zes) buigpunten te krijgen zijn door de grote cirkel door deze twee met  $V(F)$  te doorsnijden.

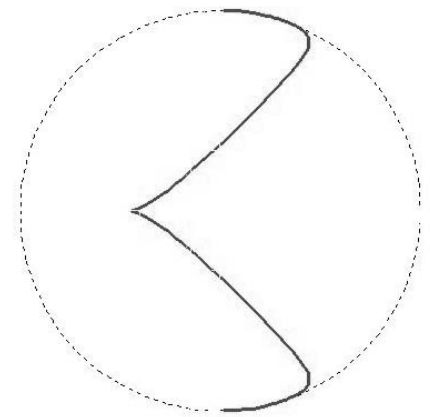
**Zeven soorten strings**

Evenals Möbius, gaan we vervolgens na voor welke typen in de classificatie van Newton  $B \cap V(F)$  één paar, dan wel drie paren antipodale buigpunten heeft. Anders gezegd, voor welke veeltermen  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  heeft de grafiek van  $f(x) = \sqrt{p(x)}$  een buigpunt? Om deze vraag te beantwoorden merken we op, dat  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)x^{-3/2} = 1$ . Dus voor  $x$  groot, is de grafiek van  $f(x)$  evenals die van  $x \mapsto x^{3/2}$  hol (concaaf). Uiteraard zien we dit ook aan  $f'$  en aan  $f''$ : die laatste is positief voor grote  $x$ , dus daar is  $f'$  stijgend. Bovendien is voor  $x \gg 0$  ook  $f'$  positief, dus  $f$  neemt steeds sneller toe. Is het grootste nulpunt  $x = \alpha$  van  $p(x)$  een enkelvoudig nulpunt, dan is de rechterafgeleide van  $f$  in dat punt oneindig, oftewel de ‘raaklijn’ aan de grafiek van  $f$  is in  $(\alpha, 0)$  verticaal. Voor  $x > \alpha$  loopt de grafiek dan eerst minder stijl (de afgeleide  $f'$  is dalend). Kortom, de grafiek van  $f$  is voor  $x > \alpha$  eerst bol (convex). Tussen  $x = \alpha$  en  $x = \infty$  zit dan een punt waarin de grafiek overgaat van bol naar hol. Dus: is het grootste nulpunt van  $p(x)$  enkelvoudig, dan heeft de grafiek van  $f$  een buigpunt. Dit gebeurt precies voor de typen (1), (2) en (4) in de classificatie van Newton.



Soort 6 (nodata)

Voor het derde type (parabola nodata) kan je door eventueel eerst de grafiek van  $f$  te translteren langs de  $x$ -as, aannemen dat  $f(x) = \sqrt{x^2(x - \beta)}$  met  $\beta < 0$ . Vervolgens herschalen we de  $x$ -as (vervang  $x$  door  $-\beta x$ ) en ook de  $y$ -as, zodat we als functie  $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$  overhouden. Het is gemakkelijk na te rekenen dat de grafiek hiervan geen buigpunten bevat. Type (3) van Newton levert ook een Soort (Gattung) bij Möbius: Soort 6. Het resterende, vijfde type (parabola cuspidata) heeft eveneens geen buigpunten: de tweede afgeleide van  $\sqrt{(x - \beta)^3}$  heeft voor  $x \geq \beta$  geen nulpunten. Dit heet bij Möbius Soort 7.

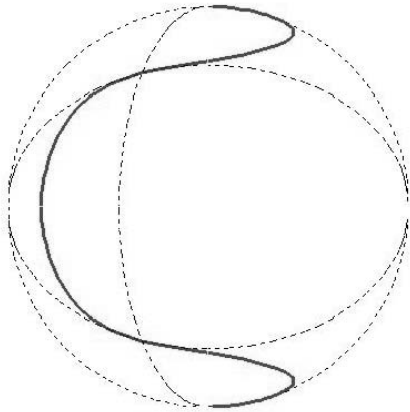


Soort 7 (cuspidata)

Möbius gaat verder met de typen (1), (2) en (4). Op de bol  $B$  heeft  $B \cap V(F)$  dan drie paren antipodale buigpunten. Hiermee maakt hij vier grote cirkels op  $B$ , namelijk de cirkel waar al deze buigpunten op liggen, en voor elk van de drie paren de grote cirkel die de raaklijn in het paar aan  $B \cap V(F)$  definieert. We kunnen deze configuratie ook (min of meer) terugvinden in het vlak  $V(z - 1)$ : de cirkel in  $B$  gegeven door  $z = 0$  is daar niet aanwezig, maar daarbij denken we voor het gemak aan een lijn in het oneindige (‘voorbij onze horizon’).

De grote cirkel door alle buigpunten zien we in  $V(z - 1)$  als de verticale lijn ( $x = \text{constant}$ ) door het buigpunt van  $f$  en dat van  $-f$ . De resterende twee grote cirkels corresponderen in  $V(z - 1)$  met de raaklijnen door het buigpunt van  $f$  en  $-f$ , respectievelijk. Deze laatste twee raaklijnen zijn elkaars beeld onder spiegeling in de  $x$ -as. In het bijzonder levert dit twee mogelijkheden.

Ten eerste, kunnen beide evenwijdig aan de  $x$ -as lopen; ze snijden elkaar dan in  $B$  in een punt van de derde raaklijn  $z = 0$ ,



Soort 5 (pura-b)

of anders gezegd, de drie raaklijnen (grote cirkels) in  $B$  behorend bij de drie paren antipodale buigpunten, gaan door één punt. De andere mogelijkheid is, dat de twee raaklijnen elkaar in een punt van  $V(z - 1)$  op de  $x$ -as snijden.

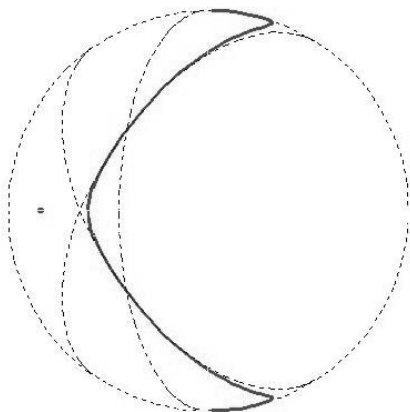
Als  $V(z - 1) \cap V(F)$  in  $V(z - 1)$  een horizontale raaklijn in een buigpunt van de grafiek van  $f$  heeft, dan mogen we door translateren langs de  $x$ -as en herschalen aannemen, dat het buigpunt  $(0, 1)$  is. De lijn  $y = 1$  snijdt de kromme gegeven door

$$-y^2 + x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$$

dan voor  $x = 0$  met multipliciteit 3. Anders gezegd,

$$x^3 + ax^2 + bx = x^3,$$

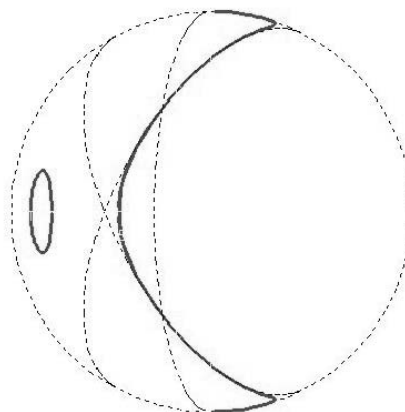
oftewel  $a = b = 0$ . De door translateren en herschalen verkregen veelterm is dus  $x^3 + 1$ , en die heeft één reëel en een paar complex geconjugeerde nulpunten. Dit geval kan dus alleen voor de parabola pura. Zoals  $-y^2z + x^3 + z^3$  laat zien, komt het dan ook echt voor. Bij Möbius heet het Soort 5.



Soort 2 (punctata)

Wat overblijft, zijn de gevallen waarin de raaklijnen in de buigpunten van  $f$  en  $-f$  elkaar op de  $x$ -as in een eindig punt snijden. Dit kan links van de  $x$ -coördinaat van het buigpunt zijn (hetgeen betekent, dat de raaklijn in het buigpunt van de grafiek van  $f$  een positieve helling heeft), of rechts daarvan (negatieve helling). Dit onderscheid laat zich helemaal in termen van de meetkunde op de bol  $B$  interpreteren. Namelijk, de raaklijn in het buigpunt van de grafiek van  $f$ , en die in het buigpunt van de grafiek van  $-f$ , en de lijn die de beide buigpunten verbindt, vormen een driehoek.

Vanaf het grootste reële nulpunt van  $f^2$  is de grafiek van  $f$  eerst bol en na het buigpunt hol. Dit impliceert dat tot aan het buigpunt de grafiek van  $f$  onder de raaklijn aan de grafiek in het buigpunt ligt. En dus ligt deze grafiek binnen de gegeven driehoek, als de helling van die raaklijn positief is, en buiten de gegeven driehoek als de helling negatief is.

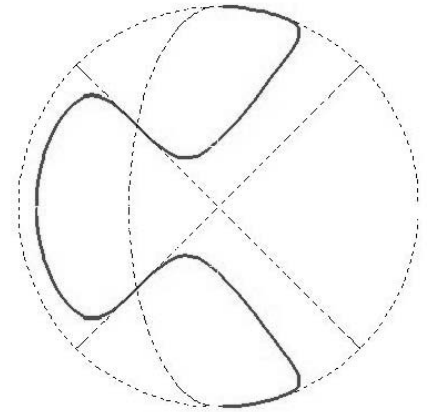


Soort 3 (campaniformis cum ovali)

In het geval van de parabola punctata kunnen we na translateren en herschalen aannemen  $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2}$ . Het buigpunt ligt dan bij  $x = 4$ , en de raaklijn aldaar wordt gegeven door  $y = 3x - 8$ . Voor  $0 < x < 4$  ligt de grafiek van  $f$  dus binnen de driehoek begrensd door de lijnen met vergelijking  $\pm y = 3x - 8$  en  $x = 4$ . De gezochte eigenschap verandert niet onder translaties of herschalingen van alle gegevens, dus elke parabola punctata heeft deze eigenschap. Möbius noemt dit Soort 2.

We behandelen vervolgens de parabola campaniformis cum ovali. Ook hier kunnen we translateren en herschalen, en daarmee veronderstellen dat

$$f(x) = \sqrt{x(x-1)(x-\gamma)}$$



Soort 4 (pura-c)

voor zekere  $\gamma > 1$ . Er geldt

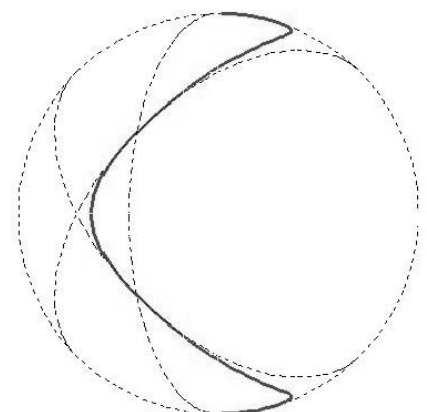
$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2(\gamma + 1)x + \gamma}{2f(x)}.$$

Heeft  $f$  een buigpunt bij  $x = \delta$ , dan is  $\delta > \gamma$ . De grafiek van deze teller is een dalparabool waarvan de top ligt bij  $x = (\gamma + 1)/3 < \gamma$  (want  $\gamma > 1/2$ ). Voor  $x \geq \gamma$  is die teller dus stijgend, en in het bijzonder

$$3\delta^2 - 2(\gamma + 1)\delta + \gamma \geq 3\gamma^2 - 2(\gamma + 1)\gamma + \gamma = \gamma^2 - \gamma > 0,$$

waarin voor de laatste ongelijkheid wordt gebruikt dat  $\gamma > 1$ . Dus de helling in het buigpunt is positief. Hieruit volgt dat voor elke parabola campaniformis cum ovali, een deel van de figuur binnen de gegeven driehoek ligt. Bij Möbius heet dit Soort 3.

Er resteert nog slechts één type, namelijk de parabola pura. We hebben al gezien, dat het in dit geval mogelijk is dat de raaklijnen aan de buigpunten van  $f$  en  $-f$  evenwijdig zijn. Maar er zijn meer mogelijkheden. Neem bijvoorbeeld  $t \in \mathbf{R}$ , en



Soort 1 (pura-a)

beschouw

$$y^2 - x^2 = (x - t)^3.$$

De lijnen gegeven door  $y = \pm x$  snijden de kromme met deze vergelijking drievoudig in  $(t, \pm t)$ . Voor  $t < 0$  is het punt  $(t, -t)$  op de grafiek van  $f : x \mapsto \sqrt{(x - t)^3 + x^2}$  dus een buigpunt, met bijbehorende raaklijn gegeven door  $y = -x$ . Deze raaklijn heeft een negatieve helling. Hieruit volgt in het bijzonder, dat  $(x - t)^3 + x^2$  slechts één reëel nulpunt heeft als  $t < 0$ : waren het er drie, dan zou, zoals we eerder gezien hebben,  $f$  een positieve helling van de raaklijn in het buigpunt gehad hebben. En waren het er twee, dan zou ofwel  $f$  helemaal geen buigpunt gehad hebben (en dat heeft  $f$  wel), ofwel ook weer eentje met een positieve helling. We hebben hier dus een parabola pura waarvan geen stuk binnen de door de twee eindige buigpunten gegeven driehoek ligt. Möbius noemt dit Soort 4.

Is omgekeerd  $t > 0$ , dan is  $(t, t)$  een buigpunt van de grafiek van  $f$ . De helling van de bijbehorende raaklijn is positief. Nu zou het natuurlijk zo kunnen zijn, dat in dit geval  $(x - t)^3 + x^2$  niet bij een parabola pura hoort. De afgeleide van deze uitdrukking is  $3x^2 + 2(1 - 3t)x + 3t^2$ . Hiervan is de discriminant  $4 - 24t$ , en deze is negatief voor  $t > 1/6$ . Voor deze  $t$  is dus de gegeven afgeleide overall positief, en dus heeft  $(x - t)^3 + x^2$  slechts één reëel nulpunt, met multipliciteit 1. Dus in ieder geval voor  $t > 1/6$  krijgen we een parabola pura, waarvan een deel binnen de door twee eindige buigpunten gegeven driehoek ligt. Möbius klassificeert deze figuur als Soort 1.

Meer mogelijkheden voor de nulpunten van  $f$  en voor de richting van de raaklijn in een buigpunt zijn er niet. Zo krijgen we dus in totaal zeven soorten, die een halve eeuw later aanleiding waren voor zeven draadmodellen, onze Möbiusstrings.

**En verder?**

In de twintigste eeuw is de theorie van de derdegraads krommen onderdeel geworden van de theorie van de elliptische krommen. Deze theorie bleek verrassend veel toepassingen te hebben, variërend van natuurkunde (zoals bij de vrije rotatie van een star lichaam, of bij de baan van een deeltje in een Schwarzschild ruimte-tijd) via differentiaalvergelijkingen (bijvoorbeeld eerste orde verge-

lijkingen met uitsluitend met beginvoorwaarden meebewegende singulariteiten) tot getaltheorie (elliptische krommen spelen een hoofdrol in het bewijs van de *Laatste Stelling van Fermat*) en cryptografie.

Een belangrijke invariant van een elliptische kromme is de  $j$ -invariant. Dit is een getal; er geldt dat twee krommen isomorf zijn over de complexe getallen precies dan, als ze dezelfde  $j$ -invariant hebben. (Voor homogene derdegraads vergelijkingen betekent dit, dat de ene in de andere wordt overgevoerd door een lineaire substitutie van de drie variabelen.) Ieder reëel getal komt voor als  $j$ -invariant van een over  $\mathbf{R}$  gedefinieerde elliptische kromme. Voorbeeld: neem als vergelijking  $-y^2 + x^3 + 2ax^2 + bx$ .

(Na translteren in de  $x$ -richting, iets waarbij de  $j$ -invariant onveranderd blijft, is elke vergelijking van het soort dat we in deze tekst analyseerden tot deze gedaante terug te brengen.) De drie nulpunten van  $x^3 + 2ax^2 + bx$  zijn onderling verschillend precies dan, als  $\Delta := b^2(a^2 - b) \neq 0$ . Is wel  $\Delta = 0$ , dan is overigens gemakkelijk na te gaan dat de vergelijking een parabola cuspidata (Soort 7) oplevert als  $a = 0$ , een parabola punctata (Soort 2) als  $b = 0$  &  $a < 0$  en ook als  $b \neq 0$  &  $a > 0$ , en een parabola nodata (Soort 6) in de resterende gevallen. Voor  $\Delta < 0$  krijgen we een parabola pura en voor  $\Delta > 0$  een parabola campaniformis cum ovali (Soort 3). De  $j$ -invariant in dit voorbeeld is

$$64 \frac{(4a^2 - 3b)^3}{\Delta}.$$

Is  $j = 0$ , oftewel  $b = 4a^2/3$ , dan hebben we de vergelijking

$$-y^2 + (x + \frac{2}{3}a)^3 - \frac{8}{27}a^3.$$

Dit geeft Soort 5. Om een kromme van Soort 4 te krijgen, moet behalve  $\Delta < 0$  en  $j \neq 0$  ook nog gelden, dat er een reëel punt op de kromme ligt waarvoor geldt, dat de raaklijn in dat punt horizontaal is. We zoeken dus een  $x > 0$  met  $3x^2 + 4ax + b = 0$ , en die bestaat precies dan, als  $4a^2 - 3b > 0$  en  $\sqrt{4a^2 - 3b} > 2a$ . Zo vinden we de voorwaarden  $j < 0$  &  $\Delta < 0$  &  $a < 0$ . In de resterende gevallen hebben we een kromme van Soort 1.

Het is zonder veel moeite na te gaan, dat alle in deze tabel weergegeven mogelijkheden daadwerkelijk voorkomen. In het bijzonder worden dus, voor geschikt gekozen  $(a, b)$ , alle zeven door Möbius beschreven soorten hier gevonden.

Bovenstaand voorbeeld laat al een beetje zien dat de klassificatie van Möbius zich niet louter in eigenschappen van de  $j$ -invariant laat uitdrukken: overgaan van  $a$  naar  $-a$  bijvoorbeeld, kan een verandering van Soort 1 naar 4 (of omgekeerd) opleveren, terwijl het geen invloed op de  $j$ -invariant heeft.

Een ander voorbeeld: de vergelijking  $x^3 + y^3 + 1 = 0$  hoort bij  $j = 0$ . Het punt  $(0, -1)$  is in dit geval een buigpunt met bijbehorende raaklijn gegeven door  $y = -1$ . Evenzo is  $(-1, 0)$  buigpunt met raaklijn gegeven door  $x = -1$ . Ook  $y = -x$  levert een raaklijn aan een buigpunt, namelijk een buigpunt  $(1, -1, 0)$  in de bijbehorende homogene coördinaten. Deze drie raaklijnen hebben geen punt gemeenschappelijk. Het is gemakkelijk na te gaan dat een deel van de hier beschreven kromme binnen de driehoek begrensd door de drie raaklijnen ligt, en dat de kromme niet uit twee componenten bestaat. Dit is er dus eentje van Soort 1. Al eerder zagen we ook krommen van Soort 5 met  $j = 0$ .

Mogelijk ligt in dit niet direct inpasbaar zijn in modernere theorie, een oorzaak waarom de klassificatie door Möbius na ruim anderhalve eeuw grotendeels vergeten is. Maar dankzij een tastbaar gegeven als de draadmodellen, gelukkig toch niet helemaal. ◀

$\Delta = 0$ & $a = 0$	Soort 7
$\Delta = 0$ & $a < 0$ & $b = 0$	Soort 2
$\Delta = 0$ & $a < 0$ & $b \neq 0$	Soort 6
$\Delta = 0$ & $a > 0$ & $b = 0$	Soort 6
$\Delta = 0$ & $a > 0$ & $b \neq 0$	Soort 2
$\Delta > 0$ ( $\Rightarrow j > 0$ )	Soort 3
$j = 0$ ( $\Rightarrow \Delta < 0$ )	Soort 5
$\Delta < 0$ & $j > 0$	Soort 1
$j < 0$ & $a < 0$ ( $\Rightarrow \Delta < 0$ )	Soort 4
$j < 0$ & $a > 0$ ( $\Rightarrow \Delta < 0$ )	Soort 1

**Tabel 1** Klassificatie van  $y^2 = x^3 + 2ax^2 + bx$  voor verschillende waarden van  $a, b, \Delta := b^2(a^2 - b)$  en  $j := 64(4a^2 - 3b)^3/\Delta$ . Alle zeven soorten kunnen bij geschikte  $(a, b)$  worden geconstrueerd.